ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

VIERTER BAND IN VIER TEILBÄNDEN.

MECHANIK.

REDIGIERT VON

FELIX KLEIN UND **CONR. MÜLLER**
IN GÖTTINGEN. IN HANNOVER.

VIERTER TEILBAND.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907—1914.

Übersicht über die im vorliegenden vierten Teilbande von Band IV zusammengefassten Hefte und ihre Ausgabedaten.

C. Mechanik der deformierbaren Körper.

III. Elastizität und Festigkeitslehre.

Heft 1. 25. VII. 1907.	Art. 23.	Müller und Timpe: Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie.
	Art. 24.	Tedone: Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre (Integrationstheorie).
Heft 2. 21. X. 1907.	Art. 25.	Tedone und Timpe: Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper.
	Art. 26.	Lamb: Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akustik.
Heft 3. 14. VI. 1910.	Art. 27.	v. Kármán: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau.
	Art. 28.	Reissner: Theorie des Erddrucks.
Heft 4. 20. I. 1914.	Art. 29a.	Grüning: Theorie der Baukonstruktionen I: Allgemeine Theorie des Fachwerks und der vollwandigen Systeme.
Heft 5. 20. XI. 1914.	Art. 29b.	Wieghardt: Theorie der Baukonstruktionen II: Speziellere Ausführungen.
	Art. 30.	Hellinger: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua.
	Art. 31.	v. Kármán und Föppl: Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre.

D. Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme.

Heft 6. 12. XII. 1911.	Art. 32.	P. und T. Ehrenfest: Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik.
		Inhaltsverzeichnis von Band IV, vierter Teilband.

Inhaltsverzeichnis zu Band IV, 4. Teilband.

C. Mechanik der deformierbaren Körper (Art. 14—31).

III. Elastizitäts- und Festigkeitslehre (Art. 23—31).

Art. 23. Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie. Von C. H. MÜLLER in Göttingen (jetzt in Hannover) und A. TIMPE in Danzig (jetzt in Münster i. W.).

(Abgeschlossen im Dezember 1906.)

Art. 24. Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre (Integrationstheorie). Von O. TEDONE in Genua.

I. Einleitende Bemerkungen.

II. Allgemeine Theorie des elastischen Gleichgewichts.

III. Allgemeine Theorie der elastischen Bewegung.

(Abgeschlossen im April 1906.)

Art. 25. Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper.

Seite

I. Allgemeine Lösungen für Körper einfachster Begrenzung.

II. Lösungen für besondere Randbedingungen oder Singularitäten.

III. Körper mit einer oder zwei unendlich kleinen Dimensionen.

(Abgeschlossen im Juli 1906.)

Art. 26. Schwingungen elastischer Systeme, insbesondere Akustik. Von H. Lamb in Manchester.

(Abgeschlossen im Juli 1906.)

Art. 27. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Von Th. v. Kármán in Göttingen (jetzt in Aachen).

(Abgeschlossen im März 1910.)

Art. 28. Theorie des Erddrucks. Von H. Reissner in Aachen (jetzt in Charlottenburg).

I. Spannungszustand des Erdkörpers und die Ermittlung der Wandkräfte.

II. Coulombs Prisma des größten Druckes und die Gleitflächentheorie.

III. Versuche.

(Abgeschlossen im November 1909.)

Art. 29a. Theorie der Baukonstruktionen I: Allgemeine Theorie des Fachwerks und der vollwandigen Systeme. Von M. Grüning in Düsseldorf (jetzt in Köln).

I. Allgemeine Prinzipien.

II. Formulierung des Problems der Statik des Fachwerks und der wandigen Systeme und ein allgemeiner Ansatz zur Lösung des Spannu problems.

III. Die Spannkraftermittelung in statisch bestimmten Systemen.

IV. Die Bestimmung der elastischen Formänderungen.

V. Theorie der statisch unbestimmten Systeme.

(Abgeschlossen im April 1912.)

Art. 29b. Theorie der Baukonstruktionen II: Speziellere Ausführungen. Von K. Wieghardt in Wien.

I. Speziellere Fragen aus der Theorie der Fachwerke.

II. Statik der Steinbauten.

Art. 30. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua.
Von E. Hellinger in Marburg a. L.

I. Die Grundansätze der Statik.

II. Die Grundansätze der Kinetik.

III. Die Formen der Wirkungsgesetze.

A. Formulierung der allgemeinen Typen.

B. Individualisierung für einzelne Gebiete.

Seite

Art. 31. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre. Von TH. v. KÁRMÁN in Aachen unter Mitwirkung von L. FÖPPL in Würzburg.

Seite

D. Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme (Art. 32).

Art. 32. Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. Von P. und F. Ehrenfest in St. Petersburg (jetzt in Leiden).

I. Die ältere Fassung statistisch-mechanischer Untersuchungen (Kinetostatistik des Moleküls).

II. Die moderne Fassung statistisch-mechanischer Untersuchungen (Kinetostatistik des Gasmodells).

III. Die „statistische Mechanik“ von W. Gibbs.

IV. Nachträge.

(Abgeschlossen im Dezember 1909, Nachträge abgeschlossen im September 1911.)

IV 23. DIE GRUNDGLEICHUNGEN DER MATHEMATISCHEN ELASTIZITÄTSTHEORIE

VON

C. H. MÜLLER UND **A. TIMPE**
IN GÖTTINGEN IN DANZIG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

1. Historisch-kritische Bücher und Monographien zur Elastizitätstheorie überhaupt.

H. Burkhardt, Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen. Jahresber. d. D. M.-V. 10 (1903), Heft 3.

A. Clebsch, Théorie de l'élasticité des corps solides, avec des notes étendues de *B. de St.-Venant*, Paris 1883.

E. und *F. Cosserat*, Sur la théorie de l'élasticité, Toulouse, Ann. de fac. des sciences 10 (1896).

L. Navier, Résumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. 3. éd. avec des notes et des appendices de *B. de St.-Venant*, Paris 1864.

J. Todhunter, A history of the theory of elasticity and of the strength of materials. Ed. and completed by *Karl Pearson*, 3 vols., Cambridge 1886—1893.

W. Voigt, L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux, Rapports prés. au congrès intern. de phys., Paris 1900, 1, p. 277 = Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelastizität, Gött. Nachr. 1900.

2. Lehrbücher zur allgemeinen Elastizitätstheorie.

F. Auerbach, Elastizität im allgemeinen, im „Handbuch der Physik", hrsg. von *A. Winkelmann*, 2. Aufl. Bd. 1, 1, Leipzig 1906, p. 497—544.

C. Bach, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1890; 4. Aufl., Berlin 1905.

A. Beer, Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität und Kapillarität, Leipzig 1869.

A. Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, Turin 1879; deutsch von *E. Hauff*, Wien 1886.

E. Cesàro, Introduzione alla teoria matematica della *elasticità*, Torino 1894.

A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862; franz. von *B. de St.-Venant* et *A. Flamant*, Paris 1883.

P. Duhem, Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique, Paris 1891 (autogr.).

Fr. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878.

H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 2: Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, Leipzig 1902.

W. J. Ibbetson, An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids, London 1887.

G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik, Leipzig 1876, 3. Aufl. ebd. 1883; 4. Aufl.. hrsg. von *W. Wien*, ebd. 1897.

G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852, 2. éd. Paris 1866.

— Leçons sur les coordonnées curvilignes et leur diverses applications, Paris 1859.

A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, 2 vols., Cambridge 1892—93; 2. ed. Cambridge 1906, deutsch von *A. Timpe*, Leipzig 1907.

R. Marcolongo, Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici, Milano 1904.

E. Mathieu, Théorie de l'élasticité des corps solides, 2 vols., Paris 1890.

C. L. Navier, Résumé des leçons sur l'application de la mecanique à l'établissement des constructions et des machines, Paris 1826; 2. éd. Paris 1833—38; 3. éd. par *B. de St.-Venant*, 2 vols., Paris 1864.

F. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, Leipzig 1885.

H. Poincaré, Leçons sur la théorie mathématique de la lumière, Paris 1889.

— Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1892.

B. Riemann, Partielle Differentialgleichungen, hrsg. von *K. Hattendorff*, Braunschweig 1869; 4. Aufl., bearbeitet von *H. Weber*, Bd. 2, ebd. 1901.

E. Sarrau, Notions sur la théorie de l'élasticité, Paris 1891.

W. Thomson and *P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy, 1. Aufl. Oxford 1867, deutsch von *H. Helmholtz* und *W. Wertheim*, Braunschweig 1874; 2. Aufl. des

W. Thomson, Artikel „Elasticity“ in Encyclopaedia Britannica 7, London und Edinburgh 1878 = Math. and phys. papers 3, London 1890, p. 1 ff.
— (Lord *Kelvin*), Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light founded on Mr. *M. S. Hothaway*'s stenographic report of twenty lectures delivered... at Baltimore (im Oktober 1884), London 1904.
A. Voigt, Compendium der theoretischen Physik, 1. Bd., Leipzig 1895.
— Elementare Mechanik, Leipzig 1894; 2. Aufl. Leipzig 1900.
J. J. Weyrauch, Theorie elastischer Körper, Leipzig 1884.
B. Williamson, Introduction to the mathematical theory of stress and strain of elastic solids, London 1894.
Th. Young, A course of natural philosophy, London 1807.

---

1. Einleitung: Anfänge der mathematischen Elastizitätstheorie. Die Elastizitätstheorie als mathematische Disziplin umfasst das Studium des Gleichgewichts und der Bewegung sogenannter vollkommen elastischer Körper, für die der Zusammenhang der im Innern der Körper vorhandenen Spannungen und der durch die äusseren Kräfte hervorgerufenen Formänderungen durch das verallgemeinerte *Hooke*'sche Gesetz gegeben ist. In dieser bestimmten Formulierung ist die Elastizitätstheorie eine Schöpfung des 19. Jahrhunderts. Sie hat aber im 18. und 17. Jahrhundert eine Vorgeschichte, die als Ziel eine weitergehende, auch die unvollkommen-elastischen, plastischen u. s. w. Eigenschaften der Körper, sowie ihre Festigkeit gleichmässig berücksichtigende Theorie erkennen lässt[1]).

Gleich der Ausgangspunkt ist ein Problem der Festigkeit: *Galilei*'s Problem der Bruchfestigkeit eines einseitig eingemauerten Balkens. Und wenn auch *Galilei* und seine unmittelbaren Nachfolger in Italien die Fasern, in die sie sich den Balken zerlegt dachten, als unausdehnbar annahmen, so wandte doch bald *E. Mariotte* 1680 das von ihm selbständig gefundene, von *R. Hooke* aber seit 1660 bereits gekannte und 1676 zuerst publizierte Gesetz von der Proportionalität von Spannung und Deformation (*ut tensio sic vis*) sofort auf das Problem der *Balkenfestigkeit* an. Zugleich erkannte er die Tatsache, dass bei

1) Da das Folgende nicht als eine ausführliche Darlegung der Anfänge der Elastizitätstheorie gedacht ist, sondern nur als Orientierung über die Hauptprobleme, so ist davon abgesehen, die historischen Angaben durch Zitate zu belegen, zumal da in den folgenden Artikeln, in denen die nähere Ausführung der Einzelprobleme behandelt wird (IV 25, *O. Tedone-A. Timpe* und IV 26, *H. Lamb*), Gelegenheit sein wird, darauf zurückzukommen. Im übrigen vgl. man die in der

der Beanspruchung eines Balkens ein Teil der Fasern gedehnt, ei anderer verkürzt wird, wobei der Übergang zwischen beiden durc die sog. *neutrale Axe* vermittelt wird, die *Mariotte* in die halbe Höh des Balkens legte. Diese Erkenntnis setzte das Problem der Balken festigkeit mit dem der *Balkenbiegung* in Beziehung und legte di Frage nach der von der *Zentrallinie* (d. h. von der Verbindungslini der Querschnittsschwerpunkte) bei Biegung angenommenen Kurv nahe, deren Natur zuerst von *Jac. Bernoulli* 1691 und 1694 bezw. 170 aufgedeckt wurde. Seitdem tritt das Interesse an dem Festigkeits problem hinter dem des Biegungsproblems stark zurück. *Jac. Ber noulli* selber und *L. Euler* widmen der ebenen *Elastica* verschieden Aufsätze, in deren einem *Euler* zu der Frage nach der Form de Elastica unter Beanspruchung des Balkens in Richtung der Faser geführt, zugleich die Grundlagen der *Säulenfestigkeit* gibt, die vo *L. Lagrange* und später von *Euler* selbst erweitert und geprüft di ersten Untersuchungen über *elastische Stabilität* werden. Insbesonder aber wird die Aufmerksamkeit auf die *Schwingungen* elastischer Körpe gelenkt, weil hier einerseits die Beziehung zu der kurz zuvor vo *J. Sauveur* 1700 als besonderen Disziplin geschaffenen *Akustik* geknüpf wurde, andererseits die analytische Behandlung der Schwingungen zu nächst der *Saite* und des *Stabes*, dann auch der *Membranen* in den Hände von *Br. Taylor*, *Joh. Bernoulli*, *Dan. Bernoulli*, *L. Euler*, *J. le Ron d'Alembert*, sowie auch *L. Lagrange* eine ganz neue und weitreichend Entwicklung der Analysis bedingte. Die befriedigende Ausdehnun der gewonnenen Resultate auf *Platten* gelang zwar nicht ohne weitere aber nachdem *E. F. Chladni* in seinen Versuchen über schwingende Platte durch sinnreiche Erfindungen das Erfahrungsmaterial — wie eins *Sauveur* für die Saiten — vermehrt, bedurfte es nur noch des Wunsche des ersten französischen Kaisers, dem das Institut de France in de Stellung einer Preisfrage für 1811 nachkam, um die Arbeiten der Mll *S. Germain* und *S. D. Poisson*'s zu veranlassen, die unter den auf di Ausbildung einer allgemeinen mathematischen Elastizitätstheorie hi zielenden Arbeiten des 19. Jahrhunderts historisch an erster Stelle stehe Zugleich aber wird am Anfang des 19. Jahrhunderts der gelockerte Zu sammenhang mit der *Festigkeitslehre* — zuerst von *H. Coulomb* 177 aus den Bedürfnissen des Ingenieurs heraus wieder fester geknüpft — vornehmlich durch die Arbeiten von *Th. Young* und *L. Navier* wiede hergestellt, welch letzterer zugleic ls der eigentliche Begründer de

Die Richtung, in der dieser Ansatz zunächst zu suchen war, wurde nur zum Teil durch die zahlreichen gelösten Einzelprobleme gewiesen; mächtiger erwies sich das Vorbild, das vor allem durch *Laplace*'s mathematische Behandlung der Brechung des Lichtes und der Kapillarerscheinungen gegeben war. Der Glaube an die Möglichkeit und Notwendigkeit, alle Erscheinungen in letzter Instanz auf Zentralkräfte zwischen den Molekülen, die nach den von *Lagrange* in seiner *Mécanique analytique* endgültig formulierten Methoden dem Kalkül zu unterwerfen seien, zurückführen zu müssen, war der Antrieb, ein Gebiet der experimentierenden Physik nach dem anderen der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen. Und wenn auch unter *S. D. Poisson*'s Einfluss die als *Molekularmechanik* aufgefasste *Mécanique physique* sich in scharfen methodischen Gegensatz zur analytischen Mechanik zu setzen drohte, so standen doch unabhängig die vielfachen Untersuchungen *A. L. Cauchy*'s, die dieser, angeregt durch *A. Fresnel*'s Arbeiten über die *Doppelbrechung des Lichts* zur Theorie der aus punktförmigen Massen bestehenden mechanischen Systeme fortgesetzt publizierte. Daneben aber eröffnete *Cauchy* — in merkwürdiger Anknüpfung an eine Arbeit von *Navier* — ganz neue Gesichtspunkte zur Aufstellung der Grundgleichungen, indem er in Verallgemeinerung gewisser, aus der *Hydrodynamik* gewohnter Vorstellungen eine *Kinematik und Statik der Kontinua* schuf, die es ihm gestattete, unabhängig von speziellen Voraussetzungen über die Natur der inneren Kräfte, aber unter Heranziehung des *Hooke'schen Gesetzes* das Ziel zu erreichen. Zwar fehlte auch bei diesem Ansatz noch die Berücksichtigung der bei der Deformation entstehenden *Wärme*, deren Notwendigkeit die verschiedenen Versuche und die lange gesuchte befriedigende Ableitung der *Schallgeschwindigkeit* in Gasen durch *Laplace* 1816 ergaben, und die vollkommen erst gelingen konnte, nachdem die *Thermodynamik* in der Mitte des 19. Jahrhunderts ihre präzise Entwicklung gewonnen hatte. Damit tritt dann das *elastische Potential*, dessen Existenz durch die beiden Hauptsätze der Thermodynamik bewiesen wird, in den Mittelpunkt der Ableitung der Grundgleichungen, nachdem es schon vorher gelegentlich von Anhängern der Molekulartheorie zur eleganteren Formulierung ihrer Ansätze herangezogen war oder einfach als existierend postuliert bei manchen, Kontinuitätsvorstellungen voraussetzenden Arbeiten als Ausgangspunkt der Entwicklung gedient hatte.

Es ist die Aufgabe des vorliegenden Referates, diesen wechselvollen und in seinen Anfängen verschlungenen Gang, den die Aufstellung der Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie genommen hat, näher darzulegen. Dabei kann es aber nicht darauf ankommen,

auf die Beziehungen näher einzugehen, die die Elastizitätstheorie insbesondere zur *elastischen Optik* hat, obwohl gerade gewisse molekulartheoretische Anschauungen der Elastizitätslehre aus dem Bedürfnisse heraus, eine allseitig befriedigende mechanische Theorie des Lichts zu geben, zuerst ausgebildet worden sind. Es muß für diese weitergehenden Entwicklungen der Theorie, die z. B. die Dispersion, Polarisation u. s. w. des Lichts nötig gemacht haben, auf das Referat über „ältere" Optik in V 21 (*A. Wangerin*) verwiesen werden. Nach einer anderen Seite kann im vorliegenden Referat wegen der weiteren Entwicklung einiger in der Kinematik und Statik der Kontinua fundamentaler Begriffe (der Spannung und Formänderung) nach ihrer rein geometrischen Seite hin auf das Referat IV 14 (*M. Abraham*) zurückgegriffen werden. Nach einer dritten Seite hin ist der Artikel IV 28 (*L. Prandtl*) als eine wesentliche Ergänzung des vorliegenden zu betrachten, insofern dort insbesondere die *physikalische Grundlegung* und *Limitierung* der hier rein mathematisch formulierten Ansätze gegeben wird. Die Frage nach dem Geltungsbereich des *Hooke*'schen Gesetzes und die Ausdehnung des Ansatzes auf die unvollkommen-elastischen Körper sind u. a. Dinge, die neben den Fragen der Festigkeit dort eine eingehende Behandlung erfahren.

2. Die Grundgleichungen als Bewegungsgleichungen des einzelnen Teilchens.

Als Bewegungsgleichungen des einzelnen Teilchens wurden die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie von *Navier*[2]) im Jahre 1821 aufgestellt. Sein Ausgangspunkt sind die allgemeinen Sätze der Punktmechanik, indem er die Elastizitätslehre als ein Kapitel der allgemeinen Molekularphysik auffasst; Vorbild waren ihm hierin die Arbeiten von *Laplace*, in denen dieser zum ersten Male versuchte, neben die *Mécanique céleste* eine *Mécanique physique* auf Grund der Auffassung einer molekularen Konstitution der Materie und der inneren Kräfte als Zentralkräfte zu stellen[3]).

Die Körper werden danach als aus diskret gelagerten „Teilchen" oder Molekülen von bestimmter Form zusammengesetzt gedacht. Diese

2) In einer vom 14. Mai 1821 datierten Abhandlung: Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, Paris, Mém. de l'Acad. 7 (1827), p. 375. Auszugsweise zuerst veröffentlicht im Bull. de la Soc. philomatique 1823, p. 177.

3) Bei *Laplace* erscheint die Molekularmechanik noch in keinem methodischen Gegensatz zur *Mécanique analytique* von *Lagrange*. Dies geschieht erst bei *S. D. Poisson*.

als starr vorausgesetzten Körperchen sind aber so klein gegenüber ihrer ebenfalls als äusserst klein angenommenen Wirkungssphäre, dass ihre Wirkung aufeinander in erster Annäherung in Richtung der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte anzunehmen ist[4]). Über die „Zentralkräfte" genügte für *Laplace* die Annahme, dass sie rasch mit der Entfernung abnehmende, sonst unbekannte Funktionen der Entfernung der Teilchen, zwischen denen sie wirken, seien.

Für die Elastizitätslehre erwies sich die direkte Übertragung dieses Begriffs der Zentralkräfte auf den deformierten Zustand eines festen Körpers zunächst nicht als förderlich. *S. D. Poisson*, der zuerst die Übertragung versuchte[5]), erhielt nämlich für die *elastische Platte* eine unrichtige Bewegungsgleichung, in der die Dicke im Quadrat statt im Kubus auftritt. Die Schwierigkeit lag in der Feststellung des „natürlichen Zustandes" eines elastischen Körpers und der Aufstellung einer Beziehung zwischen der hier wirkenden Molekularkraft und jener, die im deformierten Zustande wirkt. *Navier* löste diese Schwierigkeit nicht, aber vermied sie, indem er über die im deformierten Zustand wirkende Molekularkraft speziell eine Annahme machte.

2a. Navier's molekulartheoretischer Ansatz für isotrope Körper. *Navier*'s Voraussetzungen sind folgende: Im deformierten Zustande wirkt zwischen zwei Molekülen M und M' eine Kraft Π, die so in zwei Summanden $\pi + \pi'$ zerlegt werden kann, dass für jedes Molekül $\Sigma\pi$ über alle Moleküle der Wirkungssphäre summiert verschwindet und $\Sigma\pi'$ z. B. im Falle des Gleichgewichts nur der von aussen auf das Molekül wirkenden Kraft gleich zu sein braucht. Mit dieser Annahme fällt für *Navier* die Notwendigkeit fort, sich zu entscheiden, ob im natürlichen Zustand, in dem keine äusseren Kräfte auf den Körper

---

4) Konsequenter hat man später — zum Teil unter Zurückgreifen auf *Boscowich* (1750) — die Moleküle, solange man nur Zentralkräfte zuliess, direkt als *materielle Punkte* aufgefasst oder als diskrete Aggregate solcher Punktgruppen. Vgl. insbesondere *B. de St.-Venant*, De la constitution des atomes, Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles 2 (1878), p. 416. (Es ist dies eine erweiterte Redaktion einer Abhandlung aus dem Jahre 1844: Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continus, et sur la nature probable des dernières particules des corps, vgl. den Auszug in l'Institut 1844, p. 48). — Es kann hier nicht weiter darauf eingegangen werden, welchen Anteil philosophische Spekulationen am Anfang des 19. Jahrhunderts auf die Ausbildung dieser älteren — *statischen* — Molekulartheorie gehabt haben. Dass aber *Boscowich*, nach dem besonders in England diese Auffassung als *Boscowichian theory* bezeichnet wird, auch in Frankreich einen entscheidenden Einfluss gehabt hat, ist nicht zu bezweifeln.

5) Paris, Mém. de l'Acad. 1812, p. 167 (vom 1. Aug. 1814).

wirkend gedacht werden, für jedes Molekül die Molekularkraft einzeln Null ist oder nur ihre Resultierende[6]). Über die Wirkungsart dieser Kräfte π' stellt er sodann das neue „Prinzip" auf: Die Kraft π' ist der bei der Deformation erfolgenden Grössenänderung $(r_1 - r)$ der Entfernung r proportional und fällt wegen der Kleinheit der seitlichen Verschiebung in erster Annäherung in Richtung der ursprünglichen Entfernung r; der Proportionalitätsfaktor $F(r)$ entspricht der *Laplace*schen rasch mit der Entfernung abnehmenden Funktion. Dass *Navier* übrigens mit dieser Annahme nur das aus der Erfahrung bekannte *Hooke*'sche Gesetz über die lineare Abhängigkeit von Spannung und Deformation (s. Nr. 4a) auf die Dimension des Molekularen ausdehnt, spricht er selbst klar aus[7]).

Auf Grund dieser Annahmen ist nun der analytische Ansatz folgender:

Es seien x, y, z die Koordinaten eines Teilchens M vor der Deformation, $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Koordinaten nach der Deformation, wo u, v, w für den Fall des Gleichgewichts, der zunächst nur berücksichtigt sein mag, Funktionen von x, y, z allein sind. Die entsprechenden Koordinaten eines Nachbarteilchens seien $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ bezw. $(x + \Delta x) + (u + \Delta u)$, $(y + \Delta y) + (v + \Delta v)$, $(z + \Delta z) + (w + \Delta w)$. Der Zuwachs der Entfernung $(r_1 - r)$ wird dann in erster Annäherung (d. h. bei sog. *unendlich kleinen Verschiebungen* u, v, w)

$$r_1 - r = (\alpha \Delta u + \beta \Delta v + \gamma \Delta w);$$

hier bedeuten α, β, γ die Richtungscosinus von r. Die Kraft π' erhält somit die Komponenten

$$\begin{aligned}
\pi'\alpha &= F(r)\,(\alpha^2 \Delta u + \alpha\beta \Delta v + \alpha\gamma \Delta w)\\
\pi'\beta &= F(r)\,(\alpha\beta \Delta u + \beta^2 \Delta v + \beta\gamma \Delta w)\\
\pi'\gamma &= F(r)\,(\alpha\gamma \Delta u + \beta\gamma \Delta v + \gamma^2 \Delta w).
\end{aligned}$$

---

6) In einer langen Polemik zwischen *Navier* und *Poisson,* die sich später im Anschluss an *S. D. Poisson*'s Arbeiten zur Elastizitätslehre erhob, hat sich *Navier* für die erstere Annahme entschieden. Er muss dann annehmen, dass die Wirkungsweise zweier Moleküle in gleicher Entfernung *individuell* verschieden ist, je nachdem äussere Kräfte wirken oder nicht. Hierin sieht *Fr. Arago* eine Schwierigkeit, die *Navier* aber durch den verschiedenen „physikalischen Zustand", in dem der Körper sich vor und nach der Deformation befindet, als gehoben ansieht. Vgl. Annales chim. phys. 38 (1828), p. 304 und 435, 39 (1828), p. 145 und 435, 40 (1829), p. 99, sowie die Schlussantwort von *Navier*, Bull. des sciences math. de Férussac 11 (1829), p. 243.

7) Vgl. Ann. chim. phys. 38 (1828), p. 311: *Adopter ce principe c'est simplement transporter aux élémens intimes des corps élastiques les propriétés que ces corps eux-mêmes nous présentent.*

Hierin ersetzt *Navier* die Grössen Δu, Δv, Δw durch Reihenentwicklungen nach Potenzen von $\Delta x = r\alpha$, $\Delta y = r\beta$, $\Delta z = r\gamma$ und erhält, indem er bis zu Gliedern zweiter Ordnung geht:

$$(1)\quad \begin{cases} \pi'\alpha = r\,F(r)\left\{\alpha^3 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2\beta\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \cdots\cdot\right\} \\ \qquad + r^2F(r)\left\{\dfrac{\alpha^4}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^3\beta\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cdots\cdot + \dfrac{\alpha\gamma^3}{2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial^2 z}\right\}, \\ \pi'\beta = \cdots, \qquad \pi'\gamma = \cdots\cdot \end{cases}$$

Die von allen Teilchen der Wirkungssphäre auf das Molekül $x + u$, $y + v$, $z + w$ ausgeübte Kraft findet *Navier* nun nach Einführung von Polarkoordinaten durch Integration[8]) über die molekulare Wirkungssphäre. Hierbei nimmt er alle von dem betrachteten Punkt ausgehenden Richtungen als gleichwertig, den Körper also nach einer von *A. L. Cauchy*[9]) herrührenden Bezeichnungsweise als *isotrop* an.

---

8) Gegen die Zulässigkeit der Umsetzung der Summation (zunächst nur soweit es sich um den Abstand r handelt) in eine Integration bei Annahme molekularer Konstitution der Materie ist von *S. D. Poisson* wiederholt Einspruch erhoben. Vgl. die in Fussnote 6) genannte Polemik mit *Navier*, sowie die Einleitung seiner Abhandlung vom Jahre 1828, Paris, Mém. de l'Acad. 8 (1829) p. 357. Den Haupteinwand leitet *Poisson* aus einem Resultat her, das sich ihm bei seinen eigenen Versuchen, die Grundgleichungen auf molekulartheoretischer Basis zu begründen, ergab. Er findet nämlich, dass die Einführung der Integration über die Entfernung r von 0 bis ∞ die *Elastizitätskonstante* gleich Null bedingt, so dass danach im deformierten Zustand gar keine Spannung vorhanden wäre. Er schliesst hieraus, dass die Summation nicht in eine Integration umgesetzt werden dürfe. Vgl. jedoch *R. Clausius*, Ann. Phys. Chem. 76 (1849), p. 56, der diese Schwierigkeiten vermeidet, indem er ausführt, dass man das Augenmerk nicht nur auf *ein* Molekül mit seiner Wirkungssphäre beschränken, sondern unzählig viele solcher Systeme gleichzeitig betrachten müsse, und bei der Summenbildung für jede in Frage kommende Summe den Mittelwert aus allen den Werten, die sie bei den einzelnen Systemen annimmt, zu erhalten suchen müsse. Es kommt dies auf das Herausheben eines mittleren Zustandes, der auch allein beobachtbar ist, hinaus. In einem solchen *Normalsystem* ist es nun gestattet, die Summationen durch Integrationen zu ersetzen, nur darf als untere Grenze der Integration über r nicht Null gewählt werden, sondern der unbekannte, allerdings wenig von Null verschiedene Wert des Molekülabstandes, so dass das *Poisson*'sche Paradoxon einer spannungslosen Deformation nicht auftritt. Vgl. auch *J. H. Jellett*, Dubl. Irish. Trans. 22, part. 3 (1852), p. 209, der durch Abschätzung zu folgendem Resultat kommt: Die Integrationen sind anwendbar, solange die Molekularkräfte innerhalb der Wirkungsphäre stetig variieren und die Wirkungssphäre so groß ist, daß sie in eine große Zahl kleiner Elemente geteilt werden kann, von denen jedes wieder unbestimmt viele Moleküle enthält.

9) *Cauchy*, Paris C. R. 9 (1839), p. 59 = Oeuvres (1) 4, p. 466. Vgl. auch Exercices d'Analyse et de Physique mathématique 1 (1840), p. 162.

Es verschwinden dann alle Glieder, in denen ein Richtungscosinus in ungerader Potenz auftritt. Damit fällt jeweils der erste Summand der Gleichungen (1) überhaupt fort, in den zweiten Summanden, die zusammen 15 verschiedene Koeffizienten enthalten, fallen neun Glieder fort, von den übrigen sechs Koeffizienten werden drei dem Dreifachen der letzten drei gleich, die wieder unter sich gleich sind, so dass nur *eine* Konstante

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty r^4 F(r)\,dr$$

übrig bleibt. Damit wird

$$(2)\quad \begin{cases} \sum \pi'\alpha = \varepsilon\left(3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum \pi'\gamma = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right). \end{cases}$$

Bei Einführung der abkürzenden Bezeichnungen

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

und

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

werden damit, wenn X, Y, Z die Komponenten der auf das Teilchen $x + u$, $y + v$, $z + w$ (mit der Masse 1) wirkenden äusseren Kraft sind, die *Hauptgleichungen für das Gleichgewicht*:

$$(3)\quad \begin{cases} \varepsilon\left(\Delta^2 u + 2\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + X = 0, \\ \varepsilon\left(\Delta^2 v + 2\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) + Y = 0, \\ \varepsilon\left(\Delta^2 z + 2\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) + Z = 0. \end{cases}$$

Die *Hauptgleichungen für die Bewegung* werden hiernach, da die Beschleunigung des Teilchens $x + u$, $y + v$, $z + w$ durch die Komponenten $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$ gegeben ist (in denen man sich später gewöhnt hat, runde ∂ einzuführen, um anzudeuten, dass x, y, z konstant zu denken sind):

$$(3')\quad \begin{cases} \varepsilon\left(\Delta^2 u + 2\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + X = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \varepsilon\left(\Delta^2 v + 2\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) + Y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \varepsilon\left(\Delta^2 w + 2\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) + Z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Die *Grenzbedingungen* glaubt *Navier* in dieser direkten Weise nicht leicht aufstellen zu können[10]). Er greift daher auf die von *Lagrange* in der Mécanique analytique gegebene allgemeine Methode zur Behandlung mechanischer Probleme zurück: durch Voranstellung des Prinzips der virtuellen Verrückungen unter Einführung des Begriffs des „Moments einer Kraft" oder der „virtuellen Arbeit", die Hauptgleichungen und Grenzbedingungen in *einem* Prozesse zu gewinnen. Diese zweite Ableitung der Grundgleichungen durch *Navier* führt hinüber zu den in Nr. 5 näher zu besprechenden Ableitungsmethoden, die den Begriff des Potentials in den Vordergrund stellen. Das Resultat ist, dass die Grenzbedingungen durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$(4)\quad \begin{cases} X_n = \varepsilon \Big\{ \Big(3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\cos\beta \\ \qquad\qquad + \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\cos\gamma \Big\}, \\ Y_n = \varepsilon \Big\{ \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\cos\beta \\ \qquad\qquad + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)\cos\gamma \Big\}, \\ Z_n = \varepsilon \Big\{ \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)\cos\beta \\ \qquad\qquad + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + 3\frac{\partial w}{\partial z}\Big)\cos\gamma \Big\} \end{cases}$$

wo X_n, Y_n, Z_n die Komponenten der auf die Einheit der Oberfläche wirkenden Kräfte, d. h. also in heutiger Ausdrucksweise des Oberflächendruckes sind und $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungscosinus der Normalen n des Oberflächenelements.

In diesen Gleichungen erscheint der Druck an der Oberfläche aus 6 Elementardrucken aufgebaut, die lineare Funktionen der „Deformationsgrössen" $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)$ sind. Es bedurfte der Erkenntnis *Cauchy's*, dass auch der Druck oder, wie er sagt, die „Spannung"

10) Dies taten *G. Lamé* und *E. Clapeyron*, die unabhängig von *Navier* von denselben Voraussetzungen wie dieser ausgehend, die Ableitung der Hauptgleichungen geben. Sie erhalten die Grenzbedingungen durch Anwendung des von *Poisson* zuerst entwickelten Begriffs des Molekulardrucks auf eine Fläche als Resultierende aller Kräfte, die von der einen Seite der Fläche auf die in einem unendlich dünnen, nach der anderen Seite der Fläche errichteten Zylinder enthaltenen Moleküle ausgeübt werden. Vgl. die gemeinsame Abhandlung aus dem Jahre 1828: Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes, J. f. Math. 7 (1831), p. 150 und Paris, Mém. prés. par div. sav. 4 (1833), p. 465.

in jedem Punkte des Innern der elastischen Körper genau so durch 6 Komponenten bestimmt ist, die als Funktionen der Deformtionsgrössen zu denken sind, um einen ganz neuen Weg für die Aufstellung der Grundgleichungen unter Voranstellung dieses sogenannten „Spannungsbegriffs" zu eröffnen, worüber sich das Nähere in Nr. 3 findet.

2b. Cauchy's molekulartheoretischer Ansatz für anisotrope Körper. Der Begriff des anisotropen (*aeolotropen* in der englischen Ausdrucksweise) elastischen Körpers wurde zuerst von *A. Fresnel*[11]) entwickelt, der in Verfolg seiner Untersuchungen zur Doppelbrechung des Lichts in Krystallen zu der Auffassung kam, dass sich die „Elastizität" nach verschiedenen Richtungen verschieden verhalten kann. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines anisotropen Mediums gab jedoch *Fresnel* nicht. Die Gleichungen sind implizit in den Entwicklungen von *Navier* (vgl. Nr. 2a) enthalten, wenn man die dort genannten 15 Koeffizienten als 15 verschiedene charakteristische Konstante auffasst. Explizit gab die Ableitung zuerst *Cauchy*[12]), indem er die Auffassung der punktförmigen Moleküle beibehielt, für die wirkende Zentralkraft aber nicht *Navier*'s Prinzip annimmt, sondern versucht, die im natürlichen Zustande wirkende Zentralkraft mit der im deformierten Zustande wirkenden in Beziehung zu setzen,

11) Vgl. die zusammenfassende Abhandlung von *Fresnel* vom 26. Nov. 1821 (bzw. 22. Januar und 22. April 1822): Mémoire sur la double refraction, Paris, Mém. de l'Acad. 7 (1827), p. 45 = Oeuvres 1, Paris 1866, p. 247.

12) *A. L. Cauchy* in seiner Abhandlung vom 1. Oktober 1827: Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, Exerc. de math. 3 (1828), p. 188 = Oeuvres (2) 8, p. 227. Er setzt dort für die Zentralkraft $f(r_1)$ im deformierten Zustande, indem er gleichzeitig die Richtungsänderung der ursprünglichen Entfernung in Betracht zieht:

$$\frac{f(r_1)}{r_1} = \frac{f(r)}{r} + (r_1 - r)\frac{d\,\frac{f(r)}{r}}{dr}.$$

Formal erfolgt damit der Übergang zu *Navier*'s Ansatz, indem man $\frac{f(r)}{r} = \pi$ und $\Sigma\pi = 0$, $(r_1 - r)\frac{d\,\frac{f(r)}{r}}{dr} = \pi'$ setzt. Sachlich ist aber ein tiefgehender Unterschied, indem hier π mit der im natürlichen Zustande auf das Molekül wirkenden Kraft P identifiziert wird, was *Navier* nicht tut und wogegen er ausdrücklich warnt. In der Tat leitete *J. M. C. Duhamel* in einer der Pariser Akademie eingereichten Note auf Grund der Identifikation von P und π einen Einwand gegen den *Navier*'schen Ansatz her. Vgl. hierzu die Antwort *Navier*'s, Bull. des sciences math. de Ferussac 11 (1829), p. 246.

und damit die in Nr. 2 genannte Schwierigkeit zu überwinden. *Cauchy*'s Interesse an diesen molekulartheoretischen Fragen[13]) nahm seinen Ausgangspunkt von der Beobachtung, dass eine genaue Analogie zwischen einem von ihm bei der Analyse des Spannungsbegriffs gefundenen Theorem über die Drucke und einem zuerst von *Fresnel* auf Grund molekulartheoretischer Anschauungen über die Konstitution des Lichtäthers angenommenen Satz über die „Elastizitätskräfte" besteht. *Cauchy*'s Theorem war, dass der Druck in einem Punkt P einer Fläche durch die Drucke auf drei zueinander rechtwinklige Ebenen durch den Punkt bestimmt ist (vgl. Nr. 3); *Fresnel*'s Annahme, dass die Kraft, die auf ein unter Einwirkung irgend welcher Zentralkräfte aus der Gleichgewichtslage verschobenes Teilchen wirkt, durch die Kräfte gegeben ist, die bei drei zueinander rechtwinkligen Verschiebungen des Teilchens auftreten.

Cauchy wählt nun als Anfangszustand bei seinen Entwicklungen nicht notwendig einen Gleichgewichtszustand, in dem die Resultierende aller Kraftwirkungen $f(r)$ der Moleküle von der Masse $m, m', \ldots$ auf das einzelne Molekül $m^0(x, y, z)$

$$m^0 S(mf(r)\alpha), \qquad m^0 S(mf(r)\beta), \qquad m^0 S(mf(r)\gamma)$$

verschwindet (α, β, γ sind die Richtungscosinus des Vektors $f(r)$.[14]) Bei einer erfolgenden weiteren Deformation ändern sich die Entfernungen und die ursprüngliche Wirkungsrichtung der Moleküle, so dass die Komponenten der wirkenden Kräfte nunmehr

$$(5) \qquad \begin{cases} m^0 \mathfrak{X} = m^0 S\left(mf(r_1)\dfrac{\Delta x + \Delta u}{r_1}\right) \\ m^0 \mathfrak{Y} = m^0 S\left(mf(r_1)\dfrac{\Delta y + \Delta v}{r_1}\right) \\ m^0 \mathfrak{Z} = m^0 S\left(mf(r_1)\dfrac{\Delta z + \Delta w}{r_1}\right) \end{cases}$$

werden, wo die Bezeichnungen die gleichen wie in Nr. 2a sind. Die Annahme, dass *nur kleine Verschiebungen* u, v, w in Betracht ge-

13) Diese Untersuchungen *Cauchy*'s wurden zuerst in einer vom 1. Oktober 1827 datierten Abhandlung (vgl. Fussnote 12) veröffentlicht. Eine Ergänzung finden sie in der Abhandlung vom Jahre 1829: Sur les équations differentielles d'équilibre ou de mouvement pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de repulsion mutuelle, Exerc. de math. 4 (1829), p: 129 = Oeuvres (2) 9, p. 162.

14) Bei *Cauchy* erscheint der Vektor $f(r)$ noch mit dem Vorzeichen $\pm$ versehen, wo das positive Vorzeichen für die Attraktion, das negative für die Repulsion gilt. Im Text ist der Einfachheit halber das Zeichen in die Funktion $f(r)$ aufgenommen.

zogen werden, erlaubt es *Cauchy*

$$\frac{f(r_1)}{r_1} = \frac{f(r)}{r} + (r_1 - r)\frac{rf'(r) - f(r)}{r^2} = \frac{f(r)}{r} + (r_1 - r)F(r)$$

zu setzen und damit für die Kraftkomponenten (der Masseneinhe

$$\mathfrak{X} = Sm\left(1 + \frac{rF(r)}{f(r)}(r_1 - r) + \frac{\Delta u}{r\alpha}\right)\alpha f(r)$$

zu schreiben, nebst zwei entsprechenden Ausdrücken für $\mathfrak{Y}$ un

Zieht man in Rücksicht, dass $(r_1 - r)$ durch die Beziehung

$$r_1 - r = \alpha\Delta u + \beta\Delta v + \gamma\Delta w$$

gegeben ist, so werden

$$(5')\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= Sm\{f(r)\alpha + \left(\frac{f(r)}{r} + rF(r)\alpha^2\right)\Delta u + rF(r)(\alpha\beta\Delta v + \alpha\gamma\Delta \\ \mathfrak{Y} &= Sm\{f(r)\beta + \left(\frac{f(r)}{r} + rF(r)\beta^2\right)\Delta v + rF(r)(\beta\gamma\Delta w + \beta\alpha\Delta \\ \mathfrak{Z} &= Sm\{f(r)\gamma + \left(\frac{f(r)}{r} + rF(r)\gamma^2\right)\Delta w + rF(r)(\gamma\alpha\Delta u + \gamma\beta\Delta \end{aligned}\right.$$

in diese Ausdrücke hat man nur die Entwickelungen der Grö Δu, Δv, Δw nach Potenzen von Δx, Δy, Δz (vgl. Nr. 2a) ei führen, um die Kraftkomponenten in der Form

$$\mathfrak{X} = X_0 + X_1 + X_2, \quad \mathfrak{Y} = Y_0 + Y_1 + Y_2, \quad \mathfrak{Z} = Z_0 + Z_1 +$$

als Summe von drei Funktionen darzustellen, in denen X_0, Y_0 die im Anfangszustand wirkenden Kraftkomponenten bezeichnen, Y_1, Z_1 lineare Funktionen der neun Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

und X_2, Y_2, Z_2 ebenfalls lineare Funktionen der 18 zweiten Differen quotienten der Verschiebungen u, v, w nach den x, y, z werden.

Im weiteren Verlaufe macht nun *Cauchy*, um eine Vereinfac der Ausdrücke zu erzielen, über die *Verteilung der Moleküle*[15]) Annahme, dass der Körper zunächst in Bezug auf jedes Molekül zentrische Symmetrie habe, wodurch die Grössen X_0, Y_0, Z_0 X_1, Y_1, Z_1 zum Verschwinden kommen, da sie nur jeweils ungerade Anzahl von Richtungscosinus als Koeffizienten entha Damit werden, wenn man als abkürzende Bezeichnung:

---

15) Durch die Annahme einer symmetrischen Verteilung der Molekül reicht *Cauchy* die Reduktion der Konstanten, ohne wie *Navier* nötig zu h auf die Integration zurückzugreifen, worin *B. de St.-Venant* in *Navier*'s Re des leçons 2, 3. éd., p. 653 einen besonderen Vorzug sieht.

$$\mathfrak{A} = S\left(\frac{mr}{2}f(r)\alpha^2\right), \quad \mathfrak{B} = S\left(\frac{mr}{2}f(r)\beta^2\right), \quad \mathfrak{C} = S\left(\frac{mr}{2}f(r)\gamma^2\right),$$

$$\mathfrak{D} = S\left(\frac{mr}{2}f(r)\beta\gamma\right), \quad \mathfrak{E} = S\left(\frac{mr}{2}f(r)\gamma\alpha\right), \quad \mathfrak{F} = S\left(\frac{mr}{2}f(r)\alpha\beta\right),$$

$$L = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\alpha^4\right), \quad M = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\beta^4\right), \quad N = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\gamma^4\right),$$

$$P = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\beta^2\gamma^2\right), \quad Q = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\gamma^2\alpha^2\right), \quad R = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\alpha^2\beta^2\right),$$

$$U = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\alpha^2\beta\gamma\right), \quad V = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\alpha^3\gamma\right), \quad W = S\left(\frac{mr^3}{2}F(r)\alpha^3\beta\right),$$

$$U' = S(\ldots), \quad V' = S(\ldots), \quad W' = S(\ldots),$$

$$U'' = S(\ldots), \quad V'' = S(\ldots), \quad W'' = S(\ldots),$$

einführt, die Kraftkomponenten durch die Ausdrücke

$$(5'')\quad \begin{aligned} \mathfrak{X} = {} & \mathfrak{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathfrak{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathfrak{C}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\mathfrak{D}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + 2\mathfrak{E}\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + 2\mathfrak{F}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \\ & + L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Q\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + W\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + W'\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + W''\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ & + V\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + V'\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + V''\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\Big(U\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + V\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} \\ & + W\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + V'\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + U\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} + R\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + W''\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} \\ & + Q\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x} + U\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big), \\ \mathfrak{Y} = {} & \cdots, \\ \mathfrak{Z} = {} & \cdots, \end{aligned}$$

gegeben.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht ergeben sich nunmehr sofort aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{X} + X = 0, \quad \mathfrak{Y} + Y = 0, \quad \mathfrak{Z} + Z = 0;$$

für die Bewegung sind rechter Hand die Beschleunigungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ einzuführen. Die so entstehenden *Hauptgleichungen* enthalten zusammen 6 + 15 Konstante, die sich für spezielle Symmetriefälle auf eine geringere Anzahl reduzieren. *Cauchy* betrachtet insbesondere den Fall *dreier Symmetrieebenen*, in dem noch alle Glieder verschwinden, in denen ein einzelner Cosinus in ungerader Potenz vorkommt, so dass nur 3 + 6 Konstante bleiben. Die Kraftkomponenten erhalten hier die übersichtliche Form:

$$
(6)\quad\begin{cases}
\mathfrak{X} = (\mathfrak{A} + L)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mathfrak{B} + R)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mathfrak{C} + Q)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
\qquad\qquad + 2R\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2Q\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}, \\
\mathfrak{Y} = (\mathfrak{A} + R)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\mathfrak{B} + M)\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mathfrak{C} + P)\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
\qquad\qquad + 2P\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2R\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\
\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A} + Q)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\mathfrak{B} + P)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\mathfrak{C} + N)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
\qquad\qquad + 2Q\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2P\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}.
\end{cases}
$$

Im Fall, dass die Symmetrie in Bezug auf alle drei Ebenen die gleiche ist, werden

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}, \quad L = M = N, \quad P = Q = R,$$

so dass nur $1 + 2$ Konstante übrig bleiben. Im Fall der *Isotropie* lässt sich dann zeigen, dass noch die Relation $L = 3R$ gilt, womit sich die ursprünglich $6 + 15$ Konstante auf $1 + 1 = 2$ Konstante reduzieren. Die Gleichungen werden hier

$$
(7)\quad\begin{cases}
\mathfrak{X} = (R + \mathfrak{A})\Delta^2 u + 2R\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\
\mathfrak{Y} = (R + \mathfrak{A})\Delta^2 v + 2R\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\
\mathfrak{Z} = (R + \mathfrak{A})\Delta^2 w + 2R\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Cauchy bemerkt, dass für $\mathfrak{A} = 0$ die Gleichungen mit den von *Navier* entwickelten (vgl. Nr. 2a) übereinstimmen, wo $R = \varepsilon$ ist.

Bisher sind als unabhängige Veränderliche die Anfangskoordinaten x, y, z des Moleküls zur Zeit t_0 eingeführt. *Cauchy* zeigt, dass wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Verschiebungen u, v, w die Gleichungen dieselbe Gestalt behalten, wenn man die *augenblicklichen Koordinaten* $x_1 = x + u$, $y_1 = y + v$, $z_1 = z + w$ als unabhängige Variable einführt. Es sind jeweils statt der Differentiationen nach x, y, z die Differentiationen nach x_1, y_1, z_1 einzusetzen. Für die Trägheitskräfte bleibt die partielle Differentiation bestehen, weil in dem Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt}$$

bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung nur das Glied $\frac{\partial u}{\partial t}$ beizubehalten ist. Zugleich werden damit die Gleichungen in der Form dieselben, die *Cauchy* in seinen früheren Untersuchungen zur

Elastizitätslehre, ausgehend von Kontinuitätsvorstellungen über die Konstitution der Materie und unter direkter Einführung des Spannungsbegriffs (vgl. Nr. 3), erhalten hatte. Insbesondere aber hatte er dort in einer zweiten Annahme 21 Konstante als charakteristisch für den anisotropen Körper, 2 Konstante als charakteristisch für den isotropen Körper erhalten. Diese aber nur scheinbare Übereinstimmung mit der obigen Zahl der Konstanten verleitete *Cauchy* hier, die Natur der 6 bezw. *einen* Konstante ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$) in seinen Formeln zu verkennen, indem diese nicht wie die übrigen 15 bezw. *eine* oder die 21 bezw. 2 seiner früheren Untersuchungen durch die elastische Natur des Körpers bedingt sind, sondern noch mit der ursprünglichen Dichte ϱ multipliziert *Anfangsspannungen* darstellen, die z. B. infolge vorgängiger Deformation des Körpers vorhanden sein mögen. Sie verschwinden, wenn man als Ausgangspunkt den *natürlichen Zustand* wählt, der dadurch charakterisiert ist, dass keine äusseren Kräfte auf ihn wirken[16]).

3. Die Einführung der Spannungsgleichungen.

Man kann das Wesen des Ausgangspunktes der in Nr. 2 gegebenen Methoden zur Aufstellung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie dahin charakterisieren, dass dort für jedes *Körperteilchen* $x + u$, $y + v$, $z + w$ ein *Vektor* (der Kraftvektor) $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ als Funktion von Grössen erscheint, die die Deformation vollständig bestimmen. Demgegenüber wird nun bei den in vorliegender Nummer näher zu besprechenden Ableitungsmethoden für jeden *Raumpunkt* x_1, y_1, z_1 ein *Tensor* (die *Spannung* in dem Punkte) an die Spitze gestellt. Damit bleibt es dann zunächst unentschieden, ob man bei den weiteren Betrachtungen Kontinuitätsvorstellungen oder molekulartheoretische Anschauungen über die Konstitution der Materie voranstellen will. Es ist bei den meisten der neueren Autoren üblich und auch historisch das Erste, dass man bei Voranstellung des Spannungsbegriffs die Materie als kontinuierlich verteilt ansieht, indem es noch ein besonderes Problem ist, die Spannung in einem Punkte einer Fläche als Molekulardruck, bezogen auf die Flächeneinheit, aufzufassen und damit die molekulartheoretischen Vorstellungen zur Geltung zu bringen.

Es ist wichtig, gleich anfangs den Unterschied zu betonen, der in der Wahl der als unabhängig zu betrachtenden Variabeln besteht.

In der Litteratur tritt der Gegensatz oftmals nicht so scharf hervor,

16) Vgl. *R. Clausius*, Ann. Phys. Chem. 76 (1849), p. 50, der diese Sache ausdrücklich klarstellt, nachdem *G. Wertheim* bei seinen experimentellen Untersuchungen (vgl. hierüber IV 28, *L. Prandtl*) die beiden Arten *Cauchy*'scher Formeln promiscue benutzte; vgl. auch *B. de St.-Venant* in *Navier*, Résumé des leçons 2, Append. 5, Paris 1864.

indem gleich anfangs die Voraussetzung unterstellt wird, dass es sich um nur kleine Verschiebungen handelt, womit es bis auf Grössen zweiter Ordnung gleichgültig ist, ob man die augenblicklichen oder anfänglichen Koordinaten als unabhängig wählt. Insbesondere ist es oft üblich, zunächst die Spannungen auf den augenblicklichen Zustand, die Deformationskomponenten aber auf den anfänglichen Zustand zu beziehen, wodurch die Klarheit der Exposition sehr beeinträchtigt wird[17]. Es ist im folgenden im Anschluss an die ursprüngliche Darstellung *Cauchy*'s zugleich im Hinblick auf die bei endlicher Deformation nötig werdenden Entwickelungen versucht, den Unterschied, der in den beiden Auffassungen liegt, von vornherein klar hervortreten zu lassen.

3a. Der Spannungsbegriff und die Formänderung. Der *Spannungsbegriff* ist eine Schöpfung *Cauchy*'s[18], zu der er durch die Beobachtung geführt wurde, dass die von *Navier*[19] bei seiner Behandlung des Problems der Biegung von Platten eingeführten beiden Kräfte, von denen die eine durch Dehnung der Mittelebene, die andere durch die Biegung hervorgerufen wird, zu einer einzigen vereinigt werden können. Diese Kraft, die er *Spannung* (*pression* ou *tension; engl. stress*)[20] nennt, ist von der Natur des hydrostatischen Drucks der Flüssigkeiten, nur ist anzunehmen, dass die Spannung auch in schiefer Richtung auf die Fläche wirken kann und im übrigen auch von der Stellung der Fläche abhängt. *Cauchy* veröffentlichte seine Untersuchungen zuerst in einem Auszuge im Jahre 1822[18], der aber schon alles Wesentliche zur Aufstellung der Grundgleichungen enthält. Die näheren Ausführungen folgten erst einige Jahre später[21].

---

17) Vgl. dagegen *J. J. Weyrauch,* Theorie elastischer Körper, Leipzig 1884, p. 86.

18) *Cauchy* in einer Abhandlung vom 30. Sept. 1822: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques; vgl. Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 9.

19) *Navier,* Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques, Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 92. Die ausführliche Abhandlung wurde am 14. Aug. 1820 der Pariser Akademie vorgelegt. Als Rapporteur bestellt, nahm *Cauchy* Anlass, seine Vorstellungen über den Spannungsbegriff zu entwickeln.

20) Diese Bezeichnung wurde von *W. J. M. Rankine*, On axes of elasticity and crystalline forms, Lond. Phil. Trans. 146 (1856), p. 261 = Miscellanous scientific papers, London 1881, p. 120 eingeführt. *Rankine* gebraucht dort das Wort *stress* in dem Sinne eines Widerstandes, den der Körper einer Formänderung entgegengesetzt, während *Cauchy* unter *tension* und mit ihm *W. Thomson*, Math. and phys. papers 3, London 1890, p. 84 unter *stress* den Druckzustand versteht, der von außen auf den Körper ausgeübt wird.

21) Es kommen hier zunächst in Betracht die Abhandlungen: De la pression

An erster Stelle steht das bereits in Nr. 2 genannte *Drucktheorem*, das es gestattet, den Druck p in einem Punkte P eines Flächenelements dS, bezogen auf die Flächeneinheit, durch die Drucke auf drei durch den Punkt gehende zu einander rechtwinklige Ebenen auszudrücken:

$$8)\qquad \begin{cases} X_n = X_{x_1} \cos\alpha + X_{y_1} \cos\beta + X_{z_1} \cos\gamma, \\ Y_n = Y_{x_1} \cos\alpha + Y_{y_1} \cos\beta + Y_{z_1} \cos\gamma, \\ Z_n = Z_{x_1} \cos\alpha + Z_{y_1} \cos\beta + Z_{z_1} \cos\gamma, \end{cases}$$

(X_n, Y_n, Z_n sind die Komponenten des Drucks p nach den Axen x_1, y_1, z_1, $X_{x_1}, X_{y_1}, X_{z_1}$ die Komponenten des Drucks auf die zur x_1-Achse senkrechte Ebene nach den gleichen Axen, und entsprechend $Y_{x_1}, Y_{y_1}, Y_{z_1}$; $Z_{x_1}, Z_{y_1}, Z_{z_1}$, sämtlich bezogen auf die Flächeneinheit; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungscosinus der Normalen n des Flächenelements dS). Als Ergänzung hierzu folgt der *Reziprozitätssatz der tangentialen Spannungskomponenten:* der Druck in einem Punkte einer Ebene zerlegt nach der Normalen einer zweiten die erste Ebene rechtwinkelig schneidenden Ebene ist gleich dem Druck im gleichen Punkte auf die zweite Ebene zerlegt nach der Normalen der ersten Ebene. Hiernach reduzieren sich die 9 Druckkomponenten auf 6, indem

$$(9)\qquad X_{y_1} = Y_{x_1}, \quad X_{z_1} = Z_{x_1}, \quad Y_{z_1} = Z_{y_1}$$

werden.

Cauchy gewinnt diese Sätze, indem er die Bedingungen für das Gleichgewicht einmal eines kleinen Tetraeders, sodann eines kleinen Prismas gegenüber Drehung aufstellt und neben den Grössen zweiter Ordnung, die durch die Druckkräfte gegeben sind, die in diesen Bedingungen als Grössen dritter Ordnung auftretenden Massenkräfte $\varrho_1 X dx_1 dy_1 dz_1$, $\varrho_1 Y dx_1 dy_1 dz_1$, $\varrho_1 Z dx_1 dy_1 dz_1$ vernachlässigt. Hierbei ist über die Grösse der Spannungen keinerlei Voraussetzung gemacht.

Damit ist die Grundlage für die weiteren in der Analyse des Spannungsbegriffs auftretenden Hauptsätze (Existenz dreier Hauptdrucke, Existenz eines Spannungsellipsoids u. s. w.) gegeben, worüber das Referat von *M. Abraham* (IV 14 Nr. **19**) zu vergleichen ist.

Neben dieser Analyse des Spannungsbegriffs steht die Analyse

---

ou tension dans un corps solide, Exerc. de math. 2 (1827), p. 42 = Oeuvres (2) 7, p. 60. Sur la condensation et la dilatation des corps solides, ebd. p. 60 = Oeuvres (2) 7, p. 82. Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices, ebd. p. 108 = Oeuvres (2) 7, p. 141. Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique, Exerc. de

des Begriffs der *Formänderung* (Deformation; engl. *strain*)[22]), die in jedem Punkte des Raumes ebenfalls einen Tensor festlegt. *Cauchy* entwickelt diesen Begriff zunächst für beliebige Verschiebungen u, v, w, die er ebenso wie die Spannungskomponenten als Funktionen der augenblicklichen Koordinaten ansieht. Aber er geht dann bald zu der Annahme nur kleiner Verschiebungen und kleiner Formänderungen, d. h. solcher, bei welcher die relativen Längenänderungen und die Winkeländerungen eines kleinen Prismas so kleine Werte besitzen, dass ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden können, über. Er findet, dass dann die Formänderung durch die 6 Komponenten

$$(10)\quad \begin{cases} e_{x_1}=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \quad e_{y_1}=\dfrac{\partial v}{\partial y_1}, \quad e_{z_1}=\dfrac{\partial w}{\partial z_1}, \\ g_{y_1z_1}=\dfrac{\partial v}{\partial z_1}+\dfrac{\partial w}{\partial y_1}, \quad g_{z_1x_1}=\dfrac{\partial w}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u}{\partial z_1}, \quad g_{x_1y_1}=\dfrac{\partial u}{\partial y_1}+\dfrac{\partial v}{\partial x_1} \end{cases}$$

gegeben ist. Hier bedeuten die „Dehnungen" $e_{x_1}, e_{y_1}, e_{z_1}$ die relativen Längenänderungen der augenblicklich in die Richtung der x_1, y_1, z_1-Axe fallenden Geraden, die „Gleitungen" $g_{x_1z_1}, g_{z_1x_1}, g_{x_1y_1}$ die Verkleinerungen der rechten Winkel, die diese Geraden augenblicklich einschliessen[22]). Die Beziehungen (10) bleiben dieselben, wenn man statt der augenblicklichen die ursprünglichen Koordinaten als unabhängige Variable einführt.

Auch hier zeigt *Cauchy* die Existenz der Hauptdilatationen, des Formänderungsellipsoides u. s. w., worüber wieder das Referat von *M. Abraham* (IV 14, Nr. **17** und **18**) zu vergleichen ist.

3b. Die Spannungsgleichungen. Als Spannungsgleichungen bezeichnet man die Bedingungen, die ausdrücken, dass ein aus dem unter Massen- und Oberflächenkräften im Gleichgewicht befindlichen deformierten Körper herausgeschnittenes kleines Prisma unter dem Einfluss der auf sein Inneres wirkenden Massenkräfte und der auf seine Oberflächen wirkenden Spannungen sich *wie ein starrer Körper* im Gleichgewicht befinden muss[24]). Bezeichnet ϱ_1 die Dichte

22) *W. J. M. Rankine,* Laws of elasticity of solid bodies, Cambr. and Dubl. Math. J. 6 (1851), p. 47 = Misc. sc. papers, p. 68.

23) *Cauchy,* Exerc. de math. 2 (1827), p. 108. *Cauchy* sagt (Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 9), dass die Aufstellung der Grundgleichungen von vornherein sein Ziel gewesen sei, dass dazu aber sein Theorem über die Drucke, das er gleich im Anfang besessen, nicht ausgereicht habe. Die Spannungsgleichungen erst geben den Weg, die Aufstellung der Grundgleichungen (in den Verschiebungen) zu leisten.

24) Über dies „physikalische Axiom" vergleiche *W. Thomson* and *P. G. Tait,* Treatise on natural philosophy 2, Cambridge 1883, p. 110.

im Punkte x_1, y_1, z_1, so ergeben die Bedingungen für Gleichgewicht gegenüber Verschiebung die Spannungsgleichungen in der Form:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_{x_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_{y_1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial X_{z_1}}{\partial z_1} + \varrho_1 X = 0, \\ \dfrac{\partial Y_{x_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Y_{y_1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial Y_{z_1}}{\partial z_1} + \varrho_1 Y = 0, \\ \dfrac{\partial Z_{x_1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Z_{y_1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial Z_{z_1}}{\partial z_1} + \varrho_1 Z = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungen für das Gleichgewicht gegen Rotation um Axen, die jeweils den Koordinatenaxen parallel sind, ergeben die in voriger Nr. **3**a erwähnte Reduktion der 9 Spannungskomponenten auf 6, also nichts Neues, wenn man von vornherein von 6 Spannungskomponenten ausgeht[25]).

Treten Trägheitskräfte auf, so sind die rechten Seiten in den Gleichungen (11) durch $\varrho_1 \frac{d^2 u}{dt^2}$, $\varrho_1 \frac{d^2 v}{dt^2}$, $\varrho_1 \frac{d^2 w}{dt^2}$ zu ersetzen, wobei zu beachten, dass, so lange die Verschiebungen nicht klein sind, ihre Ersetzung durch $\varrho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\varrho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\varrho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ nicht zulässig ist (vgl. Nr. **6**).

In dieser Form sind die Spannungsgleichungen einmal von *Cauchy*[23]) aufgestellt, später immer wieder abgeleitet worden, besonders nachdem sie von *S. D. Poisson*[26]), *G. Lamé* und *E. Clapeyron*[27]) in ihre grundlegenden Arbeiten zur Elastizitätstheorie, sowie auch von *G. Lamé*[28]) in sein Lehrbuch aufgenommen waren. Dabei ist aber von *Poisson* der Unterschied, der durch die jeweilige Wahl der unabhängigen Veränderlichen bedingt ist, etwas verwischt worden. In der Tat bezieht *Poisson*[29]) die Spannungsgleichungen zunächst auf den anfäng-

---

25) Dies gilt nur unter der Voraussetzung, dass keine körperlichen Drehmomente, sowie keine durch Oberflächenkräfte hervorgerufene Drehmomente vorhanden sind. Dass letztere existieren, ist nicht anzunehmen, dagegen könnten erstere durch elektromagnetische Kräfte hervorgerufen werden; vgl. daher die allgemeineren Ansätze bei *W. Voigt,* Gött. Abh. 1887, p. 1 und Kompendium der theoret. Physik 1, Leipzig 1895, p. 223.

26) *S. D. Poisson,* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 357 (vom 14. April 1828) und Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides, J. éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 1 (vom 12. Okt. 1829).

27) *G. Lamé* und *E. Clapeyron,* J. f. Math. 7 (1831), p. 130 und Paris Mém. prés. par div. sav. 4 (1833), p. 465 (vom 29. Sept. 1828).

28) *G. Lamé,* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852.

29) *Poisson,* Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 387 und J. éc. polyt. 20 (1831), p. 54.

lichen Zustand:

$$(11')\quad \begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X = 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z = 0. \end{cases}$$

Damit werden jetzt die Grössen $X_x, \dots Z_z$ (im deformierten Zustande) Spannungskomponenten, bezogen auf die Flächeneinheit im anfänglichen Zustande, und für Flächenelemente, die im anfänglichen Zustande senkrecht zu den Axen x, y, z standen. Obwohl nun *Poisson* die Annahme nur kleiner Deformationen einführt, ergeben sich in seinen Formeln — zunächst für den isotropen Fall — die $X_x, \dots Z_z$ nicht als Spannungskomponenten im früheren Sinne für die im augenblicklichen Zustande zu den Axen x_1, y_1, z_1 senkrecht stehenden Ebenen, womit auch ihre Reduktion auf nur 6 verschiedene Komponenten nicht erfolgt. Dies geschieht erst durch Nullsetzen einer Konstanten $\bar{k}$ (vgl. Nr. 4b), was darauf hinausläuft, dass *Poisson* zunächst von einem vom natürlichen Zustand verschiedenen Gleichgewichtszustand ausgeht, in dem die Anfangsspannung $\mathfrak{X}\varrho = \bar{k}$ vorhanden ist.

Nach einer anderen Seite findet sich zuerst bei *Poisson*[30]) eine Ergänzung der vorstehenden Ableitung der Spannungsgleichungen. Er zeigt, dass die Spannungsgleichungen zusammen mit den aus *Cauchy*'s Drucktheorem herzuleitenden Oberflächenbedingungen

$$(8')\quad \begin{aligned} \bar{X} &= X_{x_1} \cos\alpha + X_{y_1} \cos\beta + X_{z_1} \cos\gamma, \\ \bar{Y} &= X'_{y_1} \cos\alpha + Y_{y_1} \cos\beta + Y_{z_1} \cos\gamma, \\ \bar{Z} &= X'_{z_1} \cos\alpha + Y_{z_1} \cos\beta + Z_{z_1} \cos\gamma \end{aligned}$$

nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen für das Gleichgewicht eines beliebigen endlichen Teiles eines elastischen Körpers sind. In der Tat ergiebt die Multiplikation der Gleichungen (11) mit dem Volumelement $dk = dx_1\, dy_1\, dz_1$ und Anwendung partieller Integration den für das Gleichgewicht eines Körpers als Ganzes notwendigen *Schwerpunkts-* und *Flächensatz*:

$$\iiint \varrho_1 X\, dx_1\, dy_1\, dz_1 + \iint \bar{X}\, dS = 0,$$

. . . .

. . . .

30) *Poisson,* Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 392. In gleicher Weise bei *Lamé,* Élasticité, p. 22—25.

und

$$\iiint \varrho_1 (z_1 Y - y_1 Z) dx_1 dy_1 dz_1 + \iint (z_1 \overline{Y} - y_1 \overline{Z}) dS = 0,$$

. . . .

Darnach ist es neuerdings, zuerst vielleicht durch *G. Kirchhoff*[31]) eingeführt, üblich geworden, diese Sätze voranzustellen und aus der Forderung ihrer Gültigkeit für jeden beliebigen Teil des Körpers umgekehrt entweder durch direkte Anwendung auf ein kleines Tetraeder und Prisma die Gleichungen (8) und (11) oder unter Heranziehung des *Cauchy*'schen Drucktheorems und Benutzung partieller Integration (der sog. *Green*'schen Transformation) die Spannungsgleichungen abzuleiten[32]).

Die Bedeutung der Spannungsgleichungen, die Bedingungen anzugeben, unter denen sich Massenkräfte und Oberflächenkräfte an einem starren Körper das Gleichgewicht halten, hat *G. Piola*[33]) in einer Form zum Ausdruck zu bringen versucht, die noch der näheren Nachprüfung bedarf. Er geht vom deformierten Körper aus, der unter gewissen Massenkräften X, Y, Z und Oberflächenkräften $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ als starrer Körper im Gleichgewicht ist. Indem er das Prinzip der virtuellen Verrückungen heranzieht und ausdrückt, dass die Verschiebungen δu, δv, δw als Funktionen von x_1, y_1, z_1 der Bedingung unterworfen sind, dass die Variation des Quadrats des

---

31) *G. Kirchhoff,* Mechanik, 2. Aufl., 1877, p. 110f. (Es ist in der Elastizitätstheorie oft schwer festzustellen, von wem zuerst ein Theorem in einer bestimmten Fassung zuerst gegeben bezw. bewiesen ist. Es ist hier *G. Lamé*'s Beispiel leider gar zu oft nachgeahmt worden, die Quellen nur unvollkommen zu zitieren. Eine Ausnahme bildet *B. de St.-Venant,* der allen seinen Arbeiten ausführliche litterarische Nachweise zufügt. Übrigens meint *Lamé* (Élasticité, p. 25): *D'ailleurs la plupart de ces idées se présentent si naturellement, qu'elles appartiennent à tous.*) Im übrigen vgl. z. B. *W. Voigt,* Kompendium der theoretischen Physik 1, Leipzig 1895, p. 221; *P. Appell,* Traité de mécanique rationelle 3, Paris 1903, p. 119 und *A. E. H. Love,* Treatise on the mathematical theory of elasticity, 2. Aufl., Cambridge 1906, p. 74 = Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907, p. 99.

32) Bei dieser Ableitung sind dann die Betrachtungen des kleinen Prismas und Tetraeders vermieden, da es gelingt, das *Cauchy*'sche Drucktheorem aus der Bedingung, daß $\delta \iint X_n dS, \ldots$ identisch verschwindet, abzuleiten. (*C. Carathéodory.*)

33) *G. Piola,* Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione, Modena Mem. 24, parte 1 (1848) p. 1 (vom 6. Oct. 1845). Vgl. auch *P. Duhem,* Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique, Paris 1891, p. 38.

Linienelements

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$$

gleich Null ist, die sich durch die sechs Bedingungen

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta w}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta w}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta v}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial z_1} + \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u}{\partial y_1} = 0$$

ausdrückt, erhält er unter Einführung von sechs *Lagrange'schen Multiplikatoren*:

$$X_{x_1}, \quad Y_{y_1}, \quad Z_{z_1}, \quad X_{y_1}, \quad Y_{z_1}, \quad Z_{x_1},$$

als Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen

$$(12)\begin{cases} \iiint \varrho_1 (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dx_1 dy_1 dz_1 \\ + \iint (\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w)\, dS \\ - \iiint \left(X_{x_1} \partial \frac{\delta u}{\partial x_1} + \cdots + X_{y_1}\left(\partial \frac{\delta v}{\partial x_1} + \partial \frac{\delta u}{\partial y_1}\right)\right) dx_1 dy_1 dz_1 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen dann in der üblichen Anwendung partieller Integration die drei Spannungsgleichungen in der Form (11) und die drei an der Oberfläche zu erfüllenden Bedingungen.

Es ist hiernach die Aufstellung der Spannungsgleichungen ein Kapitel der Mechanik starrer Körper, sobald man dort neben Massenkräften auch Oberflächenkräfte einführt. In herkömmlicher Weise wird es aber dort nicht behandelt (vgl. jedoch IV 6, Nr. **26**, *P. Stäckel*), weil die aufgestellten Spannungsgleichungen nicht ausreichen, die Spannungskomponenten wirklich zu bestimmen, indem das Problem statisch unbestimmt bleibt. Es ist hier das gleiche Verhältnis wie in der Statik der kinematisch überbestimmten Fachwerke mit $m = 3n - 6 + p$ Stäben, die p-fach statisch unbestimmt sind. Die Bestimmung leistet die Elastizitätstheorie, indem sie eine Beziehung zwischen den Spannungskomponenten und den Deformationsgrössen (z. B. durch das *Hooke*'sche Gesetz, vgl. Nr. 4) einführt.

Diese vorläufige Unbestimmtheit der Spannungen hat nun im weiteren Verlaufe dazu geführt, die Aufstellung der Spannungsgleichungen immer nur als einen ersten Schritt zur Gewinnung der Grundgleichungen der Elastizität in den Verschiebungen u, v, w aufzufassen. Man kann aber ihre Bedeutung auch selbständiger fassen, indem man sich die Frage vorlegt, ob es nicht möglich ist, den Spannungszustand in einem elastischen Körper direkt zu bestimmen und hinterher erst aus den zwischen Spannung und

Deformation bestehenden Relationen die Verschiebungen zu finden. Damit wird nicht die Aufstellung der Grundgleichungen, sondern ihre Integration in zwei Schritte zerlegt. Diese Ergänzung der Spannungsgleichungen zu einem vollständigen System von Gleichungen, das die Spannungen in einem elastischen Körper vollkommen bestimmt, gelingt nun in der Tat durch Berücksichtigung der für die Formänderungskomponenten bestehenden sogenannten *Kompatibilitätsbedingungen.*

Diese Kompatibilitätsbedingungen (vgl. IV 14, Nr. **18**, *M. Abraham*) drücken die Bedingungen aus, denen die sechs Deformationskomponenten $e_x, e_y, e_z, g_{zx}, g_{zy}, g_{xy}$ als Funktionen von x, y, z zu genügen haben, damit sich drei Verschiebungskomponenten $u(xyz)$, $v(xyz)$, $w(xyz)$ so finden lassen, dass bei sogenannter unendlich kleiner Deformation die Gleichungen (10)

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, g_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

bestehen. Diese Bedingungen erhalten die Form

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 2\,\dfrac{\partial^2 e_x}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial g_{zx}}{\partial y} + \dfrac{\partial g_{xy}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Sie ergeben nach Einführung einer Annahme über die Abhängigkeit der Spannungen von den Deformationsgrößen sechs parallele Gleichungen für die Spannungskomponenten, die zusammen mit den drei Spannungsgleichungen (11′) das vollständige System für die Spannungskomponenten geben (vgl. IV 24, Nr. 7a, *O. Tedone*).

G. B. Airy[34]) hat die vorläufige Unbestimmtheit der Spannungskomponenten noch in einer anderen Form zum Ausdruck gebracht. Für den besonderen Fall des ebenen Problems unter Ausschluss von Massenkräften bemerkt er, daß die Spannungsgleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0$$

durch Einführung einer zunächst willkürlichen Funktion χ, der sogenannten *Spannungsfunktion*, durch den Ansatz

34) *G. B. Airy*, Brit. Ass. Rep. 1862, p. 82, und Lond. Phil. Trans. 153 (1863), p. 49. *Airy* hat hier die aus den Kompatibilitätsbedingungen hervorkommende Bedingungsgleichung für χ übersehen.

$$(14)\qquad X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2},\quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y},\quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

identisch erfüllt werden. Für χ ergiebt dann die Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingung eine Differentialgleichung 4. Ordnung $\Delta\Delta\chi = 0$. Für das räumliche Problem gab *J. Cl. Maxwell*[35]) den gleichen Ansatz unter Benutzung von drei Spannungsfunktionen[36])

$$(15)\quad \begin{cases} X_x = \dfrac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2},\quad Y_y = \dfrac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \chi_3}{\partial x^2},\quad Z_z = \dfrac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2}, \\ X_y = -\dfrac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial y},\quad X_z = -\dfrac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \partial x},\quad Y_z = -\dfrac{\partial^2 \chi_1}{\partial y \partial z}. \end{cases}$$

Die Bestimmung der χ erfolgt wieder unter Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingungen[37]) (vgl. IV 24. Nr. 7a, *Tedone*).

4. Beziehungen zwischen den Spannungen und Deformationsgrössen.

Bei der Aufstellung dieser Beziehungen, die den zweiten Schritt zur Ableitung von Grundgleichungen in den Verschiebungen bedeuten bezw. die notwendig sind, um die Spannungsgleichungen zu einem vollständigen Gleichungssystem zu ergänzen (vgl. Nr. **3** b) scheiden sich streng die Auffassungen über den kontinuierlichen und molekularen Aufbau der Materie. Die Vertreter der ersteren Auffassung sind genötigt, besondere Prinzipien heranzubringen, die in letzter Instanz auf eine geeignete Interpretation oder Verallgemeinerung des zuerst von *R. Hooke*[38]) aufgestellten Gesetzes der linearen Abhängigkeit von Spannung und Formänderung hinauslaufen. Die Anhänger der molekularen Theorie dagegen suchen die lineare Abhängigkeit innerhalb des Bereiches, für den die abzuleitenden Gleichungen überhaupt Geltung haben, aus dem über die Molekularwirkungen angenommenen Gesetz zu beweisen. Das Prinzip hier ist in der Annahme gegeben, dass die Wirkungen, die zwei Punkte aufeinander ausüben, innerhalb der molekularen Wirkungssphäre stetige (analytische) Funktionen der Entfernung beider Punkte sind.

---

35) *J. Cl. Maxwell*, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 26 (1870), p. 27 = Scientific papers 2, p. 192.

36) Einen anderen Ansatz gab *G. Morera*, Roma Accad. dei Lincei Rend. (5) 1^1 (1892), p. 137, der auch den Fall von Massenkräften berücksichtigt. Im übrigen vgl. hierzu eine Interpretation der Spannungsgleichungen von *G. Morera*, Torino Rend. 20 (1885), p. 43.

37) Betreffs Einführung der Spannungsfunktionen vgl. auch *W. J. Ibbetson*, Mathematical theory of perfectly elastic solids, London 1887, p. 358.

38) *R. Hooke*, Lectures de potentia restitutiva of springs, explaining the power of springing bodies, London 1678.

4a. Direkte Annahme des Hooke'schen Gesetzes. Kontinuitätsvorstellungen. Das *Hooke*'sche Gesetz in seiner ursprünglichen Form (*Ut tensio sic vis*), zu dessen Aufstellung *R. Hooke* durch Versuche an Spiralfedern gelangte und das unabhängig auch von *E. Mariotte*[39]) beim Studium des Problems der Balkenbiegung gefunden, in der Folgezeit wiederholt durch Drillungs- und Biegungsversuche bestätigt wurde, ist einer vielseitigen Deutung möglich, je nachdem man die Bedeutung der Worte „tensio" und „vis" nimmt. Ursprünglich wohl nur die lineare Abhängigkeit einer Formänderung (tensio) und der Ursache (vis) festlegend, so dass auch das auf *Jacob Bernoulli*[40]) zurückgehende Gesetz von der Proportionalität der Krümmung eines gebogenen Stabes und dem auftretenden Biegungs-„Moment" nur eine geeignete Interpretation des *Hooke*'schen Gesetzes ist[41]), wurde es zuerst von *Th. Young*[42]) präzis formuliert. Für den speziellen Fall der Dehnung eines Stabes fasst er das Gesetz dahin, dass es die Konstanz des Verhältnisses der Zugbeanspruchung des Stabes und der hervorgebrachten Dehnung ausspricht,

$$X_x = E \cdot e_x,$$

wo nun E der sogenannte *Young*'sche Elastizitätsmodul ist. Herangezogen zur Aufstellung der Grundgleichungen in den Verschiebungen auf dem Umwege über die Spannungsgleichungen wurde das *Hooke*sche Gesetz zuerst wieder von *A. L. Cauchy*, allerdings nicht explicit und zunächst auch nicht in seiner allgemeinsten Ausgestaltung.

Hierbei ist nun die Beschränkung auf sogenannte unendlich kleine Deformationen wesentlich, da in diesem Falle die Spannungskomponenten ebenso wie die Deformationskomponenten ohne weiteres auf den anfänglichen Zustand des Körpers bezogen werden können. *Cauchy* selbst zwar denkt sich immer die augenblicklichen Koordinaten als unabhängige Variable, um stets aus dem deformierten auf den undeformierten Zustand schließen zu können. Die Voraussetzung der unendlich kleinen Deformation aber bedingt es, dass man ebensowohl diesen deformierten Zustand als neuen Anfangszustand

39) *E. Mariotte*, Traité du mouvement des eaux, Paris 1686.

40) *Jac. Bernoulli*, Acta eruditorum, Lipsiae 1691, p. 282 = Opera omnia 2, Genf 1744, Nr. 42, und die Abhandlung: Véritable hypothèse de la résistance des solides, Paris Mém. de l'Acad. 1705 = Opera omnia 2, Genf 1744, p. 976.

41) Man kann hier auch das von Mlle. *S. Germain* bei der Ableitung der Bewegungsgleichung der elastischen Platte benutzte Prinzip heranziehen (vgl. IV 25, Nr. 14a, *O. Tedone-A. Timpe*).

42) *Th. Young*, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts, London 1807, art. 13.

deuten und mit den *gleichen* Verschiebungen auf einen neuen deformierten Zustand schliessen und daher gleich von vornherein jeweils die Anfangskoordinaten als unabhängige Veränderliche wählen kann.

Im speziellen sind nun die Überlegungen zur Aufstellung der Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten und Deformationsgrössen folgende:

Cauchy[43]) schliesst für *isotrope* Körper aus der symmetrischen Verteilung der Drucke und Dilatationen um die Hauptdrucke und Hauptdilatationen, dass die Hauptdruckaxen mit den Hauptdilatationsaxen zusammenfallen, wobei es dann „natürlich" sei, anzunehmen, dass der Zusammenhang der entsprechenden Drucke und Dilatationen linear sei. Damit ergeben sich, wenn die auf die Hauptaxen bezüglichen Grössen jeweils durch einen horizontalen Strich ausgezeichnet werden, die Beziehungen:

$$\bar{X}_x = k\bar{e}_x, \quad \bar{Y}_y = k\bar{e}_y, \quad \bar{Z}_z = k\bar{e}_z$$

und für beliebige Axen:

$$(16) \quad \begin{cases} X_x = ke_x, \quad Y_y = ke_y, \quad Z_z = ke_z, \\ X_y = Y_x = \frac{k}{2} g_{xy}, \quad X_z = Z_x = \frac{k}{2} g_{zx}, \quad Y_z = Z_y = \frac{k}{2} g_{zy}. \end{cases}$$

Später modifizierte er[44]) diesen Ansatz dahin, dass er annimmt, die Hauptdrucke setzten sich aus zwei Summanden zusammen, von denen der erste der jeweiligen Hauptdilatation, der zweite der kubischen Dilatation $\Theta = e_x + e_y + e_z$ proportional sei. Damit werden obige Beziehungen

$$(17) \quad \begin{cases} X_x = ke_x + K\Theta, \quad Y_y = ke_y + K\Theta, \quad Z_z = ke_z + K\Theta, \\ X_y = Y_x = \frac{k}{2} g_{xy}, \quad X_z = Z_x = \frac{k}{2} g_{zx}, \quad Y_z = Z_y = \frac{k}{2} g_{zy}. \end{cases}$$ [45])

Cauchy bemerkt, dass man den Gleichungen (16) bezw. (17) noch willkürliche Konstante zufügen könne, wodurch die Spannungsgleichungen sich nicht ändern, so dass hier der Fall sich einfach addierender, d. h. an sich unbeträchtlicher Anfangsspannungen mit umfasst ist.

G. G. Stokes[46]) bringt zwar zunächst molekulartheoretische Be-

---

43) *Cauchy*, Bull. de la Soc. philom. 1823, ausgeführt in Exerc. de math. 3 (1828), p. 167ff.

44) *Cauchy*, Exerc. de math. 3 (1828), p. 178.

45) Den gleichen Ansatz macht *G. Kirchhoff*, Mechanik, 2. Aufl., Leipzig 1877, p. 122. Er wählt dort die Bezeichnungen: $2K$ für den Koeffizienten der linearen, $2k\theta$ für den Koeffizienten der kubischen Dilatation.

46) *G. G. Stokes*, On the theory of the internal friction of fluids in motion,

trachtungen zur Stütze der linearen Abhängigkeit der Spannungen und Deformationen heran, sagt dann aber, dass man den linearen Ansatz auch gleich von vornherein in der Form:

$$\overline{X}_x = C\bar{e}_x + C''(\bar{e}_y + \bar{e}_z), \ldots$$

postulieren könne, woraus sich sofort die Relationen (17) ergeben, die *Stokes* in der Form:

$$X_x = 2Be_x + \frac{A-2B}{3}\Theta, \ldots$$

$$X_y = Y_x = Bg_{xy}, \ldots$$

schreibt. Den gleichen Ansatz macht *Fr. Neumann*[47]), der mit anderer Bedeutung der Konstanten A und B setzt:

$$(18) \quad \begin{cases} \overline{X}_x = -(A-B)\,\bar{e}_x - B\Theta, \\ \overline{Y}_y = -(A-B)\,\bar{e}_y - B\Theta, \\ \overline{Z}_z = -(A-B)\,\bar{e}_z - B\Theta. \end{cases}$$

J. Cl. Maxwell[48]) hat die zweite *Cauchy*'sche Annahme etwas symmetrischer gefasst, indem er in Verallgemeinerung des *Hooke*'schen Gesetzes als „Resultate der Erfahrung“ die beiden Axiome aufstellt: 1) die Summe der Hauptspannungen ist proportional der Summe der Hauptdilatationen, 2) die Differenz zweier Hauptspannungen ist proportional der Differenz der entsprechenden Hauptdilatationen:

$$(19) \quad \begin{cases} \overline{X}_x + \overline{Y}_y + \overline{Z}_z = 3\mu\,\Theta, \\ \overline{X}_x - \overline{Y}_y = m\,(\bar{e}_x - \bar{e}_y), \\ \overline{Y}_y - \overline{Z}_z = m\,(\bar{e}_y - \bar{e}_z), \\ \overline{Z}_z - \overline{X}_x = m\,(\bar{e}_z - \bar{e}_x). \end{cases}$$

Für *anisotrope Körper* hat vielleicht zuerst *S. D. Poisson*[49]) den direkten Ansatz der linearen Abhängigkeit der Spannungen und De-

and of the equilibrium and motion of elastic solids, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1849), p. 287 (vom 14. Apr. 1845) = Math. and phys. papers 1, Cambr. 1880, p. 75.

47) *Fr. Neumann*, Theorie der Elastizität, p. 53. Hier ergiebt der Vergleich mit dem *Cauchy*'schen Ansatze $A - B = k$, $B = K$. Neuerdings hat sich die *Lamé*'sche Bezeichnungsweise (vgl. *Lamé*, Élasticité, p. 50) ziemlich allgemein durchgesetzt: wonach $k = 2\mu$ und $K = \lambda$ gesetzt wird.

48) *J. Cl. Maxwell*, Edinb. Roy. Soc. Trans. 20 (1853), p. 87 = Scientific papers 1, Cambr. 1890, p. 30 (vom 18. Febr 1850). Aus dem Vergleich der Beziehungen (17) und (19) folgt, dass $\mu = \frac{k+3K}{3}$ und $m = k$ ist.

49) *S. D. Poisson*, J. éc. polyt. 20 (1831), p. 82 (vom 12. Okt. 1829). *B. de Saint-Venant* vermutet, dass *Poisson* als notwendige Voraussetzungen für die

formationsgrössen gegeben. Er macht den Ansatz speziell so, dass er die Spannungskomponenten, für die er die Beziehungen $X_y = Y_x$, $Z_x = X_z$, $Y_z = Z_y$ als noch nicht bewiesen annimmt, als lineare homogene Funktionen der 9 Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}; \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}; \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

mit 81 Koeffizienten ansetzt. Die Überlegung, daß eine gemeinsame Rotation aller Elemente keine Spannungen hervorruft, reduziert die die Zahl auf $9 \times 6 = 54$, da jetzt in den Beziehungen die Kombinationen g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} der obigen 9 Größen auftreten; die Überlegung, dass die 9 Spannungskomponenten sich auf 6 reduzieren, ergiebt als Zahl der Konstanten $6 \times 6 = 36$, die *Poisson* als im allgemeinen voneinander verschieden ansieht. In ähnlicher Weise finden sich diese Beziehungen zwischen den Spannungs- und Deformationsgrössen auch bei *Cauchy*[50]). Er geht von der Tatsache aus, dass die Spannung in einem Punkte eine Funktion der dort herrschenden linearen Dilatation $\left(\frac{r_1 - r}{r}\right)$ ist, die selbst wieder als Funktion der 6 Deformationsgrössen $e_x, e_y, e_z; g_{xz}, g_{yz}, g_{xy}$ erscheint. Indem er nun annimmt, dass diese unbekannte Funktion wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Deformation nach Potenzen der Deformationsgrössen entwickelt werden könne, erhält er unter Beschränkung auf die linearen Glieder die gewünschten Relationen mit 36 Koeffizienten.

Dieselbe Schlussweise, aus der Kleinheit der Deformation die Linearität der Abhängigkeit von Spannung und Deformation zu begründen, findet sich z. B. auch bei *G. Lamé* und *A. Clebsch*[51]). Der Auffassung gegenüber, dass hiermit ein aprioristischer *Beweis* des *Hooke*'schen Gesetzes gegeben sei, hat *B. de Saint-Venant* zu wiederholten Malen darauf hingewiesen, dass durch mathematische Deduktion nie gezeigt werden kann, dass sich die Spannungen in den Formänderungen durch Potenzentwicklungen ausdrücken lassen, die gerade mit dem linearen Gliede beginnen, und dass das Gesetz eine *Annahme* sei, die durch die Erfahrung geprüft oder durch ein näheres Eingehen auf die molekulare Konstitution der Körper ihre Begründung finden müsse.

---

50) *Cauchy*, Exerc. de math. 4 (1829), p. 293.

51) *G. Lamé*, Elasticité, p. 36; *A. Clebsch*, Theorie der Elasticität fester Körper, Leipzig 1862, p. 35 = p. 38 der frz. Ausgabe.

52) *Navier*, De la résistance des corps solides, 3. éd. par *B. de Saint-Venant* 2, Paris 1864, Append. 5 und *A. Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides, trad. par *B. de Saint-Venant* et *A. Flamant*, Paris 188[illegible]

Neuerdings ist es üblich geworden, die erstere Alternative zu wählen und die Begründung des Proportionalitätsgesetzes direkt auf das Experiment zu stützen, bei dem es bis zu gewissen Grenzen sich als richtig erwiesen hat. In welchem Umfange dies zutrifft, wird in dem Referate von *L. Prandtl* (IV 28) weiter erörtert werden. Eins der wichtigsten Argumente für das Proportionalitätsgesetz hat *G. G. Stokes*[53]) durch den Hinweis gegeben, dass sich alle festen Körper in den Zustand isochroner Schwingungen setzen lassen. Doch vergleiche auch hier die Kritik von *B. de Saint-Venant*[54]).

Auf demselben Prinzip des direkten linearen Ansatzes beruhen auch *Cauchy*'s[55]) Entwicklungen der Ausdrücke für die Spannungekomponenten in einem Körper, der *beträchtlichen Anfangsspannungen* unterworfen ist. Er setzt zunächst die 6 Spannungskomponenten als lineare Funktionen der 6 Deformationsgrössen und der 3 Komponenten der „mittleren Rotation"

$$2r_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad 2r_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad 2r_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

mit $6 \times 9 + 6 = 60$ Koeffizienten an. Da eine gemeinsame Translation und Rotation aller Elemente keine Spannung hervorruft, erfolgt die Reduktion der 6 Beziehungen auf folgende:

$$(20)\qquad \begin{cases} X_x^a = \mathfrak{a} + 2\mathfrak{e} r_y - 2\mathfrak{f} r_z + X_x, \\ Y_y^a = \mathfrak{b} + 2\mathfrak{f} r_z - 2\mathfrak{d} r_x + Y_y, \\ Z_z^a = \mathfrak{c} + 2\mathfrak{d} r_x - 2\mathfrak{e} r_y + Z_z, \\ Y_z^a = \mathfrak{d} - (\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) r_x - \mathfrak{f} r_y + \mathfrak{e} r_z + Y_z, \\ Z_x^a = \mathfrak{e} - (\mathfrak{a} - \mathfrak{c}) r_y - \mathfrak{d} r_z + \mathfrak{f} r_x + Z_x, \\ X_y^a = \mathfrak{f} - (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) r_z - \mathfrak{e} r_x + \mathfrak{d} r_y + X_y, \end{cases}$$

mit $6 + 36 = 42$ Koeffizienten, da die Spannungen $X_x, \ldots, X_y$ 6 homogene Funktionen der 6 Deformationsgrössen sind[56]). Hier haben die 6 Anfangsspannungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ den 3 Spannungsgleichungen (11') zu genügen. *Cauchy* bemerkt, dass diese Gleichungen mit anderen zusammenfallen, die er früher ausgehend von molekulartheoretischen Vorstellungen (vgl. Nr. 4b) gewonnen habe, wenn man bestimmte

---

53) Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1849), p. 311 = Math. and phys. papers 1, Cambridge 1880, p. 75.

54) *Navier*, De la résistance des corps solides, 3. éd. 2, App. 5, p. 720.

55) Exerc. de math. 4 (1829), p. 303.

56) Es ist wesentlich, zu bemerken, dass die Koeffizienten der $X_x, \ldots Z_z$ auch von den Anfangsspannungen abhängen. Die Form ihrer Abhängigkeit kann der direkte Ansatz nicht geben.

Relationen zweischen den $6 + 36$ Koeffizienten zulässt, wodurch diese sich auf $6 + 15$ reduzieren.

4b. Molekulartheoretische Herleitung des Hooke'schen Gesetzes. Das *Hooke*'sche Gesetz erhält insofern seine Herleitung bei Voranstellung molekulartheoretischer Auffassungen über die Konstitution der Materie, als mit der Annahme des Prinzipes der stetig mit der Entfernung variierenden Molekularkraft die kleinen Änderungen derselben bei einer kleinen Deformation in erster Annäherung durch lineare Abhängigkeit von der Entfernungsänderung gegeben sind und damit bei geeigneter Definition der Spannung als Molekulardruck diese eine lineare Funktion der Deformationsgrössen wird.

Die Definition der *Spannung als Molekulardruck* rührt von *S. D. Poisson* her[57]), der sofort nach Aufstellung des Begriffs der Spannung in einem Punkte und der Spannungsgleichungen durch *Cauchy* versuchte, diesen neuen Zweig der Mechanik durch Anknüpfung an die von *Laplace* übernommenen Vorstellungen über die Wirkungsweise der Molekularkräfte in seiner Weise zu einer *Mécanique physique* umzuwandeln. *Poisson* definiert den Druck auf eine Fläche folgendermassen: Der Druck in einem Punkte P ist die Resultierende aller Kräftewirkungen bezogen auf die Flächeneinheit, die von den Molekülen der einen Seite der durch das Flächenelement ΔS gelegten Ebene auf alle Moleküle in einem über dem Flächenelement ΔS nach der anderen Seite errichteten geraden Zylinder ausgeübt werden, d. h. es wird in der in Nr. 2 gewählten Bezeichnungsweise

$$(21)\quad \begin{cases} X_n = \dfrac{1}{\Delta S}\, \mathrm{S} m^0\, \mathrm{S} m f(r)\,\alpha, \\[2mm] Y_n = \dfrac{1}{\Delta S}\, \mathrm{S} m^0\, \mathrm{S} m f(r)\,\beta, \\[2mm] Z_n = \dfrac{1}{\Delta S}\, \mathrm{S} m^0\, \mathrm{S} m f(r)\,\gamma. \end{cases}$$

In dieser Form ist die Definition bald von *Cauchy* bei seinen zahlreichen Untersuchungen über Molekularphysik, von *G. Lamé* und *E. Clapeyron* in ihrer gemeinsamen Abhandlung vom Jahre 1828 und vielleicht wieder durch *G. Lamé*'s Einfluss in die allgemeine Lehrbuchlitteratur übernommen. Auf das Unzureichende dieser Definition haben *J. C. M. Duhamel* und *B. de Saint-Venant*[58]) hingewiesen, indem sie

57) Vgl. *S. D. Poisson*, Mémoire (vom 14. April 1828) sur l'équilibre et le mouvement des corps solides, Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 357, dessen Einleitung schon vorher in Ann. phys. chim. 37 (1828), p. 337 gedruckt wurde.

58) *J. C. M. Duhamel* in einer unveröffentlichten Note; *B. de Saint-Venant*, L'Institut 12 (1844), p. 12 oder Paris C. R. 21 (1845), p. 24, der hier

zeigen, dass bei polyedrischer Gestalt des Körpers der Druck auf die Oberfläche nicht einfach die Wirkung der außenliegenden auf die innenliegenden Moleküle ist, da hierbei gewisse Molekularwirkungen doppelt, andere nicht gezählt werden. *B. de Saint-Venant* gibt deshalb eine andere Definition des Molekulardrucks, die dann auch von *Cauchy*[59]) angenommen wurde, wonach der Druck in einem Punkte P eines Flächenelements die Resultierende aller Kräfte ist, deren Wirkungslinie dieses Flächenelement schneiden. Die Resultierende wird im Punkte P gebildet, damit resultierende Drehmomente ausgeschlossen sind. Diese Resultierende wird ersetzt durch die Resultierende der Kraftwirkungen, die auf die Moleküle m auf der einen Seite des Flächenelements ΔS von einer in dessen Mittelpunkt konzentrierten Masse M wirken, wo M für jedes Molekül m gleich der Masse eines Zylinders (auf der entgegengesetzten Seite von ΔS) mit einer Seitenlänge gleich der Entfernung r des Moleküls m von ΔS ist. Der Druck in Richtung s auf die Einheit eines Flächenelements mit der Normalen n wird damit:

$$(22)\qquad p_{ns} = \varrho \, \mathfrak{S} \, \frac{m}{2} r f(r) \cos(r, n) \cdot \cos(r, s),$$

(ϱ ist die Dichte des Zylinders). Hier ist die sechsfache Summation in den Gleichungen (21) einer dreifachen gewichen, die wegen Einführung des Faktors $\frac{1}{2}$ über alle m zu beiden Seiten von ΔS zu erstrecken ist. Diese Formel des Druckes kann nun allen weiteren Überlegungen der Molekularmechanik zu Grunde gelegt werden, da sich alle aufzustellenden Sätze über die Drucke als Folgerungen aus dieser Formel ergeben[60]).

Poisson wendet im Falle der Isotropie in seiner ersten Arbeit[61]) die Formel (22), für deren Herleitung er eine etwas andere Anordnung giebt, nur auf den deformierten Zustand an. Hierbei ist aber seine Darstellung durch den schon erwähnten Umstand (vgl. Nr. 3b) etwas beeinträchtigt, daß er die Spannungskomponenten für Flächen-

---

Schon *Poisson* war gelegentlich auf das Unzulängliche seiner Definition aufmerksam geworden. Vgl. J. éc. polyt. 20 (1831), art. 49—53.

59) *Cauchy*, Paris C. R. 20 (1845), p. 1765 und 21 (1845), p. 125.

60) Vgl. *B. de Saint-Venant* in *Navier,* De la résistance des corps solides, 2, App. 3, p. 565 (Anm. zu § 23) und in *Moigno*, Leçons de mécanique analytique, Statique, Paris 1868, p. 673—675.

61) *Poisson*, Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829). Hier hat *Poisson* rechterhand in den Gleichungen (22) das negative Zeichen, das er später in das positive änderte. Vgl. auch die Wiedergabe der *Poisson*'schen Darstellung bei *Fr. Neumann*, Theorie der Elastizität, p. 67 ff.

elemente berechnet, die im anfänglichen Zustande senkrecht zu den Axen stehen. Sein erstes Resultat sind die den Formeln (21) entsprechenden Gleichungen:

$$(21') \quad \begin{cases} X_n = \frac{m^0}{\delta^3} \mathsf{S}\, m \Delta z_1 f(r_1) \frac{\Delta x_1}{r_1}, \\ Y_n = \frac{m^0}{\delta^3} \mathsf{S}\, m \Delta z_1 f(r_1) \frac{\Delta y_1}{r_1}, \\ Z_n = \frac{m^0}{\delta^3} \mathsf{S}\, m \Delta z_1 f(r_1) \frac{\Delta z_1}{r_1}, \end{cases}$$

wo δ der mittlere Molekülabstand im anfänglichen Zustand, also $\frac{m^0}{\delta^3} = \varrho$ die anfängliche Dichte ist und im übrigen die Bezeichnungsweise von Nr. 2b gewählt ist. Die Summation ist über alle m oberhalb der xy-Ebene zu erstrecken. Die weitere Behandlung dieser Ausdrücke ist die gleiche wie die der Gleichungen (5) in Nr. 2b, nur führt *Poisson* Polarkoordinaten ein, um die Summationen über die Winkel durch Integrationen[62]) ersetzen zu können. Er erhält so, indem er successive das Flächenelement senkrecht zu den drei Axen x, y, z annimmt, für die Spannungskomponenten die Ausdrücke:

$$(23) \quad \begin{cases} X_x = \bar{k}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + k\left(3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ X_y = \bar{k}\frac{\partial v}{\partial x} + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ X_z = \bar{k}\frac{\partial w}{\partial x} + k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Y_x = \bar{k}\frac{\partial u}{\partial y} + k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ Y_y = \bar{k}\left(1 + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ Y_z = \cdots, \\ Z_x = \bar{k}\frac{\partial u}{\partial z} + k\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ Z_y = \cdots, \\ Z_z = \cdots, \end{cases}$$

wo

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{3} \sum \frac{r^3}{\delta^5} f(r) \quad \text{und} \quad k = \frac{2\pi}{15} \sum \frac{r^5}{\delta^5} \frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right).$$

62) *Poisson* hält dies für erlaubt, da er die Annahme macht, dass die Zahl der Moleküle in der molekularen Wirkungssphäre so gross ist, dass die unregelmässige Wirkung der in nächster Nähe liegenden Moleküle gegen die Wirkung der ferner liegenden nicht in Betracht kommt. In seiner zweiten Abhandlung (J. éc. polyt. 20 [1831]) behält er diese Annahme bei, ersetzt aber die Summationen nach den Winkeln nicht durch Integrationen.

Poisson verfolgt nun die eigentliche Bedeutung der Ausdrücke (23) erst in seiner zweiten Arbeit[62]). Er zeigt hier, wie sich die Spannungskomponenten für Flächenelemente berechnen, die auf den augenblicklichen Koordinatenaxen x_1, y_1, z_1 senkrecht stehen und auch auf die Einheit dieses Flächenelementes bezogen sind. Er findet so:

$$(23')\left\{\begin{aligned} X_{x_1} &= \bar{k}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\qquad + k\left(3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ X_{y_1} &= Y_{x_1} = X_y = Y_x = (\bar{k}+k)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ X_{z_1} &= Z_{x_1} = X_z = Z_x = (\bar{k}+k)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), \end{aligned}\right.$$

mit drei weiteren Gleichungen, so daß sich hier tatsächlich die Spannungskomponenten auf sechs reduzieren. In seiner ersten Abhandlung erhält er diese Reduktion nur, indem er auf den natürlichen Zustand zurückgreift, für den aus den Spannungsgleichungen $\bar{k} = 0$ folgt. Hiermit verschliesst er sich aber die Einsicht in die Natur der Grösse $\bar{k}$.[63]) Er folgert zunächst nur, daß die Bedingung $\bar{k} = 0$ die andere

$$\sum r^3 f(r) = 0$$

fordere, d. h. die Verteilung der Moleküle im natürlichen Zustand derart sein muss, dass für die Molekularwirkung obige Bedingung erfüllt ist. Wieso aber dies ein möglicher Gleichgewichtszustand ist, zeigt *Poisson* indessen nicht. Zugleich findet er hier den Stützpunkt für seine Kritik des *Navier*'schen Ansatzes; indem er statt der Summation über r die Integration von 0 bis ∞ einführt, zeigt sich, dass die Bedingung $\bar{k} = 0$ auch $k = 0$ erfordert, so dass danach im deformierten Zustande ebenfalls keine Spannung vorhanden sei. *Poisson* schliesst, dass daher die Integration unerlaubt sei, wie denn überhaupt die für kontinuierliche Auffassung über die Konstitution der Materie ausgebildeten Methoden der *Mécanique analytique*, insbesondere die Variationsrechnung, für die Betrachtungsweisen der *Mécanique physique*

---

63) Erst die zweite Arbeit (J. éc. polyt. 20 [1831]), in der unter Vermeidung der Integration für die Konstanten $\bar{k}$ und k die Werte

$$\bar{k} = \frac{1}{6\,\delta^3}\sum r f(r), \quad k = \frac{1}{30\,\delta^3}\sum r^3 \frac{d}{dr}\left(\frac{f(r)}{r}\right)$$

abgeleitet werden, bringt die Erkenntnis, dass $\bar{k}$ eine Anfangsspannung ist. In der Tat fallen die Gleichungen (23') mit den früher von *Cauchy* entwickelten (20') zusammen (vgl. unten).

keine Anwendung finden könnten. Wie *Clausius* diese Schwierigkeit löst, wurde schon oben in Fussn. 8 erwähnt[64]).

Noch ehe *Poisson* seine Untersuchungen über die Grundgleichungen[65]) ausführlich publiziert hatte[66]), beginnt *Cauchy* durch Einführung der *Poisson*'schen Definition der Spannung als Molekulardruck seine früheren Untersuchungen zur Molekularmechanik in einer übersichtlicheren Form darzustellen[67]). Er zeigt, dass wenn ϱ die Dichte im Punkte x, y, z bedeutet, die früher von ihm eingeführten Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ nach Multiplikation mit ϱ die Spannungen im Anfangszustand werden. In der Tat werden sie mit den aus Formel (22) abzuleitenden Spannungen identisch. Nach erfolgter Deformation werden die Spannungen

$$X_x = \frac{\varrho_1}{2} \mathsf{S}\left(m \frac{f(r_1)}{r_1} \Delta x_1^2\right), \quad X_y = Y_x = \cdots, \quad Z_z = \cdots,$$

für die eine der früheren analoge Entwicklung die entwickelten Gleichungen:

$$X_x = \varrho_1 \left\{\mathfrak{A}\left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\mathfrak{F}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\mathfrak{E}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$
$$+ \varrho_1 \left\{L\frac{\partial u}{\partial x} + R\frac{\partial v}{\partial y} + Q\frac{\partial w}{\partial z} + U\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + V\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + W\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$$

nebst den entsprechenden 5 anderen giebt[68]). Hier ist ϱ_1 die Dichte im Punkte x_1, y_1, z_1. Diese Gleichungen werden nach Einsetzen des Ausdrucks für ϱ_1

$$\varrho_1 = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\varrho$$

64) Vgl. hier auch *B. de Saint-Venant* in *Navier*, De la résistance des corps solides 1, p. CLXI ff. (Historique abrégé des recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solides).

65) *Fr. Neumann* hat die *Poisson*'sche Ableitung auf Krystalle mit drei zueinander senkrechten elastischen Symmetrieaxen ausgedehnt; die Gleichungen, die er in diesem Falle bekommt, enthalten 6 Konstante. Vgl. Theorie der Elastizität, p. 75. (Der betreffende Abschnitt entstammt einer Vorlesung vom W. S. 1857/58.)

66) Er hattte nur erst einen kurzen Auszug bekannt gegeben nach einer Mitteilung vor der Pariser Akademie vom 1. Okt. 1827: vgl. Ann. phys. chim. 37 (1828).

67) *Cauchy*, Exerc. de math. 3 (1828), p. 213: De la pression ou tension dans un système de points matériels.

68) In dieser Form in Exerc. de math. 4 (1829), p. 129: Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvement pour un système de points matériels sollicités par de forces d'attraction ou de répulsi n m tuelle.

und durch Einführung der Bezeichnungen

$$\mathfrak{A}\varrho = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{B}\varrho = \mathfrak{b} \cdots, \quad \mathfrak{F}\varrho = \mathfrak{f}$$

den Gleichungen (20) analog:

$$(20')\begin{cases} X_x{}^a = \mathfrak{a}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\,\mathfrak{f}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\,\mathfrak{e}\frac{\partial u}{\partial z} + X_x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_y{}^a = Y_x{}^a = \mathfrak{d}\frac{\partial w}{\partial z} + \mathfrak{e}\frac{\partial v}{\partial z} + \mathfrak{f}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mathfrak{a}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathfrak{b}\frac{\partial u}{\partial y} + X_y. \end{cases}$$

Hierin sind jetzt aber die Koeffizienten der Spannungskomponenten unabhängig von den Anfangsspannungen. Ebenso ist die Zahl der Konstanten nur $6 + 15 = 21$, da ausser den 6 Konstanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in den *linearen* Funktionen $X_x, \cdots Z_z$ der Deformationsgrössen nur 15 Konstante auftreten. Ebenso ergiebt der Vergleich die Übereinstimmung der *Cauchy'schen* Formeln (20') mit den von *Poisson* erhaltenen (23'). In der Tat werden im Falle der Isotropie

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{e} = \mathfrak{f} = 0,$$

und entsprechend bleibt in den Ausdrücken für $X_x, \ldots Z_z$ nur *eine* Konstante. Der Wert der Anspannungsspannung berechnet sich leicht aus (22) zu

$$\mathfrak{a} = \frac{\varrho}{6} Smrf(r).$$

Dieser Ausdruck stimmt nun wirklich mit dem von *Poisson* für sein $\bar{k}$ gegebenen Werte (vgl. Fussn. 63) überein, wenn man bedenkt, dass $\varrho = \frac{m^0}{\delta^3}$, *Poisson* aber $m = m^0 = 1$ setzt.

Cauchy betrachtet als spezielle Fälle wieder den Fall dreier Symmetrieebenen, den Fall, dass die Symmetrie für alle drei Ebenen die gleiche ist, und den Fall der Isotropie mit und ohne Anfangsspannung und zeigt, wie durch Einsetzen der so gefundenen Ausdrücke in die Spannungsgleichungen die schon früher von ihm erhaltenen Grundgleichungen in den Verschiebungen hervorkommen[69]).

4c. **Die Zahl der Konstanten des Hooke'schen Gesetzes.** Der direkte Ansatz der linearen Abhängigkeit der Spannungen und Deformationsgrössen ergiebt nach dem Vorstehenden im Falle der Isotropie 2 Konstante, im Falle der Anisotropie 36 Konstante, sofern man Anfangsspannungen ausschliesst. Die Annahme der Existenz des elastischen Potentials bedingt die weitere Reduktion der Zahl dieser 36 Kon-

69) Für die *Cauchy*'schen Untersuchungen vgl. auch insbesondere *B. de Saint-Venant* in *Navier*, De la résistance des corps solides, 2, App. 3 und in *Moigno*, Leçons de mécanique analytique rédigées principalement d'après les méthodes d'*Augustin Cauchy*, Paris 1868, p. 616—723.

stanten auf 21, da wie in Nr. 5b ausgeführt wird, die Spannungskomponenten als Ableitungen einer homogenen quadratischen Funktion φ der Formänderungskomponenten mit $36 - \frac{6 \cdot 5}{2} = 21$ Koeffizienten erscheinen. Demgegenüber ergiebt die molekulartheoretische Herleitung des *Hooke*'schen Gesetzes in den gleichen Fällen nur eine bezw. 15 Konstante. Man hat sich gewöhnt, danach in der Elastizitätslehre eine *Multikonstanten*- und *Rarikonstantentheorie*[70]) zu unterscheiden. Die meisten der älteren Autoren (*Navier, Cauchy, Poisson, Lamé* und *Clapeyron* in ihren früheren Abhandlungen) sind Anhänger der Rarikonstantentheorie. Erst unter dem Einfluss der englischen Schule, die den Begriff des elastischen Potentials in den Vordergrund rückte (*G. Green, G. G. Stokes, W. Thomson*), entschied man sich später für die Multikonstantentheorie, deren Vorrang endgültig gesichert erscheint, nachdem sich gezeigt hat, dass die 6 Relationen unter den 21 Koeffizienten, die diese auf 15 reduzieren, durch das Experiment nicht bestätigt worden sind[71]). Die Nichtbestätigung dieser sogenannten sechs *Cauchy*'schen Relationen hat *B. de Saint-Venant* nicht mehr erlebt, der stets der konsequenteste Vertreter der Rarikonstantentheorie geblieben ist und zu wiederholten Malen in längeren Darlegungen auf die Notwendigkeit ihrer Annahme

70) Die Benennung rührt her von *K. Pearson*; vgl. *Is. Todhunter* und *K. Pearson*, A history of the theory of elasticity 1, Cambridge 1886, p. 496.

71) Vgl. *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 31 (1887), p. 701; 34 (1888), p. 981; 35 (1888), p. 642; 38 (1889), p. 573. Die von den Anhängern der Multikonstantentheorie vorgebrachten Argumente waren lange keineswegs stichhaltig, wie besonders von *B. de St.-Venant* (vgl. Fussn. 72) mehrfach dargelegt wurde. Die Berufung auf Experimente mit Körpern wie Kork, Gummi, Gallerte war hinfällig, weil derartige (poröse oder mit Flüssigkeit durchtränkte) Vegetabilien aus der rein elastizitätstheoretischen Behandlung (vgl. Nr. 1) natürlich ausscheiden mussten. Ebenso war der von *G. G. Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1849), p. 287 und von *J. Cl. Maxwell*, Edinburgh Roy. Trans. 20 (1856), p. 87 vorgebrachte Hinweis auf die Kontinuität zwischen den festen, plastischen, zähflüssigen und flüssigen Körpern, aus denen ein entsprechender stetiger Übergang in dem Verhältnis der Konstanten der Gestalt und Volumelastizität folge, nicht zwingend, da es sich bei plastischen Körpern vorwiegend um dauernde Formänderungen handelt und diese in dem mathematischen Ansatz gar nicht einbezogen werden. Die *G. Wertheim*'schen Experimente mit Glas- und Messingstäben und -schalen endlich sind nicht entscheidend, da sich für derartige durch das Fabrikationsverfahren (d. h. durch dauernde Formänderung) aeolotrop gewordene Körper sowohl unter Zugrundelegung der Multikonstanten- wie der Rarikonstantentheorie zwei Elastizitätskonstanten ergeben; vgl. *B. de St.-Venant*, J. de math. 8 (1863), p. 267; 13 (1868), p. 242; *J. Boussinesq*, J. de math. 13 (1868), p. 209 und *W. Thomson*, Edinburgh Roy. Soc. Proc. 16 (1890), p. 693.

hingewiesen hat[72]). Sein tiefgehendster Argumentationsgrund ist immer die in sich befriedigende Erklärung, die das *Hooke*'sche Gesetz erst durch die Annahme der molekularen Auffassung von der Konstitution der Materie erhält. Zwar deutet er schon gelegentlich[73]) auf eine Erweiterung der molekularen Annahme hin, die vielleicht für Krystalle anzunehmen nötig sei und die nicht auf die Notwendigkeit der sechs *Cauchy*'schen Relationen führe.

Damit wird eine Betrachtungsweise für Krystalle in den Vordergrund gerückt, die schon von *Poisson*[74]) in seiner Abhandlung von 1829 gestreift und dann in seiner letzten Abhandlung vom Jahre 1839 weiter ausgeführt wurde, die Molekulartheorie nach *der* Richtung zu erweitern, dass statt der „materiellen Punkte" „starre Körper von polyedrischer Gestalt" als Moleküle eingeführt werden, die nun nicht nur mit einer Zentralkraft $f(r)$, sondern auch mit einem Kräftepaar aufeinander wirken, so dass neben der Entfernungsänderung der Moleküle auch noch die Änderung in ihrer gegenseitigen Orientierung für die Erklärung der elastischen Eigenschaften der Körper in Betracht kommt[75]). Dieser Gedankengang ist dann von *W. Voigt*[76]) wieder

72) Vgl. z. B. Paris C. R. 53 (1861), p. 1107 und insbesondere den App. 5 der *Navier*'schen Vorlesungen, sowie die Anm. zu § 16 der Übersetzung von *Clebsch*, Elastizität. (Vgl. auch Fußnote 71.)

73) *B. de Saint-Venant* in *Navier*, De la résistance des corps solides 2, App. 5, p. 689—706, wo er den *Cauchy*'schen Gedanken [vgl. Paris C. R. 32 (1851), p. 323] näher verfolgt, dass die Koeffizienten des *Hooke*'schen Gesetzes periodische Funktionen werden, die von Molekülgruppe zu Molekülgruppe wegen der sich wiederholenden gleichen Anordnung der das Molekül konstituierenden Atome den gleichen Wert annehmen. Er glaubt aber, dass dieser Einfluss stets so gering sei, dass man ihn vernachlässigen dürfe. Ausserdem ist damit nur die Nichtzulässigkeit der Relationen im Falle der Äolotropie bewiesen, im Falle der Isotropie würde immer noch eine Konstante bleiben. Vgl. auch die Note zu § 16 der Übersetzung von *Clebsch*, Elastizität.

74) *S. D. Poisson*, J. éc. polyt. 20 (1831), p. 8 und Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés (vom 28. Okt. 1839), Paris, Mém. de l' Acad. 18 (1842), p. 3 ff. (unvollendet). *Poisson*'s Auffassung ist genauer die, dass die Moleküle der festen Körper überhaupt polyedrische Gestalt haben, nur sei im isotropen Körper ihre Lagerung so regellos, dass man bei Berechnung der Spannungskomponenten etwa resultierende Drehmomente vernachlässigen und daher die Moleküle gleich von vornherein kugelförmig annehmen könne.

75) *Poisson* selbst erhält indessen auch bei dieser allgemeineren Voraussetzung nur 15 Konstante für den anisotropen Körper; er führt aber über die Abhängigkeit der Kräfte von den Richtungen Annahmen ein, die darauf hinauskommen, dass der Krystall eine Symmetrie nach drei zu einander rechtwinkligen Ebenen hat, und wo in der Tat die 21 Konstanten sich auf 15 reduzieren müssen.

aufgenommen worden. Er zeigt, dass in der Tat unter Annahme solcher mit „Polarität begabter Moleküle" für den Fall der Anisotropie sich 21 Konstante ergeben, die nun eine weitere Reduktion nicht gestatten. Bei isotropen Körpern führt dagegen auch die Annahme der mit Polarität begabten Moleküle nur auf eine Konstante. Hier aber gelingt *W. Voigt* die gewünschte Verallgemeinerung mit Hilfe des Begriffs der „Quasi-Isotropie"[77]) auf Grund einer Vorstellungsweise, deren Ansätze schon von *B. de St.-Venant*[71]) bei der Behandlung der durch dauernde Formänderung anisotrop gewordenen „amorphen" = quasi-isotropen Medien entwickelt wurden. Wie die Erfahrung zeigt, ist eine grosse Zahl sogenannter isotroper Körper aus kleinen Krystallindividuen zusammengesetzt, die in allen möglichen Lagen gegeneinander orientiert sind. In solchen „quasi-isotropen" Körpern muss die auf ein Flächenelement wirkende Spannung durch den Mittelwert aller Spannungen gegeben sein, die beim regelmässigen Krystall aus derselben Substanz bei allen möglichen Lagen des Flächenelements auf dieses wirken. Aus dieser Vorstellung leitet *Voigt* unter Benutzung der *Poisson*'schen Definition der Spannung, die er auch bei seinen früheren Untersuchungen zu Grunde legt, die aus den Molekularkräften resultierenden Spannungen als lineare Funktionen der Formänderungskomponenten mit 2 unabhängigen Konstanten ab. Die aus dieser Theorie folgenden Beziehungen zwischen den Elastizitätskonstanten eines Krystalls und der entsprechenden quasi-isotropen Substanz sind durch die Beobachtung in verschiedenen Fällen gut bestätigt worden. In anderen Fällen, wo von krystallinischer Struktur nicht die Rede sein kann (wie jedenfalls bei Flüssigkeiten und Gasen) findet *Voigt*[78]) die zweite Konstante als Ausdruck einer gewissen „Fluidität" des elastischen Mediums, die es bedingt, dass die (für molekular aufgebaute Medien nur unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungen von Molekül zu Molekül sich nur wenig ändern, geltenden) Relationen

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z,$$

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z$$

durch die anderen

---

76) *W. Voigt*, Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle, Gött. Abh. 34 (1887), p. 1.

77) *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. (3) 38 (1889), p. 573.

78) *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. (4) 4 (1901), p. 187.

$$\Delta u = e_x \xi_1 + e_y \xi_2 + e_z \xi_3 + g_{yz} \xi_4 + g_{zx} \xi_5 + g_{xy} \xi_6$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu ersetzen sind, wo die $\xi_1, \ldots \xi_6$ nicht näher bekannte Funktionen von Δx, Δy, Δz sind.

In anderer Weise hat *Lord Kelvin* die Molekularhypothese ergänzt, damit sie fähig wird, für den anisotropen Fall 21 Konstante zu ergeben. Er erweiterte die Hypothese der punktförmigen Moleküle dahin, dass er zwei Punktsysteme nimmt, die mit Zentralkräften aufeinander wirken, aber wo die Wirkung der Punkte des ersten bezw. zweiten Systems untereinander, sowie die der Punkte des ersten und zweiten Systems aufeinander jeweils verschieden sind[79]). Um eine leichtere Ausdrucksweise zu ermöglichen, nennt *Lord Kelvin* das erste System das der „roten", das zweite das der „blauen" Punkte. Er wählt ferner die Punkte beider Systeme je als Punkte zweier gegeneinander verschobener einfacher räumlicher Punktgitter, d. h. je als Schnittpunkte dreier sich schneidender Scharen äquidistanter Parallelen. Die Zahl der einem solchen Doppelsystem eigentümlichen elastischen Konstanten stellt er dann in folgender Weise fest: Er konstruiert zunächst das Modell eines *inkompressiblen* Körpers, indem er jeden blauen Punkt an die Ecken eines roten Tetraeders, in dessen Innern er liegt, durch vier starre Stäbe anschliesst und nun die Gestalt des Ganzen so lange ändert, bis das Volumen des Elementartetraeders zum Maximum wird. (Dies tritt ein, wenn jeder Stab auf der gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraeders senkrecht steht.) Für ein aus solchen speziellen Tetraedern aufgebautes Modell ergeben sich 15 Elastizitätskonstanten (vgl. Nr. 5a). Legt man nun statt des speziellen (nur vier willkürliche Bestimmungsstücke) enthaltenden Elementartetraeders ein beliebiges Tetraeder zu Grunde und ersetzt die vier starren Stäbe, durch die der blaue Punkt angeschlossen wurde, durch elastische, so gewinnt man $2 + 4 = 6$ weitere willkürliche Konstanten. Dem durch ein solches Modell repräsentierten verallgemeinerten Punktgitter sind also insgesamt 21 Elastizitätskonstanten eigentümlich.

79) *W. Thomson*, Edinburgh Roy. Soc. Proc. 16 (1890), p. 693; London Roy. Soc. Proc. 54 B (1893), p. 59; Baltimore lectures, 2. ed. London 1904, p. 643. Solche Punktsysteme wurden auch schon von *Cauchy* in einigen seiner zahlreichen Abhandlungen zur Molekularmechanik, die er seit 1830 bis 1857 fortgesetzt publizierte, betrachtet (vgl. z. B. Paris C. R. 16 (1843), pag. 299, 954, 1035). Es steht hier aber bei *Cauchy* allemal das Interesse der Elastizitätstheorie zurück, indem es sich bei ihm wesentlich um die Erklärung optischer Phänomene handelt. Er muss daher an dieser Stelle hierfür auf Bd. V 21 (Ältere Optik von *A. Wangerin*) verwiesen werden.

5. Die Einführung des elastischen Potentials.

Als dritter Ausgangspunkt für die Aufstellung der Grundgleichungen bleibt die Annahme einer *skalaren* Grösse für jeden Punkt xyz des Inneren der Körper, durch die der Deformationszustand des Körpers vollkommen festgelegt ist. Durch die Einführung dieser als *elastisches Potential* bezeichneten Grösse wird die Ableitung der Gleichungen auf die allgemeinen Prinzipien der *Lagrange*schen Mechanik gestützt, indem das Prinzip der virtuellen Verrückungen, für die Bewegung kombiniert mit dem *d'Alembert*'schen Prinzip, und eventuell in die Form des *Hamilton*'schen Prinzips umgesetzt, die Grundlage der weiteren analytischen Entwicklung wird. Dabei ist es für die Begründung des Ansatzes des elastischen Potentials als Funktion der Deformationsgrössen nicht gleichgültig, welche Voraussetzungen über die Konstitution der Materie bzw. über die Wirkungsweise der Molekularkräfte gemacht werden. Insoweit wird man aber immer noch im eigentlichen Gebiet der Mechanik bleiben, während die Frage nach der Existenz des elastischen Potentials nur unter Heranziehung der beiden Hauptsätze der Wärmetheorie ihre Erledigung findet.

5a. Molekulartheoretische Begründung des elastischen Potentials. Diesen Weg ist zuerst wieder *Navier*[80]) gegangen, der zu ihm geführt wurde, weil er bei der Wahl des Kraftbegriffs als Ausgangspunkts für die Aufstellung der Grundgleichungen (Nr. 2a) die Oberflächenbedingungen nicht erhielt, die sich aber sofort unter Benutzung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ergeben. Nach diesem Prinzip verschwindet (im Falle des Gleichgewichts) die Summe der bei einer virtuellen Verschiebung δu, δv, δw geleisteten Arbeit der inneren und äusseren Kräfte. Indem *Navier* seinen Ausdruck

$$(r_1 - r)F(r)$$

für die innere Kraft zu Grunde legt, wird die innere Arbeit (das *Moment der Kraft* im Sinne *Lagrange*'s)

$$-(r_1 - r)F(r)\delta(r_1 - r) = -\tfrac{1}{2}F(r)\delta(r_1 - r)^2$$

und damit der Ausdruck für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

80) *Navier*, Paris Mém. de l'Acad. 7 (1827), p. 375. Vorher schon in Paris Soc. philom. Bull. 1823, p. 177 publiziert. Vgl. auch die Exposition von *Navier*'s Ableitung bei *B. de St.-Venant* in *Navier*, De la résistance des corps solides 2, App. compl. p. 796.

$$\iiint \varrho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\,dx\,dy\,dz + \iint (\overline{X}\,\delta \overline{u} + \overline{Y}\,\delta \overline{v} + \overline{Z}\,\delta \overline{w})\,dS \tag{24}$$
$$= \iiint \tfrac{1}{4} F(r)\,\delta (r_1 - r)^2\,dx\,dy\,dz.$$

Hier ist nun der Ausdruck für $(r_1 - r)$ als Funktion der Deformationsgrössen einzuführen. *Navier* erhält unter Benutzung von Polarkoordinaten und Umsetzung der Summation über die molekulare Wirkungssphäre für das „Moment der Kraft" im Punkte xyz

$$\tfrac{1}{2} F(r)\,\delta (r_1 - r)^2 = \varepsilon \delta \{3 e_x^2 + g^2_{yx} + 2 e_y e_x + g^2_{xz} + 2 e_x e_z + 3 e_y^2$$
$$+ g^2_{zy} + 2 e_z e_y + 3 e_z^2\},$$

wo ε den in Nr. 2a gegebenen Wert hat. Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck in den Deformationsgrössen ist gleich 2φ, wenn φ das elastische Potential der Volumeinheit bezeichnet[81]). Durch Umformung des auf der linken Seite von Gleichung (24) stehenden Volumintegrals in die Summe je dreier Raumintegrale und Oberflächenintegrale ergeben sich sofort die 3 Hauptgleichungen und die 3 Oberflächenbedingungen für den *isotropen* Körper in der alten Form (3) und (4), wenn man die jeweils rechts und links der Gl. (24) mit den Faktoren δu, δv, δw, $\delta \overline{u}$, $\delta \overline{v}$, $\delta \overline{w}$ multiplizierten Ausdrücke einander gleichsetzt[82]).

Die Gleichungen für den *anisotropen* Körper hat unter Benutzung des elastischen Potentials zuerst *S. Haughton*[83]) abgeleitet. Sein Ausgangspunkt ist ebenfalls das Prinzip der virtuellen Verrückungen, und die Annahme eines aus punktförmigen Molekülen aufgebauten elastischen Körpers, die mit Zentralkräften aufeinander wirken. Als Ausdruck für die innere Kraft zwischen zwei Molekülen aber wählt er eine

---

81) *Navier* hat irrtümlich den Faktor $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε.

82) Auf anisotrope Körper findet sich der *Navier*'sche Ansatz von *Saint-Venant* ausgedehnt, der aber die Integrationen über die molekulare Wirkungssphäre vermeidet (siehe Fußn. 80). Vgl. auch *A. Castigliano*, Théorie de l'équilibre des systèmes elastiques, Turin 1879, p. 59.

83) *S. Haughton*, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 1 (1846), p. 173 und Dubl. Irish Acad. Trans. 21 (1848), p. 151 (vom 25. Mai 1846). Seine Entwicklungen umfassen auch das Gleichgewicht von Flüssigkeiten. *Haughton* benutzt hier statt der Summationen Integrationen über die Molekularsphäre. Solche vermeidet *Lord Kelvin*, Lond. Roy. Soc. Proc. 54 B (1893), p. 59 = Baltimore lectures, 2. ed., 1904, p. 643, indem er wie *Cauchy* bei seinen Untersuchungen (vgl. Nr. 2b) eine symmetrische Verteilung der Moleküle annimmt. Für die *Cauchy*'schen Formeln hat *G. G. Stokes*, Report on double refraction, Brit. Ass. Rep. 1862, p. 253 = Math. and phys. papers 4, Cambridge 1904, p. 197 den Ausdruck des Potentials φ aufgestellt.

Funktion, die ausser von der ursprünglichen Entfernung und ihrer Richtung neben der Entfernungsänderung auch von der Richtungsänderung abhängt. Er entwickelt dann aber nur nach Potenzen von $(r_1 - r)$ und setzt daher:

$$f(r_1) = f(r) + 2f'(r)(r_1 - r) + \cdots.$$

Damit wird die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$f(r_1)\delta(r_1 - r) = f(r)\delta(r_1 - r) + f'(r)\delta(r_1 - r)^2.$$

Indem *Haughton* aber Anfangsspannungen nicht berücksichtigt[84]), lässt er das Glied $f(r)\delta(r_1 - r)$ fort, so dass seine weiteren Entwicklungen analytisch mit denen von *Navier* übereinstimmen. Da er Anisotropie voraussetzt, erhält er die virtuelle Arbeit gleich der Variation einer quadratischen Funktion der Deformationsgrössen mit 15 verschiedenen Koeffizienten.

Eine Erweiterung der molekulartheoretischen Begründung des elastischen Potentials giebt *J. H. Jellett*, indem er die Annahme diskutiert, dass die Wirkung zweier Moleküle aufeinander auch von der Wirkung der umliegenden Moleküle abhängig ist (*modified action*). Unter Ausserachtlassung von Anfangsspannungen, wodurch im Potential das lineare Glied gleich Null wird, erhält er durch diesen Ansatz die Grundgleichungen mit 36 Konstanten, die sich auf 15 reduzieren, wenn man die spezielle molekulartheoretische Annahme der Zentralkräfte *(independent action)* macht. Im allgemeinen Falle aber reduzieren sich seine Konstanten nicht; es ist dies in dem höchst allgemeinen Wirkungsgesetz begründet, das *Jellett* gleich von vornherein formuliert. Die Reduktion auf 21 Konstante, die unter Voraussetzung eines Potentials der direkte Ansatz (vgl. Nr. 5b) liefert, wird erreicht, wenn man den Ausdruck für das elastische Potential

$$\varphi(r, r', r'', \ldots),$$

wo $r, r', r'', \ldots$ die Entfernungen je zweier Moleküle bedeuten, in folgender Form nach Potenzen der Entfernungsänderungen ent-

---

84) Den Fall von Anfangsspannungen berücksichtigt, aber nur für den Fall des isotropen Körpers, bei der gleichen Ableitungsmethode *C. Neumann*, J. f. Math. 57 (1860), p. 281. Vgl. auch *W. J. M. Rankine,* On the laws of elasticity, Cambr. and Dublin Math. J. 7 (1852), p. 217 = Misc. sc. papers 1881, p. 101. *Fr. Neumann*, Theorie der Elastizität, p. 80ff.

85) Vgl. *J. H. Jellett,* On the equilibrium and motion of elastic solids, Dubl. Irish Trans. 22 (1855), p. 179 (vom 28. Jan. 1850). *Jellett* macht dort zuerst die allgemeinere Annahme, dass kein Potential der inneren Kräfte existiert, in welchem Falle die Gleichungen unter Ausschluss von Anfangsspannungen 54 Konstante enthalten.

wickelt[86]):

$$(25)\quad \varphi(r_1, r_1', r_1'', \ldots) = \varphi(r, r', r'', \ldots) + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r_1 - r) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(r - r)^2 + \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial r'}(r_1 - r)(r_1' - r') + \cdots.$$

Hier kann man $\varphi\ (r, r', r'', \cdots) = 0$ setzen, da das Potential nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Man kommt auf den Fall der Zentralkräfte zurück, wenn $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial r'}, \ldots$ verschwindet. In der Tat hängt dann φ allein von der gegenseitigen Entfernung der beiden Moleküle, zwischen denen eine Kraftwirkung stattfindet, ab.

5b. **Direkter Ansatz des elastischen Potentials.** Unabhängig von einer speziellen Voraussetzung über die Natur der im Innern eines deformierbaren Körpers wirkenden „Elastizitätskräfte" hat *G. Green*[87]) das elastische Potential zur Ableitung der Grundgleichungen herangezogen. Er postuliert, wie es scheint, als unmittelbare Folge des Satzes von der Erhaltung der Energie, die Existenz einer Funktion

$$\Phi = \iiint \varphi\, dx\, dy\, dz,$$

deren negatives Differential die Summe der Arbeiten ausdrückt, die bei kleinen virtuellen Verrückungen des Teilchens eines elastischen Systems von den inneren Kräften geleistet werden. *Green*'s *Annahme* ist nun, dass das Potential der Volumeinheit φ als Funktion der 6 Deformationsgrössen $e_x, e_y, e_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ sich in der Form

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots$$

entwickeln lasse, wo φ_0 Null gesetzt werden kann. Unter der Voraussetzung, dass keine Anfangsspannungen vorhanden[88]) sind, wird das

86) Vgl. zu diesem Ansatze auch *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie mathématique de la lumière, Paris 1889, p. 1—48 und *Poincaré*, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1892, chap. 2. *B. de St.-Venant* hat von seinem Standpunkt aus diese Erweiterung der Molekulartheorie nicht für zulässig erklärt (vgl. Note zu § 16 von *Clebsch-St.-Venant*, Élasticité des corps solides, Paris 1883). Siehe auch *J. Boussinesq*, Recherches sur les principes de la mécanique, J. de math. (2) 18 (1873), p. 305.

87) *G. Green*, On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two noncrystallized media, Cambr. Phil. Soc. Trans 7 (1842), p. 1 (vom 11. Dez. 1837) = Math. papers, London 1871, p. 243. Vgl. hierzu auch *G. G. Stokes*, Report on double refraction, Brit. Ass. Rep. 1862, p. 253 = Math. and phys. papers 4, Cambridge 1904, p. 157.

88) In einer zweiten Abhandlung: On the propagation of light in crystallized media, Cambr. Phil. Soc. Trans. 7 (1842), p. 121 (vom 20. Mai 1839) = Math.

in den Deformationsgrössen lineare Glied φ_1 gleich Null, so dass bis auf Glieder höherer Ordnung nur das quadratische mit 21 Koeffizienten übrig bleibt. Die Aufstellung der Grundgleichungen ist dann im weiteren der *Navier*'schen durchaus analog. Es ergeben sich als Resultat die *Hauptgleichungen*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial e_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xz}}\right)+\varrho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,$$

$$26)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial e_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{yz}}\right)+\varrho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial g_{xz}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{yz}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial e_z}\right)+\varrho\left(Z-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,$$

und die *Oberflächenbedingungen*:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial e_x}\cos nx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xy}}\cos ny+\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xz}}\cos nz=\overline{X},$$

$$(27)\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xy}}\cos nx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial e_y}\cos ny+\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{yz}}\cos nz=\overline{Y},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xz}}\cos nx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial g_{yz}}\cos ny+\frac{\partial\varphi_2}{\partial e_z}\cos nz=\overline{Z}.$$

Diese Gleichungen sind mit den früher aufgestellten identisch, wenn man

$$(28)\quad \begin{cases} X_x=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial e_x}, & Y_y=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xy}}, & Z_z=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial g_{xz}},\\[2mm] X_y=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial e_y}, & X_z=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial g_{yz}}, & Y_z=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial e_z}\end{cases}$$

setzt, womit sich das Differential des elastischen Potentials in der Form

$$(29)\quad X_x\delta e_x+\cdots+X_y\delta g_{xy}$$

darstellt; es ist dies die Arbeit der äusseren Kräfte bezogen auf die Volumeinheit des ursprünglichen Körpers[89]). Nun aber drückt sich (im Falle des Gleichgewichts) diese Arbeit der äusseren Kräfte in den Spannungskomponenten durch einen Ausdruck von genau derselben Form (29) aus, wie mit Hülfe der Spannungsgleichungen und durch Zuhülfenahme der *Green*'schen Transformation bewiesen wird. Folglich bedeuten die $X_x, \ldots X_y$ tatsächlich Spannungskomponenten im früheren Sinne. Der ganze Ansatz liefert somit sämtliche bisherige

papers, p. 291 lässt *Green* solche zu und erhält so für den Fall dreier Symmetrieebenen die *Cauchy*'schen Gleichungen (vgl. Nr. 2b, Gleichung 6), aber mit $3+9=12$ Konstanten.

89) Vgl. zu dem ganzen Ansatz auch *S. Haughton,* Cambr. and Dubl. math. Journ. 5 (1850), p. 172 und On a classification of elastic media, and the laws of plane waves propagated through them, Dubl. Irish Trans. 22, part 1 (1849), p. 97.

Gleichungen; insbesondere ergiebt die Annahme, dass φ eine quadratische Funktion der Deformationsgrössen ist, für die Spannungskomponenten das *Hooke*'sche Gesetz mit 21 verschiedenen Konstanten.

Das Vorstehende ist die übliche Form, in der insbesondere im Anschluss an die späteren Arbeiten von *G. G. Stokes* und *W. Thomson*, dann auch *H. v. Helmholtz* heute vorzugsweise die Grundgleichungen der Elastizität abgeleitet werden. Dabei kann man als Ausgangspunkt statt des Prinzips der virtuellen Verrückungen natürlich auch das *Hamilton*'sche Prinzip wählen[90]), das sich für nichtstarre Körper in der Form

$$(24') \qquad \delta\int_{t_0}^{t_1}(\mathfrak{T}-\Phi)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\delta W dt=0$$

schreibt. Hier ist $\mathfrak{T}$ die lebendige Kraft, Φ das elastische Potential, δW die bei der Deformation geleistete Arbeit der äusseren Kräfte. Die Variation ist bei festen Grenzen t_0 und t_1 über die Verschiebungen zu nehmen, die an den Grenzen als verschwindend angenommen werden.

Der Vorzug dieser Ableitungsart der Grundgleichungen besteht insbesondere in der Übersichtlichkeit, und vielleicht auch in der Erweiterungsfähigkeit des Ansatzes. So kann man z. B. leicht, wenn es sich als notwendig erweist, auch Glieder dritten Grades in den Deformationsgrössen in den Ausdruck des elastischen Potentials zulassen, womit sich dann für die Spannungskomponenten quadratische Funktionen derselben ergeben[91]). Das Entscheidende aber vielleicht ist, dass man durch Einführung des elastischen Potentials in einfachster Weise die Beziehung zur Thermodynamik gewinnt und so in der Lage ist, die bei Deformationen stets auftretenden Wärmeerscheinungen dem analytischen Ansatz zugänglich zu machen (vgl. Nr. 5c). Damit wird zugleich der Geltungsbereich der bisher aufgestellten Gleichungen genauer umgrenzt; indem dort von Wärmeerscheinungen jeder Art abgesehen und stillschweigend die Temperatur während der Deformation als konstant angesehen wurde, haben sie zunächst nur Gültigkeit für den Fall der *isothermischen Deformation*. Allerdings ist dies der Fall, den man in der Elastizitätstheorie fester Körper zunächst immer betrachtet, da hier die Deformationen so langsam vorgehen, dass jeweils sofort ein Temperaturausgleich stattfindet. Dagegen ist dies bei Gasen z. B. keineswegs der Fall, vielmehr kann man hier — insbesondere bei der Fort-

90) Über die Form des *Hamilton*'schen Prinzipes für nichtstarre Körper siehe *G. Kirchhoff*, Mechanik, 2. Aufl., p. 117 und *W. Voigt*, Kompendium der theoretischen Physik, p. 229.

91) Vgl. *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1894, und Kompendium der theoretischen Physik 1, p. 339.

pflanzung des Schalls — das andere Extrem erfüllt ansehen, dass die Deformation ohne Zuführung von Wärme, d. h. *adiabatisch* erfolgt. In der Tat hat unter dieser Annahme *Laplace* seine mit den Beobachtungen befriedigend übereinstimmende Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles abgeleitet (vgl. IV 26, Nr. 6a, *H. Lamb*).

5c. Thermodynamische Begründung des elastischen Potentials. Es soll in vorliegender Nummer der thermodynamische Ansatz nicht ausführlich entwickelt werden, da hierüber in den Referaten V 3 (*G. H. Bryan*) und V 11 (*H. Kamerlingh-Onnes*) berichtet wird. Es soll an dieser Stelle nur soweit auf ihn eingegangen werden, als er den Beweis für die *Existenz* des elastischen Potentials giebt, die durch die Annahme *Green*'s nicht gewährleistet ist, und für die er von seinem Standpunkt aus auf Betrachtungen über die Wirkungsart der „Elastizitätskräfte" hätte zurückgreifen müssen. Ebensowenig kann hier über die Versuche berichtet werden, im Anschluss an den thermodynamischen Ansatz resp. zu dessen Stütze *kinetische Vorstellungen* über die Konstitution der Materie zu entwickeln, da sie für die Aufstellung der Grundgleichungen der Elastizität bisher nur nebenbei herangezogen sind[92]). Im übrigen sei hierfür auf V 10 (*Kinetische Theorie der Materie* von *H. Boltzmann* und *J. Nabl*) verwiesen.

Den Beweis für die Existenz des elastischen Potentials für die beiden speziellen Zustandsänderungen der *isothermischen* und *adiabatischen Deformation* gab *W. Thomson*[93]). Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist

$$\delta \mathfrak{T} + \delta E = \delta W + \delta Q, \tag{30}$$

wo $\delta \mathfrak{T}$ wieder die bei einer virtuellen Verschiebung erfolgende Zunahme der lebendigen Kraft, δE die Zunahme der nur von der Formänderung und Temperatur abhängenden „inneren Energie"

$$E = \iiint \varepsilon \, dx \, dy \, dz$$

92) Es kommen hier insbesondere Vorstellungsweisen in Betracht, die von *Rankine*, On the centrifugal theory of elasticity and its connection with the theory of heat, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 20³ (1853), p. 425 (vom 16. Dez. 1853) = Misc. sc. papers 1881, p. 49 und von *Lord Kelvin*, Proc. of the Roy. Inst. of Great Britain 9 (1882), p. 520 = Popular lectures and addresses 1, London 1889, 2. Aufl., p. 149 und Brit. Assoc. Rep. 1884, p. 613 = Popular lectures 1, 2. Aufl., p. 225 entwickelt wurdeu. Vgl. auch *H. Reissner*, Ann. Phys. (4) 9 (1902), p. 44.

93) *H. Thomson*, On the thermoelastic and thermomagnetic properties of matter, Quart. J. of math. 1 (1857), p. 57 (vom 10. März 1855) = Math. and phys. papers 1, Cambr. 1882, p. 291.

des Systems, also ε die „Energiedichte", δW die Arbeit der äusseren Kräfte und

$$\delta Q = \iiint \delta q \, dx \, dy \, dz$$

das mechanische Äquivalent der aufgenommenen Wärme ist. Mithin ist

(31) $$\delta \mathfrak{T} - \delta W = \delta Q - \delta E.$$

Erfolgt nun die Zustandsänderung *adiabatisch*, so verschwindet δQ und $\delta \mathfrak{T} - \delta W$ wird gleich $-\delta E$. Da die Energieänderung in diesem Fall allein durch die Formänderung bestimmt ist, so ergiebt sich, dass $\delta E = \delta W - \delta \mathfrak{T}$ das vollständige Differential einer Funktion nur der Formänderungskomponenten ist, so dass, da der Überschuss der bei einer virtuellen Verschiebung erfolgenden Zunahme der lebendigen Kraft über die Arbeit der äusseren Kräfte gleich der von den inneren Kräften geleisteten Arbeit ist, die Energiedichte

$$\varepsilon = \varphi(e_x, \ldots g_{xy}),$$

gleich dem elastischen Potential wird. Ist die Zustandsänderung *isotherm*, so erinnere man sich, daß nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bei jedem reversiblen Kreisprozess (der hier vorausgesetzt wird wegen der vollkommenen Elastizität der Körper)

(32) $$\sum \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

wo T die absolute Temperatur bezeichnet. Da im vorliegenden Fall T konstant ist, so ergiebt sich $\Sigma \delta Q = 0$. Ferner ist $\Sigma \delta E = 0$, somit ist hier $\delta Q - \delta E$ das vollständige Differential einer nur von den Formänderungskomponenten abhängenden Funktion. Es ist also in diesem Falle

$$\varepsilon - q = \varphi(e_x, \ldots g_{xy}).$$

Damit ist in beiden Fällen die Existenz einer nur von der Formänderung abhängenden, offenbar positiv definiten Funktion

$$\Phi = \iiint \varphi \, dx \, dy \, dz$$

gegeben, die man dann eben als *potentielle Energie* des deformierten Körpers bezeichnen wird. Nur ist zu beachten, dass die 21 Koeffizienten des bei der weiteren Entwicklung als quadratische Funktion der Deformationsgrössen angesetzten Potentials in den Fällen der Isothermie und Isentropie verschieden sind, so dass man *isothermische* und *adiabatische Elastizitätskonstanten* unterscheidet[94]).

94) *G. Wertheim*, Ann. chim. (3) 12 (1844), p. 385; *W. Thomson*, Artikel „Elasticity" in der Encyclopaedia Brit. 7 (1878) = Math. and phys. papers 3, Cambridge 1890, p. 1; *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 536.

Die vorstehende Darstellung kann durch Einführung des Begriffs der *freien Energie* pro Volumeinheit noch etwas übersichtlicher gestaltet werden[95]). Hier sei nur kurz angedeutet, wieso damit eine Erweiterung des thermodynamischen Ansatzes auf *nicht-adiabatische* und *nicht-isothermische* Vorgänge gegeben ist.

In diesem Falle sind q und ε ausser von den Formänderungskomponenten auch von der Temperatur T abhängig. Es ist

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_x} de_x + \cdots + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} dT,$$

und andererseits, indem man für q die auf die Volumeinheit bezogene Entropie η durch die Beziehung $\delta q = T \delta \eta$ einführt,

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial e_x} de_x + \cdots + \frac{\partial \eta}{\partial T} dT.$$

Die freie Energie ist durch den Ausdruck

$$\xi = \varepsilon - T\eta$$

gegeben[96]). Damit werden, da nach dem ersten Haupsatz

$$\delta W - \delta \mathfrak{T} = \frac{\partial \xi}{\partial e_x} \delta e_x + \cdots + \frac{\partial \xi}{\partial g_{xy}} \delta g_{xy}, \tag{30}$$

andererseits aber auch

$$\delta W - \delta \mathfrak{T} = \Xi_x \delta e_x + \cdots + \Xi_y \delta g_{xy},$$

die Spannungskomponenten — die für den vorliegenden Fall der Mitberücksichtigung der Wärmeerscheinungen durch griechische Buchstaben gekennzeichnet sind — durch ein Formelsystem gegeben, das dem früheren analog ist, wo φ durch ξ ersetzt ist. Es tritt nur noch hinzu, daß für die Entropie

$$\eta = -\frac{\partial \xi}{\partial T}$$

gilt.

W. Voigt[95]) setzt nun für ξ eine Potenzentwicklung an, wobei er die Glieder höherer Ordnung in den Deformationsgrössen unter Berufung auf die Erfahrung vernachlässigt. Was die Temperatur betrifft, so kann man, bei Entwicklung nach Potenzen der Abweichung τ von einer Normaltemperatur, in den meisten Fällen mit den Gliedern zweiten Grades abbrechen. Da die linearen Glieder bei verschwindenden

---

95) Vgl. *N. Schiller*, Journ. d. russ. phys. Ges. 11 (1879), p. 55; *M. Planck*, Gleichgewichtszustand isotroper Körper, Habilitationsschrift, München 1880; *H. v. Helmholtz*, Berlin Sitz.-Ber. 1882, p. 22. Für anisotrope Medien vgl. *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1888, p. 359f. Vgl. *W. Voigt*, Compendium der theoretischen Physik 1, p. 523ff. und Thermodynamik 1, Leipzig 1903, p. 297.

96) Vgl. V 3 (*G. H. Bryan*).

Anfangsspannungen null sind und ein in τ lineares Glied irrelevant ist, so ergiebt sich für ξ der Ansatz:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\{c_{11}e_x^2 + 2c_{12}e_x e_y + \cdots + e_{66}g^2_{xy}\}$$
$$-\tau\{q_1 e_x + \cdots + q_6 g_{xy}\} - r\tau^2.$$

Leitet man hieraus die Spannungskomponenten ab, so erscheinen sie in der Form

$$\Xi_x = X_x - q_1\tau, \cdots, \quad \Xi_y = X_y - q_6\tau,$$

wo die Zuwachse $q_1\tau, \cdots q_6\tau$ als *thermische Drucke* bezeichnet werden. So ergeben sich von hier aus die Grundgleichungen für die *thermische Deformation*, wie sie in einer einfacheren Form zuerst von *J. M. C. Duhamel*[97]) und *F. E. Neumann*[98]) ausgehend von der *Poisson*schen Molekularhypothese aufgestellt wurden. Diese Autoren nehmen speziell an, dass die Funktion $f(r)$, der die Kraft zwischen zwei Molekülen proportional ist, in der Weise von der Temperatur τ abhängt, dass einer Temperaturzunahme $\Delta\tau$ eine Vergrösserung von $f(r)$ um den Wert $\Delta\tau \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau}$ entspricht, und neben dieser thermischen linearen Dilatation keine thermischen Axenwinkeländerungen vorkommen. Damit erhalten sie für einen Körper von ungleichmässiger Temperatur, indem $q_4 = q_5 = q_6 = 0$ ist, als Hauptgleichungen

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X = q_1 \frac{\partial \tau}{\partial x} + \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und als Oberflächenbedingungen

$$(34) \quad \begin{cases} (X_x - q_1\tau)\cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = \overline{X}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

die sich in leicht ersichtlicher Weise für nicht verschwindende thermische Axenwinkeländerungen erweitern. (Vgl. IV 24, Nr. 4, *O. Tedone*.)

6. Anhang: Endliche Deformation. In den vorangehenden Nummern 2 bis 5 wurden die Grundformeln der Elastizitätstheorie nur unter der Voraussetzung sog. unendlich kleiner Deformation aufgestellt. Es ist dies der Fall, den man den weitergehenden mathematischen Ent-

97) Paris Mém. prés. par div. sav. 5 (1838), p. 440.

98) Berlin Abhdlg. d. Akad. d. Wiss. 1841, 2. Teil, p. 1 = Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, p. 107.

wickelungen gewöhnlich zu Grunde legt (vgl. die folgenden Referate IV 24 bis IV 26). Indessen hat sich aus allgemein physikalischen Gründen doch auch die Notwendigkeit einer allgemeinen Theorie der *endlichen Deformation* ergeben, die jedoch nur erst in ihren Anfängen entwickelt ist. Es soll daher hier auch nur andeutungsweise über die bisherigen Versuche[99]), die Grundgleichungen abzuleiten, berichtet werden.

Der einfachste Ausgangspunkt ist durch die Betrachtung des elastischen Potentials gegeben. Man geht von der Annahme aus, dass das elastische Potential φ in einem Punkte P des elastischen Systems nach wie vor nur von dem Zustand an der Stelle P und zwar von den Formänderungskomponenten $e_x, \dots g_{xy}$ abhängt, die aber jetzt nicht mehr durch die Formeln (10) mit den Verschiebungen zusammenhängen.

Die Grundgleichungen des Problems der Bewegung ergeben sich dann in der Form:

$$(35)\qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varrho X + \dfrac{\partial X_x}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y_1} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z_1}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varrho Y + \dfrac{\partial Y_x}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y_1} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z_1}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varrho Z + \dfrac{\partial Z_x}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y_1} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z_1}; \end{cases}$$

hier dürfen die auf den deformierten Zustand bezogenen Koordinaten x_1, y_1, z_1 natürlich nicht mehr ohne weiteres durch die dem undeformierten Zustand entsprechenden Koordinaten x, y, z ersetzt werden. Es ergiebt sich vielmehr, dass bei Einführung der Koordinaten x, y, z die Gleichungen (35) übergeben in

$$(35')\qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varrho X + \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_x}{\partial y} + \dfrac{\partial C_x}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t} = \varrho Y + \dfrac{\partial A_y}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial C_y}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t} = \varrho Z + \dfrac{\partial A_z}{\partial x} + \dfrac{\partial B_z}{\partial y} + \dfrac{\partial C_z}{\partial z}, \end{cases}$$

wo die $A_x, \dots C_z$ durch gewisse Relationen mit den $X_x, \dots Z_z$ verknüpft sind. Es bedeuten z. B. A_x, A_y, A_z die Komponenten der

99) *G. Kirchhoff,* Wien Ber. 9 (1852), p. 762; *J. Boussinesq,* Paris Mém. prés. par div. sav. 20 (1872), p. 584 (Note 3); *M. Brillouin,* Paris C. R. 112 (1891), p 1500; *J. Finger,* Wien Ber. 103 (1894), p. 163, 231; *J. Hadamard,* Propagation des ondes, Paris 1903, chap. VI, p. 241. Vgl. die zusammenfassenden Darstellungen von *E.* u. *F. Cosserat,* Ann. de Toulouse 10 (1896) und *P. Duhem,* Recherches sur l'élasticité Paris 1906 (aus Ann. éc. norm. 21, 22, 23 (1904—1906)).

Spannung, die auf ein vor der Deformation zur x-Axe senkrechtes Flächenelement wirkt; dabei ist die Spannung bezogen auf die Flächeneinheit des nichtdeformierten Elements. Die $A_x, \ldots C_z$ sind nicht unabhängig von einander, sondern durch die drei aus den Formeln $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$ hervorgehenden Identitäten verknüpft. Um nun die Grundgleichungen in den Verschiebungen zu erhalten, kann man die Formänderungskomponenten der endlichen Deformation, die durch folgende Beziehungen gegeben werden:

$$(36)\quad \begin{cases} e_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\ e_y = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right], \\ e_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right], \\ g_{zy} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \left[\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right], \\ g_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \left[\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \\ g_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right], \end{cases}$$

mittelst der (aus den Beziehungen zwischen den $X_x, \ldots X_y$ und den $A_x, \ldots C_z$ folgenden) Relationen

$$(37)\quad \begin{cases} A_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}, & B_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}, & C_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}, \\ A_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}, & B_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}, & C_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}, \\ A_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}, & B_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}, & C_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} \end{cases}$$

in die Gleichungen (35′) einführen; dann erhält man als Grundgleichungen des Problems der Bewegung drei nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für u, v, w. Entsprechend ergeben sich als Randbedingungen die drei Gleichungen

$$(38)\quad \begin{cases} X_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \cos(n, x) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} \cos(n, y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} \cos(n, z), \\ Y_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} \cos(n, x) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} \cos(n, y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} \cos(n, z), \\ Z_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} \cos(n, x) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} \cos(n, y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} \cos(n, z), \end{cases}$$

die sich auf die Punkte (x, y, z) der Oberfläche S des nicht deformierten Körpers beziehen.

Die hier in Betracht kommende Form des elastischen Potentials für den speziellen *Fall der Isotropie* ist von *M. Brillouin*[100]) angegeben worden. Die Kompatibilitätsbedingungen für die Formänderungskomponenten haben *O. Manville*[101]) und *R. Marcolongo*[102]) auf verschiedene Weise abgeleitet.

J. Finger[103]) hat gezeigt, wie die Grundformeln sich spezialisieren, wenn man sich auf eine zweite Approximation beschränkt, d. h. im elastischen Potential Glieder bis zur dritten Ordnung berücksichtigt. Macht man in dem Ansatze von *Finger* die Annahme, dass es sich nicht um endliche Formänderungen, sondern um solche, deren Komponenten klein gegen Eins sind, handelt, so folgen die von *W. Voigt*[104]) gegebenen Formeln, bei deren Ableitung für das elastische Potential ein Ausdruck dritten Grades in den durch die gewöhnliche Theorie gegebenen Formänderungskomponenten angesetzt wird (vgl. Nr. 5b).

---

100) Paris C. R. 112 (1891), p. 1500.

101) Thèses Bordeaux 1903.

102) Palermo Circ. mat. Rend. 19 (1905), p. 151,

103) Wien Ber. 103 (1894), p. 183, 231, 1073.

104) Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 536; Gött. Nachr. 1893, p. 534; ebd. 1894, p. 33; Wien Ber. 103 (1894), p. 1069.

(Abgeschlossen im Dezember 1906.)

IV 24. ALLGEMEINE THEOREME DER MATHEMATISCHEN ELASTIZITÄTSLEHRE (INTEGRATIONSTHEORIE).

Von

O. TEDONE

IN GENUA.

Inhaltsübersicht.

III. Allgemeine Theorie der elastischen Bewegung.

Litteratur.

Wegen der allgemeinen *Lehrbuch*litteratur, in der der Gegenstand des vorliegenden Referates mehr oder weniger ausführlich behandelt ist, vgl. die Litteraturübersicht in dem Artikel IV 23 (*C. H. Müller*-*A. Timpe*). Speziell genannt seien hier die öfter zitierten

Monographien.

E. Beltrami, Sulle equazioni generali dell' elasticità, Ann. di mat. (2) 10 (1881).

E. Betti, Teoria della *elasticità*, Nuovo Cim. (2) 7, 8, 9, 10 (1872/73), auch als Separatdruck erschienen.

J. Boussinesq, Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris 1885.

E. Cesàro, Introduzione alla teoria matematica della *elasticità*, Torino 1894.

J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1903.

G. Lamé, Leçons sur les *coordonnées curvilignes* et leurs diverses applications, Paris 1859.
G. Lauricella, Equilibrio dei corpi elastici isotropi, Pisa Ann. 7 (1895).
F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Mit einem Vorwort von *F. Klein*, Leipzig 1891.
W. J. M. Rankine, On axes of elasticity and crystalline forms, Lond. Phil. Trans. 146 (1856), p. 261—285 = Misc. scientific papers, London 1881, p. 119—149.
O. Tedone, Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo, Ann. di mat (3) 8 (1903) und (3) 10 (1904).
W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898, ital. von *A. Sella*, Roma 1900.
— L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux, Rapports prés. au congrès international de physique 1, Paris 1900, p. 277 = Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystallelastizität, Gött. Nachr. 1900, p, 117.

Vorbemerkung. Der vorliegende Artikel beabsichtigt vor allem im Anschluss an das voraufgehende Referat IV 23 (*C. H. Müller-A. Timpe*), in dem über die verschiedenen Wege zur Aufstellung der Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie berichtet ist, die wichtigsten Resultate darzulegen, die man bei der *allgemeinen Lösung* dieser Gleichungen sowohl im Falle des *Gleichgewichts* wie auch der *Bewegung* bisher gewonnen hat. Dabei liegt es in der Forderung einer zusammenhängenden Übersicht begründet, wenn bei dem in den letzten Jahren mit besonderem Erfolge erneut einsetzenden Studium der Integration partieller Differentialgleichungen die Berichterstattung sich im wesentlichen auf die vor dieser Epoche gewonnenen Resultate beschränkt, zumal da die Ausdehnung der neuen Methoden und Ansätze auf das System der partiellen Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie noch nicht im allgemeinen geleistet ist, wenn sich auch dieser Anwendung keine prinzipiellen Schwierigkeiten gegenüberstellen. Insbesondere wird man hoffen können, dass der neue Fortschritt in der *Theorie der Integralgleichungen* (vgl. hierüber II A 11, *S. Pincherle*) nicht nur die erwünschten Existenztheoreme, die man sonst durch das *Dirichlet*'sche und *Rayleigh*'sche Prinzip stützt, wirklich befriedigend leisten, sondern auch viele bisher gewonnene Theoreme in einem erneuten Zusammenhange erscheinen lassen wird. *Spezielle Ausführungen* zu den in dem vorliegenden Referat gegebenen Methoden, sowie auch die eine oder andere spezifische Methode, die bei Einzelproblemen in Anwendung gekommen sind, werden die beiden folgenden Artikel IV 25 (Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper von *O. Tedone-A. Timpe*) und IV 26 (Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akustik von *H. Lamb*) bringen.

I. Einleitende Bemerkungen.

1. Bezeichnungen. Es seien gleich hier die wichtigsten Bezeichnungen in cartesischen und krummlinigen rechtwinkligen Koordinaten, von denen im folgenden ständig Gebrauch gemacht werden wird, vorweg zusammengestellt, zumal da sie z. T. von den in den Artikeln IV 14 (*M. Abraham*) und IV 23 (*C. H. Müller-A. Timpe*) gewählten abweichen.

Es bezeichne

S den vom elastischen System eingenommenen Raumteil, der sich gegebenenfalls ins Unendliche erstrecken oder den ganzen Raum umfassen kann;

σ die Oberfläche oder die Oberflächen, die S begrenzen;

t die Zeit;

ϱ die Dichte;

in *cartesischen Koordinaten* bezeichne ferner

x, y, z die Koordinaten eines Punktes des elastischen Systems im „natürlichen" Zustand;

u, v, w die Komponenten der Verschiebung des Punktes (x, y, z);

X, Y, Z die auf die Masseneinheit bezogenen Komponenten der Massenkräfte;

X_n, Y_n, Z_n die auf die Flächeneinheit bezogenen Komponenten der an den Punkten von σ angreifenden Oberflächenspannungen, wobei n die Richtung der Normalen von σ bedeutet, die nach dem Innern von S zeigt;

$x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ die Formänderungskomponenten (Deformationsgrössen);

$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ die Komponenten des Spannungszustandes;

Θ; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ die Dilatation und die Komponenten der „mittleren Rotation" (des halben „curl");

f das auf die Volumeinheit bezogene elastische Potential, das, als abhängig von den Formänderungskomponenten betrachtet, eine negativ definite quadratische Form ist, die folgendermassen geschrieben werden soll:

$$(1)\quad \begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 &+ 2a_{12} x_x y_y + 2a_{13} x_x z_z + 2a_{14} x_x y_z + 2a_{15} x_x z_x + 2a_{16} x_x x_y \\ &+ a_{22} y_y^2 \quad + 2a_{23} y_y z_z + 2a_{24} y_y y_z + 2a_{25} y_y z_x + 2a_{26} y_y x_y \\ &\qquad\qquad + a_{33} z_z^2 \quad + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots \end{aligned}$$

Im allgemeinsten Fall besitzt sie 21 Koeffizienten, die konstant zu

halten sind, wenn das elastische System homogen und keinen Temperaturänderungen unterworfen ist;

in *krummlinigen rechtwinkligen Koordinaten* dagegen bezeichne

q_1, q_2, q_3 die Koordinaten eines Punktes des elastischen Systems im natürlichen Zustand;

$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2$ das Quadrat des Bogenelements;

$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ die Komponenten der Verschiebung des Punktes (q_1, q_2, q_3) nach den entsprechenden Koordinatenrichtungen;

F_1, F_2, F_3 die Komponenten der Massenkräfte;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Komponenten der an den Elementen von σ angreifenden Oberflächenspannungen;

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Formänderungskomponenten;

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ die Komponenten des Spannungszustandes;

Θ; $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ die Dilatation und die Komponenten der mittleren Rotation;

Π das auf die Volumeinheit bezogene Potential, das sich mittels der Deformationsgrössen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \omega_3$ in derselben Form (1) ausdrückt mit Koeffizienten, die im allgemeinen Funktionen von q_1, q_2, q_3 sind.

2. Formulierung des Integrationsproblems in cartesischen Koordinaten.

Das allgemeinste Problem in der Elastizitätstheorie ist das Problem der *Bewegung* eines elastischen Systems. Dasselbe lässt sich so aussprechen: *Gegeben sind als Funktionen der Zeit die Massenkräfte, die auf die Teilchen eines in Bewegung befindlichen elastischen Systems wirken, und die Spannungen, die an der Oberfläche angreifen, ausserdem der Anfangszustand des Systems; es soll die Deformation bestimmt werden, die das System zu beliebiger Zeit erfährt.*

Das besondere Problem des *Gleichgewichts* eines elastischen Systems lässt sich so formulieren: *Gegeben sind die Massenkräfte, die auf die Teilchen eines im Gleichgewicht befindlichen elastischen Systems wirken, und die Spannungen, die an der Oberfläche angreifen; es soll die Deformation bestimmt werden, die das System erfährt.*

Ist für ein elastisches System, das einen gegebenen Raum S erfüllt, bei beliebig gegebenen äusseren Kräften und Anfangsbedingungen das Bewegungsproblem lösbar, so ist natürlich auch stets das Gleichgewichtsproblem bei beliebig vorgeschriebenen äusseren Kräften lösbar.

2a. Die allgemeinen Grundgleichungen und die Hauptprobleme der Integration. Indem die sogenannte mathematische Elastizitätstheorie sich auf unendlich kleine Deformationen beschränkt, stehen

ihr für die Lösung der genannten Probleme die in IV 23, Nr. 5b gegebenen Grundgleichungen zur Verfügung.

Es sind dies für die Lösung des *Bewegungsproblems* zunächst die drei *Hauptgleichungen*, die für jeden Punkt des elastischen Systems befriedigt sein müssen:

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varrho X - \dfrac{\partial X_x}{\partial x} - \dfrac{\partial X_y}{\partial y} - \dfrac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varrho Y - \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varrho Z - \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Hierin sind die Spannungskomponenten, unter Voraussetzung eines elastischen Potentials f, durch die Formänderungskomponenten vermöge der Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} X_x = \dfrac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z = Z_y = \dfrac{\partial f}{\partial y_z}, \\ Y_y = \dfrac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_x = X_z = \dfrac{\partial f}{\partial z_x}, \\ Z_z = \dfrac{\partial f}{\partial z_z}, & X_y = Y_x = \dfrac{\partial f}{\partial x_y} \end{cases}$$

gegeben. Damit werden, da für die Formänderungskomponenten x_x, …, x_y die Beziehungen

$$(4)\quad \begin{cases} x_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & y_z = z_y = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ y_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & z_x = x_z = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ z_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, & x_y = y_x = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

gelten, die Gleichungen (2) drei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Verschiebungskomponenten u, v, w als Funktionen der unabhängigen Variabeln x, y, z, t. Zu diesen Gleichungen treten, wenn es sich um einen begrenzten elastischen Körper handelt, die *Oberflächen-* oder *Randbedingungen:*

$$(5)\quad \begin{cases} X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z), \\ Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \\ Z_n = Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z). \end{cases}$$

Drittens sind die *Anfangsbedingungen* zu berücksichtigen, welche ausdrücken, dass $u, v, w; \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ zur Zeit $t = 0$ als übrigens willkürliche Funktionen von x, y, z gegeben sind.

Beim *Gleichgewichtsproblem* fallen die Anfangsbedingungen fort. Die Hauptgleichungen (2) erhalten die einfachere Form:

$$(2')\qquad \begin{cases} \varrho X = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varrho Y = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varrho Z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind wieder durch (5) gegeben.

Analytisch kommt also das *Bewegungsproblem* eines elastischen Systems auf folgendes *Integrationsproblem* hinaus: *Es sollen drei Funktionen* u, v, w *von* x, y, z, t *so bestimmt werden, dass sie in jedem Punkte von* S *und für einen beliebigen Wert der Zeit* $t > t_0$ — wo t_0 der Wert von t im Anfange der Bewegung ist — *das System* (2) *partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung befriedigen, auf dem Rande* σ *von* S *den Bedingungen* (5) *genügen und für* $t = t_0$ *die Grössen* $u, v, w;$ $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ *sechs gegebenen Funktionen von* x, y, z *gleich werden.* Gewöhnlich fordert man, dass u, v, w — gemäss der Erfahrung — in speziell einfacher Weise, z. B. trigonometrisch von t abhängen, in welchem Falle Randwerte nicht gegeben sind.

Dagegen ist im Falle des *Gleichgewichts* das *Integrationsproblem* folgendes: *Es sollen drei Funktionen* u, v, w *von* x, y, z *so bestimmt werden, dass sie in jedem Punkte von* S *das Gleichungssystem* (2') *und auf der Begrenzung* σ *von* S *die Bedingungen* (5) *befriedigen.*

Die physikalische Erfahrung zeigt, dass, wenn im Falle der Bewegung die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n als Funktionen der Zeit gegeben sind und der Anfangszustand vorgeschrieben ist, die Deformation des Systems zu jeder Zeit $t > t_0$ eindeutig bestimmt ist. Ebenso lehrt die Erfahrung im Falle des Gleichgewichts, dass bei gegebenen Massenkräften X, Y, Z und bei gegebenen Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n das elastische System eine eindeutig bestimmte Deformation erfährt. Wie bei jedem Problem der mathematischen Physik, so ist auch im Falle der Elastizität nach Aufstellung der Gleichungen, die das Problem analytisch repräsentieren, die Übereinstimmung der allgemeinen Erfahrungssätze mit der mathematischen Grundlage darzulegen. Es ist also nachzuweisen,

1) dass unsere Gleichungen unter den angegebenen Bedingungen höchstens eine eindeutig bestimmte Lösung haben;

2) dass eine Lösung, jedenfalls unter möglichst wenig beschränkenden Bedingungen, tatsächlich existiert.

Der ersten Forderung entspricht das *Eindeutigkeitstheorem*, der zweiten das *Existenztheorem*. — Hinterher sind dann *Integrationsmethoden* anzugeben, nach denen in jedem Fall die Lösung mittels mehr oder minder verwickelter analytischer Prozesse tatsächlich gefunden werden kann.

Im folgenden ist stets angenommen, dass die gegebenen Grössen im ganzen Bereich, in dem sie definiert sind, sich „regulär" verhalten, d. h. endliche, einwertige Funktionen sind und alle Ableitungen besitzen, die in Frage kommen; ebenso wird, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, verlangt, dass die zu bestimmenden Grössen in dem entsprechenden Existenzbereich denselben Bedingungen genügen.

2b. **Die speziellen Formen des elastischen Potentials für die verschiedenen Krystallgruppen.** Die Integrationsprobleme des Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Körper vereinfachen sich für spezielle Formen des elastischen Potentials f, weil hierdurch die Gleichungen (2) bzw. (2') unter Zuziehung der Beziehungen (3) und (4) eine einfachere Gestalt erhalten. Diese Vereinfachung tritt jedesmal ein, wenn das elastische System irgend welche elastische Symmetrieeigenschaften besitzt.

Man spricht von einer Symmetrieeigenschaft eines elastischen Systems, wenn das entsprechende elastische Potential f für eine bestimmte Gruppe von Koordinatentransformationen ungeändert bleibt[1]). Diese Transformationsgruppe definiert die elastische Symmetrie. Ist die Transformationsgruppe, bei der f ungeändert bleibt, die sogenannte „Hauptgruppe" (unter Ausschluss der Ähnlichkeitstransformationen), so nennt man das System *isotrop*; f erfährt hier seine grösste Reduktion (vgl. die folgende Nr. 2c).

Die Hauptgruppe der Koordinatentransformationen, die den Ursprungspunkt ungeändert lassen, setzt sich aus Drehungen und der Inversion am Koordinatenanfangspunkt zusammen. Letztere aber lässt f an sich ungeändert. Man erhält daher alle möglichen Reduktionen, die f infolge einer elastischen Symmetrieeigenschaft erfahren kann, indem man sämtliche Reduktionen ermittelt, die sich für f aus dem Vorhandensein einer Drehungsaxe von bestimmter beliebiger Ordnung, ergeben. Unter der Ordnung einer Drehungsaxe versteht man die niedrigste zur Identität führende Potenz der Drehung. Schliesst man den Fall einer Isotropieaxe aus, so muss der Drehungswinkel ein gebrochenes Vielfaches von 2π betragen.

1) Vgl. IV 14, Nr. 21 (*M. Abraham*).

In der Natur besitzen elastische Symmetrieeigenschaften ausser den isotropen Körpern die Krystalle. Für sie gilt die Hypothese von *F. Neumann*[2]), wonach *jede krystallographische Symmetrie mit einer elastischen Symmetrie zusammenfällt und zwei krystallographisch gleichwertige Axen hinsichtlich der elastischen Eigenschaften des Körpers vertauschbar sind.*

Ein Krystall kann, sofern man Isotropieaxen ausschliesst, nur eine 2-, 3-, 4-, 6-zählige Symmetrieaxe haben (vgl. V 7, Nr. **25**, *Th. Liebisch, A. Schoenflies, O. Mügge*). Um daher die den verschiedenen Krystallsystemen entsprechenden Formen von f zu ermitteln, genügt es, die Reduktion zu bestimmen, die f beim Vorhandensein einer Symmetrieaxe von der Ordnung 2, 3, 4, 6 erfährt. Es ist jedoch die Tatsache bemerkenswert, dass aus der Annahme von f als einer quadratischen Funktion der Formänderungskomponenten schon folgt, dass f nur bei Vorhandensein einer 2-, 3-, 4-zähligen Symmetrieaxe eine Form besitzt, die von derjenigen im Falle einer Isotropieaxe verschieden ist[3]).

Die den 2-, 3-, 4-, 6-zähligen Symmetrieaxen entsprechenden Formen von f bestimmt man am einfachsten in der Weise, dass man die z-Axe mit der Drehungsaxe zusammenfallen lässt und nun den Ausdruck von f ansetzt, der sich bei einer Drehung der x- und y-Axen in ihrer Ebene bezüglich um die Winkel π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{3}$ ergiebt. Man erhält durch den Vergleich mit der ursprünglichen Form von f gewisse Relationen für die Koeffizienten, in denen die Spezialisierung von f sich ausdrückt. Um die entsprechende Reduktion von f für den Fall einer mit der x- oder der y-Axe zusammenfallenden Symmetrieaxe zu finden, hat man natürlich die Indices 1, 2, 3 und 4, 5, 6 nur ein- oder zweimal cyklisch zu vertauschen.

Bezüglich der Aufzählung und Bezeichnungsweise der unabhängigen Symmetrieelemente, die die 32 Krystallgruppen kennzeichnen, verweisen wir auf das schon genannte Referat über Krystallographie (V 7). Hier sei nur bemerkt, dass diese 32 Gruppen hinsichtlich jeder Eigenschaft, die wie die der elastischen Symmetrie von der Existenz eines Symmetriezentrums nicht berührt wird, in 11 Klassen zerfallen, und dass diese Klassen 9 verschiedene Formen für den Ausdruck von f zulassen, so dass die 32 Krystallgruppen hinsichtlich der auf den Ausdruck des elastischen Potentials bezüglichen Eigenschaften sich in nur neun verschiedene Kategorien sondern.

---

2) Theorie der Elastizität, p. 164.

3) Vgl. z. B. *C. Somigliana*, Roma Acc. Linc. Rend. (5) 3^1 (1894), p. 238 und (5) 4^1 (1895), p. 25, sowie Ann. di mat. (3) 7 (1902), p. 129.

Bezeichnen A_x^n, A_y^n, A_z^n den Koordinatenrichtungen x, y, z entsprechende n-zählige Symmetrieaxen und das Zeichen $\sim$ die Gleichwertigkeit zweier Axen, so ergiebt sich für die Gesamtheit der unabhängigen krystallinischen Symmetrien und die diesen 11 Klassen entsprechenden Formen von f folgende Liste[4]):

1. Triklines System: f besitzt die allgemeinste Form mit 21 Konstanten.

2. Monoklines System: A_z^2, f hängt von 13 Konstanten ab,

$$\begin{array}{llllll} f = c_{11}x_x^2 & + 2c_{12}x_xy_y & + 2c_{13}x_xz_z & & & + 2c_{16}x_xx_y \\ & + c_{22}y_y^2 & + 2c_{23}y_yz_z & & & + 2c_{26}y_yx_y \\ & & + c_{33}z_z^2 & & & + 2c_{36}z_zx_y \\ & & & + c_{44}y_z^2 & + 2c_{45}y_zz_x & \\ & & & & + c_{55}z_x^2 & \\ & & & & & + c_{66}x_y^2. \end{array}$$

3. Rhombisches System: $A_z^2A_x^2$, f hängt von 9 Konstanten ab,

$$\begin{array}{llll} f = c_{11}x_x^2 & + 2c_{12}x_xy_y & + 2c_{13}x_xz_z & \\ & + c_{22}y_y^2 & + 2c_{23}y_yz_z & \\ & & + c_{33}z_z^2 & \\ & & & + c_{44}y_z^2 + c_{55}z_x^2 + c_{66}x_y^2. \end{array}$$

4. Rhomboëdrisches System: $A_z^3A_x^2$, f hängt von 6 Konstanten ab,

$$\begin{array}{llllll} f = c_{11}x_x^2 & + 2c_{12}x_xy_y & + 2c_{13}x_xz_z & + 2c_{14}x_xy_z & & \\ & + c_{11}y_y^2 & + 2c_{13}y_yz_z & - 2c_{14}y_yy_z & & \\ & & + c_{33}z_z^2 & & & \\ & & & + c_{44}y_z^2 & & \\ & & & & + c_{44}z_x^2 + 2c_{14}z_xx_y & \\ & & & & & + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})x_y^2. \end{array}$$

5. Rhomboëdrisches System: A_z^3, f hängt von 7 Konstanten ab,

$$\begin{array}{lllllll} f = c_{11}x_x^2 & + 2c_{12}x_xy_y & + 2c_{13}x_xz_z & + 2c_{14}x_xy_z & + 2c_{15}x_xz_x & & \\ & + c_{11}y_y^2 & + 2c_{13}y_yz_z & - 2c_{14}y_yy_z & - 2c_{15}y_yz_x & & \\ & & + c_{33}z_z^2 & & & & \\ & & & + c_{44}y_z^2 & & - 2c_{15}y_zx_y & \\ & & & & + c_{44}z_x^2 & + 2c_{14}z_xx_y & \\ & & & & & & + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})x_y^2. \end{array}$$

4) *F. Neumann*, Elastizität, p. 164; *Kirchhoff*, Mechanik, p. 389; *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 16 (1882), p. 275; *W. Voigt*, Rapport, Paris; *B. Minnigerode*, Gött. Nachr. 1884, p. 195, 374, [illegible]

6. Tetragonales System: $A_z^4 A_x^2$, f hängt von 6 Konstanten ab,

$$\begin{aligned} f = c_{11} x_x^2 &+ 2c_{12} x_x y_y + 2c_{13} x_x z_z \\ &+ c_{11} y_y^2 \quad + 2c_{13} y_y z_z \\ &\qquad\qquad + c_{33} z_z^2 \\ &+ c_{44}(y_z^2 + z_x)^2 + c_{66} x_y^2. \end{aligned}$$

7. Tetragonales System: A_z^4, f hängt von 7 Konstanten ab,

$$\begin{aligned} f = c_{11} x_x^2 &+ 2c_{12} x_x y_y + 2c_{13} x_x z_z && + 2c_{16} x_x x_y \\ &+ c_{11} y_y^2 \quad + 2c_{13} y_y z_z && - 2c_{16} y_y x_y \\ &\qquad\qquad + c_{33} z_z^2 && \\ &+ c_{44}(y_z^2 + z_x^2) && + c_{66} x_y^2; \end{aligned}$$

8. und 9. Hexagonales System: $A_z^6 A_x^2$ bezw. A_z^6, die z-Axe ist Isotropieaxe, und f hängt von 5 Konstanten ab,

$$\begin{aligned} f = c_{11} x_x^2 &+ 2c_{12} x_x y_y \qquad + 2c_{13} x_x z_z \\ &+ c_{11} y_y^2 \qquad\qquad + 2c_{13} y_y z_z \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + c_{33} z_z^2 \\ &+ c_{44}(y_z^2 + z_x^2) + \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) x_y^2. \end{aligned}$$

10. und 11. Reguläres System: $A_z^4 A_x^4$ bezw. $A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2$. f hängt von drei Konstanten ab,

$$f = c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2c_{12}(x_x y_y + y_y z_z + z_z x_x) + c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2).$$

In den vorstehenden Ausdrücken von f sind die Koordinatenaxen in besonderer Weise gewählt; lässt man die Lage dieser Axen unbestimmt, so gehen in jeden der Ausdrücke von f noch drei andere willkürliche Konstanten ein.

2c. Der besondere Fall der Isotropie. Die stärkste Reduktion erfährt die Form des elastischen Potentials selbstverständlich in dem Falle, wo das elastische System *isotrop* ist. In diesem Falle bleibt der Ausdruck von f bei jeder Koordinatentransformation ungeändert. Er muss daher die für den Fall des regulären Systems geltende Form haben und behält sie, wie auch die Koordinatenaxen liegen mögen. Der für das reguläre System geltende Ausdruck für f lässt sich schreiben (vgl. Nr. 2b, 10):

$$\begin{aligned} f = c_{12}(x_x + y_y + z_z)^2 &+ (c_{11} - c_{12})(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2) \\ &+ (c_{44} + \tfrac{1}{2} c_{12} - \tfrac{1}{2} c_{11})(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2). \end{aligned}$$

Da nun die Grössen

$$x_x + y_y + z_z, \quad x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2$$

bei beliebigen Koordinatentransformationen ungeändert bleiben, also

sogenannte Deformationsinvarianten vorstellen, während der Ausdruck

$$y_z^2 + z_x^2 + x_y^2$$

diese Eigenschaft nicht besitzt, so folgt, dass im Falle der Isotropie

$$c_{44} + \tfrac{1}{2} c_{12} - \tfrac{1}{2} c_{11} = 0$$

sein muss. Führt man für die beiden Konstanten $-2c_{12}$ und $-(c_{11} - c_{12})$ die *Lamé*'sche Bezeichnung λ und μ ein, so wird der Ausdruck des *elastischen Potentials für das isotrope System:*

$$(6) \quad -2f = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2).$$

Daraus folgen die *Spannungskomponenten* in der Form:

$$(7) \quad \begin{cases} X_x = -\lambda(x_x + y_y + z_z) - 2\mu x_x, & Y_z = -\mu y_z, \\ Y_y = -\lambda(x_x + y_y + z_z) - 2\mu y_y, & Z_x = -\mu z_x, \\ Z_z = -\lambda(x_x + y_y + z_z) - 2\mu z_z, & X_y = -\mu x_y, \end{cases}$$

während die *Grundgleichungen* (2) *der Bewegung* sich auf eine der beiden äquivalenten Formen:

$$(8) \quad \begin{cases} \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \varrho\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right) = \mu \Delta v + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \varrho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right) = \mu \Delta w + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

oder

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right) = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu\left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varpi_3}{\partial y}\right), \\ \varrho\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right) = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + 2\mu\left(\frac{\partial \varpi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right), \\ \varrho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right) = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + 2\mu\left(\frac{\partial \varpi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varpi_2}{\partial x}\right) \end{cases}$$

bringen lassen; hierbei ist:

$$(10) \quad \begin{cases} \Theta = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varpi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \varpi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \varpi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Die *Randbedingungen* lassen sich auf folgende Form bringen:

$$(11) \quad \begin{cases} X_n + \lambda\Theta\cos(nx) + 2\mu\frac{du}{dn} + 2\mu[\varpi_3\cos(ny) - \varpi_2\cos(nz)] = 0, \\ Y_n + \lambda\Theta\cos(ny) + 2\mu\frac{dv}{dn} + 2\mu[\varpi_1\cos(nz) - \varpi_3\cos(nx)] = 0, \\ Z_n + \lambda\Theta\cos(nz) + 2\mu\frac{dw}{dn} + 2\mu[\varpi_2\cos(nx) - \varpi_1\cos(ny)] = 0, \end{cases}$$

wo das Symbol $\frac{d}{dn}$ die Ableitung nach der positiven Richtung der

Normalen n von σ bedeutet.

In ähnlicher Weise ergeben sich als *Hauptgleichungen für das Gleichgewicht*:

$$(8') \quad \begin{cases} \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \varrho X = 0, \\ \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \varrho Y = 0, \\ \mu \Delta w + (\lambda + \mu) \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \varrho Z = 0; \end{cases}$$

die Randbedingungen bleiben die gleichen.

Die in den Gleichungen (6) bis (11) auftretenden Konstanten λ und μ haben, genau wie die Koeffizienten c_{ik} des allgemeinen Ausdrucks von f, dieselbe Dimension wie die Spannungen, können also in derselben Masseinheit ausgedrückt werden. Die Hypothese, dass f eine negativ definite Form sei, unterwirft λ und μ den Beschränkungen:

$$(12) \qquad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0;$$

diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend, um die negativ definite Natur der Form f sicher zu stellen.

Statt der beiden *Lamé*'schen Konstanten λ und μ werden oft andere Konstanten benutzt, so vor allem:

der *Young'sche Modul* oder *Elastizitätsmodul*: $E = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$;

die *Poisson'sche Konstante:* $\eta = \frac{1}{2} \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$ mit $-1 < \eta < \frac{1}{2}$;

Kirchhoff gebraucht die Konstanten $K = \mu$ und $\theta = \dfrac{\lambda}{2\mu}$;

in der Theorie der Schwingungen andererseits sind die Konstanten $b^2 = \dfrac{2\mu}{\varrho}$, $a^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\varrho}$ gebräuchlich, die bezüglich die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und der transversalen Wellen darstellen. (Vgl IV 26, Nr. 8, *H. Lamb.*)

3. Reduktion des allgemeinen elastischen Problems auf den Fall verschwindender äusserer Kräfte. Sind die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n von der Zeit unabhängig — und mit diesem Fall hat sich die Elastizitätstheorie in erster Linie zu beschäftigen —, so lässt sich das *Problem der Bewegung* eines elastischen Systems sehr leicht auf ein Gleichgewichtsproblem und ein auf eine bestimmte Konfiguration bezogenes Bewegungsproblem, das *verschwindenden äusseren Kräften* entspricht, zurückführen[5]). In

5) *A. Clebsch*, Elasticität, p. 40; *Clebsch-Saint-Venant*, Élasticité, p. 53. Für den Fall, dass die Massenkräfte Funktionen der Zeit sind, haben *J. Lorenz*

der Tat, stellen u, v, w die Lösung des Bewegungsproblems dar, das den gegebenen äusseren Kräften: X, Y, Z; X_n, Y_n, Z_n und einer beliebigen Anfangskonfiguration entspricht; ferner u', v', w' die Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichtes, das denselben äusseren Kräften entspricht, dann werden $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$ für dasselbe elastische System die Lösung des Bewegungsproblems liefern, das den äusseren Kräften null entspricht, bezogen auf die Gleichgewichtskonfiguration, die durch die Verschiebungen u', v', w' bestimmt ist.

Das *Gleichgewichtsproblem* lässt sich seinerseits stets auf den Fall zurückführen, wo die Massenkräfte null sind[6]). Bezeichnen nämlich u, v, w die Verschiebungskomponenten, die ein gegebenes Problem elastischen Gleichgewichts lösen, und sind u', v', w' partikuläre Integrale der Grundgleichungen $(2')$[6a]), so bedeuten

$$u'' = u - u', \quad v'' = v - v', \quad w'' = w - w'$$

die Verschiebungskomponenten, die ein gleiches Problem für den Fall *verschwindender Massenkräfte* lösen. Sind für u, v, w die Werte auf σ vorgeschrieben, so sind auch für u'', v'', w'' die Randwerte gegeben. Sind die Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n vorgeschrieben, so entsprechen u'', v'', w'' den Oberflächenspannungen $X_n - X_n'$, $Y_n - Y_n'$, $Z_n - Z_n'$, wo X_n', Y_n', Z_n' die mit u', v', w' gebildeten, zu X_n, Y_n, Z_n analogen Ausdrücke. Ähnliches gilt im Falle gemischter Randbedingungen.

4. Einordnung der thermischen Deformation in die allgemeine Theorie. Der Fall der thermischen Deformation[7]) ordnet sich analytisch sofort dem allgemeinen Problem der rein elastischen Formänderungen unter. In der Tat macht man bei Zuführung nur kleiner Wärmemengen die Voraussetzung, dass die erfolgende Deformation sich als Superposition einer nur von der kleinen Temperaturerhöhung τ herrührenden Deformation und derjenigen auffassen lässt, die im all-

J. f. Math. 58 (1861), p. 329; *O. Tedone,* Torino Mem. (2) 47 (1896), p. 47, 227; *C. Somigliana,* Torino Atti 41 (1906), p. 60 die entsprechende Reduktion gegeben.

6) *E. Betti,* Elasticità, p. 35.

6a) Für einen isotropen Körper besitzt man z. B. in den durch die Formeln (42) in Nr. **10**c gegebenen Funktionen u_1, u_2, u_3 oder auch in den durch (45) in Nr. **10**d gegebenen Funktionen u_0, v_0, w_0 ein solches partikuläres Integralsystem.

7) *J. M. C. Duhamel,* Paris Mém. div. sav. (2) 5 (1838), p. 440; *F. Neumann,* Berlin Abh. 1841, 2. Teil; Elasticität, p. 107; *Betti,* Elasticità, p. 98; *C. W. Borchardt,* Berlin Monatsber. 1873, p. 9 = Ges. Werke, p. 248; *J. Hopkinson,* Mess. of math. (2) 8 (1879), p. 168 = Original papers 2, Cambr. 1901, p. 357; *E. Cesàro,* Elasticità, p. 128; *P. Alibrandi,* Giorn. di mat. 38 (1900), p. 77.

gemeinen den durch die Temperaturerhöhung im Körper hervorgerufenen elastischen Spannungen entspricht. Diese elastischen Spannungen werden damit durch die Relationen (3) gegeben, zu denen sich jeweils ein mit der Temperaturerhöhung proportionales Glied addiert (vgl. IV 23, Nr. 5c, *C. H. Müller-A. Timpe*):

$$X_x' = \frac{\partial f}{\partial x_x} + q_1\tau, \cdots, \quad X_y' = \frac{\partial f}{\partial x_y} + q_6\tau.$$

Beschränkt man sich auf den Fall eines *homogen isotropen* Körpers, so werden $q_4 = q_5 = q_6 = 0$, $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Es ergeben sich dann die von *J. M. C. Duhamel* und *Fr. Neumann*[7]) zum ersten Male abgeleiteten Formeln in den Spannungskomponenten

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x_z} + q\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y_z} + q\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z_z} + q\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

und entsprechend die Randbedingungen. Aus ihnen geht hervor, dass die durch die Temperaturerhöhung τ im Innern des elastischen Körpers hervorgerufene Wirkung gleich derjenigen ist, die ein im Temperaturgleichgewicht befindlicher Körper von einem System von Massenkräften:

$$-q\frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad -q\frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad -q\frac{\partial \tau}{\partial z},$$

die ein Potential $-q\tau$ haben, und einem normal zur Oberfläche wirkenden Druck $q\tau$ erfährt.

Aus (13) und den zugehörigen Randbedingungen folgen sofort die Gleichungen in den Verschiebungen u, v, w. Führt man den Koeffizienten k der linearen Ausdehnung durch die Relation

$$k = \frac{q}{3\lambda + 2\mu}$$

ein, so werden die Gleichungen, die die Deformation, welche der Körper infolge der Erwärmung erfährt, bestimmen, die folgenden:

$$(13')\quad \begin{cases} (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu\Delta u = k(3\lambda + 2\mu)\frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu\Delta v = k(3\lambda + 2\mu)\frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu\Delta w = k(3\lambda + 2\mu)\frac{\partial \tau}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda\Theta\cos(nx) + 2\mu\frac{du}{dn} + 2\mu[\varpi_3\cos(ny) - \varpi_2\cos(nz)] \\ \qquad = k(3\lambda + 2\mu)\tau\cos(nx), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ist die Temperaturerhöhung τ als Funktion des Ortes nicht gegeben, so tritt zu diesem Gleichungssystem noch die korrigierte *Fourier*'sche Wärmeleitungsgleichung [7a])

$$\gamma_v\frac{\partial\tau}{\partial t} = \varkappa\Delta\tau - q\tau\frac{\partial\Theta}{\partial t}$$

mit der Randbedingung:

$$0 = \varkappa\frac{\partial\tau}{\partial n} + \bar{\varkappa}(\tau - \bar{\tau})$$

hinzu; hier bedeutet γ_v die spezifische Wärme bei konstanten Volumen, $\varkappa$ die innere, $\bar{\varkappa}$ die äussere Wärmeleitungsfähigkeit und $\bar{\tau}$ die Temperatur der Umgebung.

Betreffs der Lösungen der Gleichungen (13′) und (14) kann man die Bemerkungen der vorstehenden Nr. **3** heranziehen, dass stets, wenn das Problem des elastischen Gleichgewichts bei beliebigen Oberflächenspannungen und *verschwindenden* Massenkräften sich lösen lässt, dasselbe Problem auch bei beliebigen Oberflächenspannungen und *beliebigen* Massenkräften gelöst werden kann. Es folgt daraus, dass man unter derselben Bedingung auch zur Lösung des Problems der thermischen Deformationen eines homogenen und isotropen Körpers gelangen kann. So erhält man z. B. eine partikuläre Lösung der Gl. (13), wenn man setzt:

$$(15)\qquad u = -\frac{k}{4\pi}\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\tau\,dS}{r}, \dots,$$

wo r die Entfernung des Punktes (x, y, z) von einem anderen, variablen Punkte des Körpers ist. Der Deformation (15) entsprechen die Oberflächenspannungen:

$$(16)\quad X_n = k\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\left(-\lambda\tau\cos(nx) + \frac{\mu}{2\pi}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\tau\,dS}{r}\right), \dots,$$

so dass, wenn τ bekannt ist, die entsprechende thermische Deformation die Resultante aus der Deformation (15) und derjenigen ist, die den Massenkräften null und den durch

$$(17)\quad \begin{aligned} & -k(3\lambda + 2\mu)\tau\cos(nx) \\ & + k\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\left(-\lambda\tau\cos(nx) + \frac{\mu}{2\pi}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\tau\,dS}{r}\right), \dots \end{aligned}$$

gegebenen Oberflächenspannungen entspricht.

7a) *Fr. Neumann,* Theorie der Elastizität, p. 118.

5. Die Grundgleichungen in rechtwinkligen, krummlinigen Koordinaten.

5a. Die Einführung krummliniger Koordinaten. Betreffs der ausführlichen Darlegung der allgemeinen Prinzipien, die für die Transformation der Gleichungen der Elastizität und überhaupt der mathematischen Physik auf krummlinige Koordinaten als Grundlage dienen, verweisen wir auf IV 14, Nr. **20** (*M. Abraham*). Es mag jedoch hier an folgendes erinnert werden:

a) die allgemeinste Methode zur Durchführung dieser Transformation rührt von *G. Ricci*[8]) her; er gründet sie auf seinen sog. *absoluten Kalkül*;

b) das direkteste und gleichzeitig älteste Verfahren andererseits ist das von *G. Lamé*[9]); dasselbe gründet sich unmittelbar auf die allgemeinen Regeln der Transformation von Funktionen und unabhängigen Variabeln, wie sie in der Infinitesimalrechnung gegeben werden;

c) diese zwar mühsamen, aber nicht uneleganten Rechnungen werden merklich der Auffassung näher gerückt durch Einführung eines *beweglichen Trieders*, dessen Axen in jedem Punkte des Raumes mit den Tangenten der durch den Punkt gehenden Koordinatenlinien zusammenfallen, und durch Benutzung der kinematischen Eigenschaften des beweglichen Trieders[10]);

d) ausser diesen Methoden giebt es noch eine andere, die oft angewendet wird und sich auf die *Variationsrechnung* stützt; das erste Beispiel derselben gab *C. G. J. Jacobi* durch die Transformation der Differentialgleichung $\Delta = 0$.[11]) Diese Methode ermöglicht die Transformation von Differentialausdrücken 2. Ordnung, die in dem Ausdrucke der ersten Variation eines Integrals auftreten, durch blosse direkte Transformation von Ausdrücken, die nur erste Ableitungen enthalten. Für den vorliegenden Fall der Gleichungen der Elastizität reicht man dementsprechend damit aus, das elastische Potential, die lebendige Kraft des Systems und die Elementararbeit der äusseren Kräfte auf krummlinige Koordinaten zu transformieren. Es genügt dann, das

---

8) *G. Ricci*, Lezioni sulla teoria delle superficie, Padua 1898; *G. Ricci* und *T. Levi-Civita*, Math. Ann. 54 (1900), p. 125.

9) *G. Lamé*, J. éc. polyt. 3 (1834), p. 215, 247; Coordonnées curvilignes, Paris 1859.

10) *O. Bonnet*, J. éc. polyt. 18 (1845), p. 171; *R. R. Webb*, Mess. of Math. 11 (1882), p. 146; *A. E. H. Love*, Elasticity (1. ed.) 1, chapter VII, p. 199.

11) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 36 (1848), p. 179 = Ges. Werke 2, p. 198.

Hamilton'sche Prinzip oder auch das der virtuellen Geschwindigkeiten anzuwenden, um sofort die gewünschten Gleichungen zu erhalten[12]).

Bemerkenswert ist jedoch, dass die Gleichungen der Elastizität in ihrer endgültigen Form von der besonderen Gestalt des *Euklidi*schen Bogenelements abhängen, und dass, während die direkte Methode von *Lamé*, auch in ihrer durch Einführung des beweglichen Trieders modifizierten Form, von vornherein an dieser Annahme festhält, die *Ricci*'sche und die auf die Variationsrechnung gegründete Methode zu Gleichungen führen, die auch im allgemeinen Falle eines beliebigen Bogenelementes gelten.

5b. Die Grundgleichungen für den anisotropen Fall. Was nun zunächst *das elastische Potential* anbetrifft, so ist Π für die einzelnen Krystallgruppen dieselbe Funktion von $\theta_1, \theta_2, \ldots, \omega_3$ wie f von $x_x, y_y, \ldots, x_y$; nur sind die Koeffizienten Funktionen von q_1, q_2, q_3, es sei denn, dass auch die elastischen Eigenschaften des Materials selbst eine dem Gesetz der krummlinigen Koordinaten entsprechende Verteilung aufweisen, d. h. dass die elastischen Eigenschaften so variieren, dass sie in Bezug auf die durch jeden Punkt gehenden Koordinatenlinien stets in derselben Weise orientiert bleiben.

Es ergiebt sich, dass die *Hauptgleichungen* und die *Randbedingungen* sich folgendermassen in rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten darstellen:

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho\,\dfrac{\partial^2 \varkappa_i}{\partial t^2} = \varrho F_i - \dfrac{1}{\nabla}\displaystyle\sum_{j=1}^{j=3} \dfrac{\partial\left(\nabla \dfrac{\partial \Pi}{\partial \varkappa_{ij}}\right)}{\partial q_j} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial \varkappa_i}, \\[2ex] \varphi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=3} Q_j \dfrac{\partial \Pi}{\partial \varkappa_{ij}} \cos(n q_j), \end{cases}$$

wo

$$\varkappa_{ij} = \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_j}, \quad \nabla = Q_1 Q_2 Q_3.$$

Zugleich gelten die Beziehungen:

$$(19)\quad \begin{cases} \theta_i = \dfrac{\varkappa_{ij}}{Q_i} + \dfrac{1}{Q_i}\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_{i+1}}\,\dfrac{\varkappa_{i+1}}{Q_{i+1}} + \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_{i+2}}\,\dfrac{\varkappa_{i+2}}{Q_{i+2}}\right), \\[2ex] \omega_i = \dfrac{\varkappa_{i+1,\,i+2}}{Q_{i+2}} + \dfrac{\varkappa_{i+2,\,i+1}}{Q_{i+1}} \\[2ex] \qquad - \dfrac{1}{Q_{i+1} Q_{i+2}}\left(\dfrac{\partial Q_{i+1}}{\partial q_{i+2}}\varkappa_{i+1} + \dfrac{\partial Q_{i+2}}{\partial q_{i+1}}\varkappa_{i+2}\right), \end{cases}$$

12) *E. Cesàro*, Elasticità, XXI, p. 183; *C. W. Borchardt*, J. f. Math. 67 (1873), p. 45; *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 10 (1881), p. 188.

wodurch die *Formänderungskomponenten* gegeben werden. Die Indices sind hier nach dem Modul 3 genommen.

Die Gleichungen (18) gelten zunächst, welchen Ausdruck auch das Quadrat des Bogenelements, ds^2, haben mag, und sind daher unabhängig vom Euklidischen Axiom. Will man die Anwendung auf den gewöhnlichen Raum machen, so ist zu beachten, dass sich das Quadrat des Bogenelements

$$ds^2 \equiv Q_1 dq_1^2 + Q_2 dq_2^2 + Q_3 dq_3^2$$

in der Form $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ durch drei Funktionen x, y, z von q_1, q_2, q_3 darstellen muss. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass Q_1, Q_2, Q_3 den bekannten sechs *Lamé*'schen Gleichungen genügen:

$$(20)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_{i+1} \partial q_{i+2}} = \frac{1}{Q_{i+2}} \frac{\partial Q_{i+2}}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_{i+2}} + \frac{1}{Q_{i+1}} \frac{\partial Q_{i+1}}{\partial q_{i+2}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_{i+1}}, \\ &\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{Q_i} \frac{\partial Q_{i+2}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial q_{i+2}}\left(\frac{1}{Q_{i+2}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_{i+2}}\right) + \frac{1}{Q^2_{i+1}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_{i+1}} \frac{\partial Q_{i+2}}{\partial q_{i+1}} = 0, \end{aligned}$$

wo die Indices wieder nach dem Modul 3 zu nehmen sind.

5c. Die Grundgleichungen im isotropen Fall. Das *elastische Potential* Π hat natürlich auch hier die gleiche Form wie f; zudem lassen sich die in Π auftretenden Koeffizienten in derselben Weise wie die von f mittels λ und μ ausdrücken.

Um die *Grundgleichungen* auf rechtwinklige krummlinige Koordinaten zu transformieren, kann man nun die Methode des beweglichen Trieders oder auch die auf die Variationsrechnung gegründete Methode anwenden. In letzterem Falle kann man, unter Verwertung einer von *C. W. Borchardt*[13]) herrührenden Bemerkung, das Unbequeme der Ableitung von Gleichungen, die zunächst auch für einen allgemeinen Raum gültig sind und daher eine scheinbar verwickeltere Form haben als jene, die man mit einer der direkten Methoden finden würde, vermeiden. *Borchardt* bemerkt nämlich, dass der Ausdruck des elastischen Potentials in cartesischen Koordinaten sich in zwei Teile

$$(21)\quad f = -\tfrac{1}{2}[(\lambda + 2\mu)\Theta^2 + 2\mu(\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2)] - 4\mu \sum \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

spalten lässt, von denen der letzte zu den Hauptgleichungen keinen Beitrag liefert. Transformiert man z. B. im Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die Variation des gesamten elastischen Potentials

$$\delta \int_S f\, dS$$

13) *C. W. Borchardt,* J. f. Math. 76 (1873), p. 45 = Werke, p. 289.

so giebt der genannte Teil Anlass zu Gliedern, die sich zerstören, oder zu Oberflächenintegralen, die keinen Einfluss auf die Bildung der Hauptgleichungen haben. Für die Ermittelung der transformierten Grundgleichungen kann also f durch den anderen Teil ersetzt werden, der durch die Relation bestimmt ist:

$$-2f' = (\lambda + 2\mu)\Theta^2 + 2\mu(\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2 + \overline{\omega}_3^2)$$

oder was dasselbe ist

$$= (\lambda + 2\mu)\Theta^2 + 2\mu(\mathfrak{T}_1^2 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^2).$$ [14]

Es ergiebt sich dann, dass die *Hauptgleichungen* sich folgendermassen schreiben lassen:

$$(22)\quad \begin{cases} \varrho\left(\dfrac{\partial^2 \varkappa_1}{\partial t^2} - F_1\right) = \dfrac{\lambda + 2\mu}{Q_1}\dfrac{\partial \Theta}{\partial q_1} + \dfrac{2\mu}{Q_2 Q_3}\left(\dfrac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3} - \dfrac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right), \\ \varrho\left(\dfrac{\partial^2 \varkappa_2}{\partial t^2} - F_2\right) = \dfrac{\lambda + 2\mu}{Q_2}\dfrac{\partial \Theta}{\partial q_2} + \dfrac{2\mu}{Q_3 Q_1}\left(\dfrac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3}\right), \\ \varrho\left(\dfrac{\partial^2 \varkappa_3}{\partial t^2} - F_3\right) = \dfrac{\lambda + 2\mu}{Q_3}\dfrac{\partial \Theta}{\partial q_3} + \dfrac{2\mu}{Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2} - \dfrac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_1}\right). \end{cases}$$

Die *Randbedingungen* aber nehmen die Form an:

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi_1 + \lambda\Theta\cos(nq_1) + 2\mu\dfrac{d\varkappa_1}{dn} + 2\mu[\mathfrak{T}_3\cos(nq_2) - \mathfrak{T}_2\cos(nq_3)] = 0, \\ \varphi_2 + \lambda\Theta\cos(nq_2) + 2\mu\dfrac{d\varkappa_2}{dn} + 2\mu[\mathfrak{T}_1\cos(nq_3) - \mathfrak{T}_3\cos(nq_1)] = 0, \\ \varphi_3 + \lambda\Theta\cos(nq_3) + 2\mu\dfrac{d\varkappa_3}{dn} + 2\mu[\mathfrak{T}_2\cos(nq_1) - \mathfrak{T}_1\cos(nq_2)] = 0, \end{cases}$$

wo das Symbol $\frac{d}{dn}$ wieder die Differentiation nach der positiven Richtung von n bezeichnet. Es sei daran erinnert, dass

$$(24)\quad \begin{cases} \Theta = \dfrac{1}{\nabla}\left(\dfrac{\partial Q_2 Q_3 \varkappa_1}{\partial q_1} + \dfrac{\partial Q_3 Q_1 \varkappa_2}{\partial q_2} + \dfrac{\partial Q_1 Q_2 \varkappa_3}{\partial q_3}\right), \\ \mathfrak{T}_1 = \dfrac{1}{2 Q_2 Q_3}\left(\dfrac{\partial Q_3 \varkappa_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial Q_2 \varkappa_2}{\partial q_3}\right), \\ \mathfrak{T}_2 = \dfrac{1}{2 Q_3 Q_1}\left(\dfrac{\partial Q_1 \varkappa_1}{\partial q_3} - \dfrac{\partial Q_3 \varkappa_3}{\partial q_1}\right), \\ \mathfrak{T}_3 = \dfrac{1}{2 Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_2 \varkappa_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial Q_1 \varkappa_1}{\partial q_2}\right). \end{cases}$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (18) hängen nun die Gl. (22) von der besonderen Form des *Euklid*ischen Bogenelements ab.

6. Die Theorie der Elastizität in einem Raum mit beliebigem Bogenelement. Die verschiedenen Methoden, die zur Umformung der Gleichungen der Elastizität auf krummlinige Koordinaten benutzt werden (vgl. oben Nr. 5a und 5b), lassen deutlich hervortreten, dass

14) *Cesàro*, Elasticità, p. 42, 194.

sowohl die Theorie der Spannungsverteilung in einem kontinuierlichen Medium wie die der Deformation bei beliebiger Form des Linienelements durchgeführt werden kann und nicht an die besondere Form gebunden ist, die sich bei Zugrundelegung des Euklidischen Parallelenaxioms ergiebt. Diese Tatsache hat zu weitergehenden Entwicklungen der Elastizitätslehre in einem Raume mit beliebigem Bogenelement Anlass gegeben. Insbesondere verdient die Ausdehnung der Theorie auf einen Raum *konstanter Krümmung* Beachtung, in dem bekanntlich die Bewegung eines Körpers als eines starren möglich ist. Es seien daher hier für diesen Fall einige Bemerkungen beigefügt, wobei die Beschränkung auf den Fall einer *drei*dimensionalen Raumes von konstanter nicht verschwindender Krümmung gemacht ist.

Der Begriff der Isotropie in einem Raum von konstanter Krümmung bleibt genau der gleiche wie in einem Raum von der Krümmung null.

Die Grundgleichungen der Elastizität für ein isotropes System, das in einem Raume von konstanter nicht verschwindender Krümmung enthalten ist, hat zuerst *E. Beltrami*[15]) aufgestellt und gezeigt, dass sie und wie sie von der Krümmung des Raumes abhängen. Er geht von der Bemerkung aus, dass sowohl *G. Lamé* wie *C. Neumann* und *C. W. Borchardt* bei der Transformation der Gleichungen der elastischen Isotropie im gewöhnlichen Raum auf krummlinige Koordinaten sich besonderer Kunstgriffe bedienen, indem sie nämlich von gewissen speziellen Eigenschaften Gebrauch machen, die die Gleichungen im Falle cartesischer Koordinaten besitzen (vgl. Nr. 5c). Indem er sich dann die Aufgabe stellt, direkt aus den Gleichungen (18), die zunächst für ein beliebiges elastisches System in einem beliebigen dreidimensionalen Raum gelten, unter Forderung der Isotropie die transformierten Gleichungen für den gewöhnlichen Raum abzuleiten, bemerkt er, dass die sechs *Lamé*'schen Gleichungen (20) gerade die Bedingungen dafür darstellen, dass ein dreidimensionaler Raum die Krümmung Null hat. Der weitere Verfolg dieser Untersuchungen führt ihn dann dazu, die Gleichungen der elastischen Isotropie in einem Raum von konstanter Krümmung α in der Form aufzustellen:

$$(25)\quad \begin{cases} \varrho\left(\dfrac{\partial^2 \varkappa_1}{\partial t^2} - F_1\right) = \dfrac{\lambda+2\mu}{Q_1}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_1} + \dfrac{2\mu}{Q_2 Q_3}\left(\dfrac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_3} - \dfrac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_2}\right) + 4\alpha\mu\varkappa_1, \\ \varrho\left(\dfrac{\partial^2 \varkappa_2}{\partial t^2} - F_2\right) = \dfrac{\lambda+2\mu}{Q_2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_2} + \dfrac{2\mu}{Q_3 Q_1}\left(\dfrac{\partial Q_3 \mathfrak{T}_3}{\partial q_1} - \dfrac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_3}\right) + 4\alpha\mu\varkappa_2, \\ \varrho\left(\dfrac{\partial^2 \varkappa_3}{\partial t^2} - F_3\right) = \dfrac{\lambda+2\mu}{Q_3}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_3} + \dfrac{2\mu}{Q_1 Q_2}\left(\dfrac{\partial Q_1 \mathfrak{T}_1}{\partial q_2} - \dfrac{\partial Q_2 \mathfrak{T}_2}{\partial q_1}\right) + 4\alpha\mu\varkappa_3, \end{cases}$$

die für $\alpha = 0$ in der Tat in die früheren Gleichungen (22) übergehen.

15) Ann. di mat. (2) 10 (1881), p. 188.

Die Untersuchung dieser Gleichungen (25) ist noch wenig gefördert[16]). Wahrscheinlich empfiehlt es sich, um in ihre Natur näher einzudringen, ein metrisch spezialisiertes Koordinatensystem einzuführen.

II. Allgemeine Theorie des elastischen Gleichgewichts.

7. Bestimmung der Verschiebungen aus den Formänderungen oder Spannungen.

Sind die Formänderungskomponenten gegeben, so kann man nach der Möglichkeit fragen, aus ihnen die Verschiebungen u, v, w zu bestimmen. Diese Fragestellung ist von besonderer Wichtigkeit, wenn man (im Falle des Gleichgewichts) zur Bestimmung der Verschiebungen nicht direkt von den Grundgleichungen (2′) und (3) ausgeht, sondern zunächst die Spannungskomponenten bestimmt, für die sich — wie in der folgenden Nr. 7a gezeigt wird — ein vollständiges Gleichungssystem z. B. im Falle der Isotropie leicht aufstellen lässt. Indem dann die Formänderungskomponenten mit den Spannungen durch die linearen Relationen (3) verknüpft sind, ergiebt sich in der That die Aufgabe, aus ersteren die Verschiebungen u, v, w zu finden.

7a. Die Kompatibilitätsbedingungen für die Formänderungen und Spannungen. Aus den Formänderungskomponenten $x_x, y_y, \cdots x_y$ bestimmen sich zunächst die Komponenten ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 der *mittleren Rotation* durch die Formeln:

$$(26)\quad \begin{cases} \varpi_1 = \frac{1}{2}\int\Big\{\Big(\frac{\partial z_x}{\partial y} - \frac{\partial x_y}{\partial z}\Big)dx + \Big(\frac{\partial y_z}{\partial y} - 2\frac{\partial y_y}{\partial z}\Big)dy \\ \qquad\qquad + \Big(2\frac{\partial z_z}{\partial y} - \frac{\partial y_z}{\partial z}\Big)dz\Big\} + p_1, \\ \varpi_2 = \frac{1}{2}\int\Big\{\Big(2\frac{\partial x_x}{\partial z} - \frac{\partial z_x}{\partial x}\Big)dx + \Big(\frac{\partial x_y}{\partial z} - \frac{\partial y_z}{\partial x}\Big)dy \\ \qquad\qquad + \Big(\frac{\partial z_x}{\partial z} - 2\frac{\partial z_z}{\partial x}\Big)dz\Big\} + p_2, \\ \varpi_3 = \frac{1}{2}\int\Big\{\Big(\frac{\partial x_y}{\partial x} - 2\frac{\partial x_x}{\partial y}\Big)dy + \Big(2\frac{\partial y_y}{\partial x} - \frac{\partial x_y}{\partial y}\Big)dy \\ \qquad\qquad + \Big(\frac{\partial y_z}{\partial x} - \frac{\partial z_x}{\partial y}\Big)dz\Big\} + p_3; \end{cases}$$

p_1, p_2, p_3 sind willkürliche Konstanten und die Integrale Kurvenintegrale, erstreckt von jeweils demselben festen Punkte bis zu demselben variablen Punkte (x, y, z). Damit ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 bestimmte

16) Vgl. *C. Somigliana,* Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 101.

Funktionen von x, y, z werden, ist notwendig und hinreichend, dass die Ausdrücke unter den Integralzeichen exakte Differentiale sind. Dies verlangt, dass sechs Differentialgleichungen erfüllt sind, von denen die beiden ersten:

$$(27)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial^2 x_x}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z_x}{\partial y} + \dfrac{\partial x_y}{\partial z} - \dfrac{\partial y_z}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial^2 y_z}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} \end{cases}$$

lauten, die andern vier aus ihnen durch zyklische Vertauschung von x, y, z hergeleitet werden.

Die Gleichungen (27) sind die sog. *Kompatibilitätsbedingungen für die Formänderungen*[17]); zwischen ihnen bestehen, wie *E. Beltrami*[18]) bemerkt hat, drei identische Relationen entsprechend dem Umstande, dass die Grössen unter dem Integralzeichen in (26) exakte Differentiale sind.

Eliminiert man aus den Gleichungen (27) unter Zuziehung der Gleichungen (3) die Formänderungskomponenten, so ergeben sich die *Kompatibilitätsbedingungen für die Spannungen*[19]). Diese stellen nun zusammen mit den Grundgleichungen (2') ein vollständiges von den Spannungskomponenten zu erfüllendes Gleichungssystem dar, das zu ihrer direkten Bestimmung herangezogen werden kann, womit dann das Integrationsproblem in zwei Schritte zerlegt ist: erst die Bestimmung der Spannungen und aus ihnen nachträglich die der Verschiebungen.

Im Falle der *Isotropie* ergeben sich solcherweise die sogenannten *Beltrami'schen Gleichungen*:

$$(28)\begin{cases} \Delta X_x + \dfrac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\dfrac{\partial^2(X_x+Y_y+Z_z)}{\partial x^2} = \dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\varrho\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}\right)+2\varrho\dfrac{\partial X}{\partial x}, \\ \Delta Y_z + \dfrac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\dfrac{\partial^2(X_x+Y_y+Z_z)}{\partial y\,\partial z} = \varrho\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial z}\right), \end{cases}$$

mit den entsprechenden vier anderen, aus diesen durch zyklische Vertauschung abzuleitenden Gleichungen. Es ist aber zu bemerken, dass

---

17) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 56 (1859), p. 299 = Ges. Abh., p. 301; Mechanik, p. 398; *B. de Saint-Venant* in Navier, Leçons sur la résistance des corps solides, 3. éd. (1864), p. 598; *J. Boussinesq*, J. d. math. (2) 16 (1871), p. 133; *E. Beltrami*, Bologna Mem. (4) 7 (1886), p. 3; Palermo, Cir. mat. Rend. 3 (1889), p. 73; Paris C. R. 108 (1889), p. 502; vgl. IV 14, Nr. 18 (*Abraham*) u. IV 23, Nr. 3b (*Müller-Timpe*).

18) *E. Beltrami*, Roma Acc. Linc. Rend. (5), 1^1 (1892), p. 142.

19) *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100; *C. Runge*, Zeitschr. Math. Phys. 51 (1904), p. 431.

zwischen diesen Gleichungen und den Spannungsgleichungen (2') drei identische Differentialrelationen bestehen. Dies bedeutet, dass auch die sechs partiellen Differentialgleichungen 4. Ordnung, die man erhält, wenn man die Spannungsgleichungen (2') zunächst durch Einführung dreier willkürlicher Funktionen, der sogenannten *Spannungsfunktionen*, χ_1, χ_2, χ_3 (vgl. IV 23, Nr. **3** b, *Müller-Timpe*):

$$Y_z = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y \partial z}, \quad Z_x = -\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \partial x}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial y},$$

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x^2}, \quad Z_z = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2},$$

befriedigt, nicht vollkommen voneinander unabhängig sind. Diese Differentialgleichungen für die drei Funktionen χ_1, χ_2, χ_3 ergeben sich sofort aus den *Beltrami*'schen Gleichungen; für verschwindende Massenkräfte werden sie

$$(29)\quad \begin{cases} \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} \Delta\left(\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big\{(\Delta(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) \\ \qquad\qquad - \left(\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z^2}\right)\Big\} = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\Big\{\frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} \Delta \chi_1 - \Delta(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) \\ \qquad\qquad + \left(\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z^2}\right)\Big\} = 0, \end{cases}$$

und entsprechend vier andere [20]).

Dieses für den Fall der Isotropie aufgestellte Gleichungssystem ist indessen für die Zwecke der allgemeinen Integration noch wenig herangezogen und nur erst bei einzelnen speziellen Problemen mit besonderen Erfolg verwendet worden (vgl. IV 25, Nr. **14** c, *O. Tedone-A. Timpe*). Es wird daher im Folgenden nicht weiter auf dasselbe Bezug genommen.

7b. Die Verschiebungen für einfach und mehrfach zusammenhängende elastische Systeme berechnet aus den Formänderungskomponenten. Sind die Glgn. (27) erfüllt und ist der Raumteil *einfach zusammenhängend*, so werden die Verschiebungen weiterhin einwertige Funktionen von x, y, z. Schreibt man nämlich die Glgn. (26) in der abgekürzten Form:

$$\varpi_1 = P_1 + p_1,$$
$$\varpi_2 = P_2 + p_2,$$
$$\varpi_3 = P_3 + p_3,$$

20) Vgl. *W. J. Ibbetson*, Mathematical theory of elasticity, London 1887, p. 359.

so hat man für die *Verschiebungskomponenten:*

$$(30)\begin{cases} u=\int\{x_x dx+(\frac{1}{2}x_y-P_3)dy+(\frac{1}{2}z_x+P_2)dz\}+a_1+p_2 z-p_3 y,\\ v=\int\{(\frac{1}{2}x_y+P_3)dx+y_y dy+(\frac{1}{2}y_z-P_1)dz\}+a_2+p_3 x-p_1 z,\\ w=\int\{\frac{1}{2}z_x-P_2)dx+(\frac{1}{2}y_z+P_1)dy+z_z dz\}+a_3+p_1 y-p_2 x,\end{cases}$$

wo a_1, a_2, a_3 drei andere willkürliche Konstanten sind. Die Kurvenintegrale hier können zwischen denselben Grenzen erstreckt gedacht werden, wie die in (26) auftretenden Integrale.

Ist dagegen der elastische Körper *mehrfach zusammenhängend*[21]), so wird man im allgemeinen mehrwertige Verschiebungen erhalten, und zwar zeigt sich, dass, wenn man den Körper durch eine Reihe von Schnitten auf einen einfach zusammenhängenden zurückführt, die Diskontinuität in den Verschiebungen an einer Schnittfläche gegeben ist durch

$$(31)\quad U=\alpha_1+\pi_2 z-\pi_3 y,\quad V=\alpha_2+\pi_3 x-\pi_1 z,\quad W=\alpha_3+\pi_1 y-\pi_2 x.$$

Die hier auftretenden, selbstverständlich unendlich kleinen Konstanten α_1, α_2, α_3, π_1, π_2, π_3, die man als die *sechs Konstanten des Schnitts* bezeichnet, haben für zwei durch stetige Deformation in einander überzuführende Schnittflächen den gleichen Wert, hängen also ausschliesslich von der geometrischen Natur des Körpers und der in ihm hervorgebrachten Formänderung ab.

Um die physikalische Bedeutung der hier geschilderten Verhältnisse zu erkennen, denke man den materiellen Zusammenhang an jeder Schnittstelle tatsächlich gelöst und nun die Formänderung des Körpers rückgängig gemacht. Die Formeln (31) zeigen dann, dass dabei die beiden Ufer eines Schnitts relativ zu einander eine unendlich kleine Translation und eine unendlich kleine Drehung erleiden. Geht man umgekehrt von einem im undeformierten Zustand mehrfach zusammenhängenden Körper aus, so kann man in ihm Formänderungen der betrachteten Art (bei denen äussere Kräfte gar nicht auftreten, vgl. Nr. 8 unten) auf folgende Weise hervorrufen. Durch Zerschneiden mache man ihn zu einem einfach zusammenhängenden Körper; hierauf verschiebe man die Ufer jedes Schnitts irgendwie gegen einander derart, dass alle entsprechenden Teilchen der beiden Ufer die gleiche relative Translation und Drehung erleiden, und stelle dann, nachdem man

21) *G. Weingarten,* Roma Acc. Linc. Rend. (5) 10^1 (1901), p. 57; *V. Volterra,* ebd. (5) 14^1 (1905), p. 127, 193. Vgl. auch *J. H. Michell,* London Math. Soc. Proc. 31 (1900), p. 103 und *A. Timpe,* Diss. Göttingen 1905.

nach Bedarf Materie entfernt oder eingefügt hat, durch Vernieten oder Verlöten den materiellen Zusammenhang wieder her. Jede derartige, einem einzelnen Schnitt entsprechende Formänderung eines mehrfach zusammenhängenden Körpers, wie sie durch die Konstanten $\alpha_1, \ldots, \pi_3$ charakterisiert ist, bezeichnet man als eine *Verrenkung* (ital. *distorsione*) desselben. Die Zahl der möglichen Verrenkungen (und also der möglichen Selbstspannungssysteme) ist offenbar gleich der um 1 verminderten Zusammenhangszahl des Körpers.

7c. **Die Befestigungsbedingungen.** Die Formänderungkomponenten bezw. die Spannungen können sämtlich den Wert null annehmen; in diesem Falle ist

$$(32)\qquad \begin{cases} u = a_1 + p_2 z - p_3 y, \\ v = a_2 + p_3 x - p_1 z, \\ w = a_3 + p_1 y - p_2 x, \end{cases}$$

unter a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3 willkürliche Konstanten verstanden; das System erfährt nur eine Verrückung als Ganzes, wie wenn es starr wäre.

Allgemein bestimmen sich, wie die Formeln (30) zeigen, die Verschiebungen aus den Formänderungen bis auf die Komponenten einer Verrückung des Systems als eines starren. Daher ist es bei Problemen elastischen Gleichgewichts in vielen Fällen angezeigt, zu den Grundgleichungen und den Randbedingungen noch andere Bedingungen hinzuzufügen derart, dass die resultierende Lösung diejenigen Verschiebungskomponenten darstellt, die der elastischen Formänderung des Systems als solcher entsprechen. Letztere Bedingungen heissen *Befestigungsbedingungen* und laufen analytisch darauf hinaus, die Werte von u, v, w; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ in einem bestimmten Punkte (x_0, y_0, z_0) festzulegen[22]). In allgemeinerer Weise wird derselbe Zweck dadurch erreicht, dass man u, v, w in einem Punkte (x_0, y_0, z_0) vorgegebene Werte annehmen lässt und ebendort drei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung unterwirft[23]).

8. **Eindeutigkeit der Lösung.** Den Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts (im Falle eines *einfach zusammenhängenden Körpers*) gab zuerst *G. Kirchhoff*[24]).

---

22) *G. Kirchhoff,* Mechanik, p. 392.

23) *E. Betti,* Elasticità, p. 8; *Cesàro,* Elasticità, p. 16.

24) *G. Kirchhoff,* J. f. Math. 56 (1859), p. 291 = Ges. Abh., p. 292. — Vgl. *A. Clebsch,* Elasticität, p. 67; *Clebsch-St.-Venant,* Élasticité, p. 132; *W. Thomson,* Math. and phys. papers, 3, Cambr. 1890, p. 391; *G. H. Bryan,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 6 (1888), p. 199; *F. Neumann,* Elasticität, p. 121.

Man geht hierbei am bequemsten von einer Identität aus, die sich leicht aus den Grundgleichungen (2') ableiten lässt und die im Falle verschwindender Massenkräfte das sogenannte *Clapeyron'sche Theorem*[25]) darstellt. In der Tat, multipliziert man die drei Grundgleichungen (2') bezüglich mit u, v, w, summiert und integriert über den ganzen, von dem elastischen System erfüllten Raum, so ergiebt sich durch partielle Integrationen, wie sie bei der Behandlung von Problemen der analytischen Mechanik und mathematischen Physik überaus oft angewendet werden, bei einem einfach zusammenhängenden Körper, die Gleichung

$$(33)\quad \int_S \varrho(Xu + Yv + Zw)\,dS + \int_\sigma (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,d\sigma$$
$$= -\int_S (X_x x_x + Y_y y_y + \cdots + X_y x_y)\,dS = -2\int_S f\,dS.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die gesamte Arbeit der (während der ganzen Verschiebung mit ihren Endwerten konstant angenommenen) äusseren Kräfte dar, die rechte Seite das Doppelte der in dem Körper dabei aufgespeicherten potentiellen Energie oder der sogenannten *Formänderungsarbeit.* Mithin spricht diese Identität aus, dass die *Formänderungsarbeit eines elastischen Systems gleich der halben Arbeit der äusseren Kräfte* ist. Die Gleichung bleibt auch noch bestehen, wenn S sich bis ins Unendliche erstreckt, aber σ im Endlichen liegt, vorausgesetzt, dass u, v, w im Unendlichen in bestimmtem Grade, der höher als der von r^{-1} ist, null werden, unter r den Abstand von einem im Endlichen liegenden Punkte verstanden, und X, Y, Z null werden wie r^{-2}. Unter geeigneten Einschränkungen gilt (33) auch noch, wenn σ sich in's Unendliche erstreckt. Ebenso gilt sie, wenn u, v, w in diskreten Punkten unendlich gross werden, vorausgesetzt, dass dies in bestimmtem Grade, der niedriger als $r^{-1/2}$ ist, geschieht und X, Y, Z endlich bleiben.

Aus (33) folgt nun zunächst bei verschwindenden äusseren Kräften $X = Y = Z = X_n = Y_n = Z_n = 0$, dass

$$\int f\,dS = 0 \text{ ist,}$$

mithin auch, da f nie positiv ist, dass identisch $f = 0$ ist; d. h. *sind die Massenkräfte, die an den Elementen eines einfach zusammenhängenden elastischen Systems angreifen, und die Spannungen, die auf die Oberflächenelemente wirken, null, so erfährt das System keine elastische Formänderung; mithin sind auch die inneren Spannungen*

25) Vgl. *G. Lamé,* Élasticité, p. 80. Im Übrigen siehe auch wegen der sich anschliessenden Sätze von *A. Castigliano* das Referat IV 27 (*H. Reissner*).

null. Diesen Gleichgewichtszustand eines elastischen Systems, der dem Fall verschwindender äusserer Kräfte entspricht, bezeichnet man als *natürlichen Zustand* des Systems. Man pflegt das eben genannte Resultat auch so auszudrücken, dass (immer unter Ausschluss von irgend welchen Unstetigkeiten) in einem einfach zusammenhängenden statischen System *Selbstspannungen nicht möglich* sind[26]).

Die Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenen Massenkräften und gegebenen Oberflächenspannungen, die von null verschieden sind, ergiebt sich nun sofort aus folgender Überlegung: Könnten den gegebenen Kräften zwei verschiedene Deformationen eines einfach zusammenhängenden elastischen Systems entsprechen, deren Komponenten bezüglich gleich $x_x', y_y', \ldots, x_y'; x_x'', y_y'', \ldots, x_y''$ wären, so müsste das System einer Deformation mit den nicht identisch verschwindenden Komponenten

$$x_x = x_x' - x_x'', \; y_y = y_y' - y_y'', \ldots, x_y = x_y' - x_y''$$

fähig sein, wobei die angreifenden äusseren Kräfte null wären; dies steht aber im Widerspruch mit dem oben erhaltenen Resultat.

Die Deformation eines einfach zusammenhängenden Systems ist auch dann eindeutig bestimmt, wenn man ausser den Werten der Massenkräfte, X, Y, Z, auf der Oberfläche die Verschiebungskomponenten giebt, oder auch die Komponenten der Verschiebung nach einer oder zwei Koordinatenrichtungen x, y, z und die Komponenten der Oberflächenspannung X_n, Y_n, Z_n nach den übrigen Koordinatenaxen. Es bieten sich also andere Probleme elastischen Gleichgewichts dar, bei denen nicht nur die Deformation des elastischen Systems bestimmt ist, sondern auch ganz oder zum Teil die Werte der Verschiebungen selbst.

V. Volterra[27]) hat untersucht, welche Modifikation diese Sätze *für mehrfach zusammenhängende elastische Systeme* erfahren. Da in diesem Falle die Verschiebungen bei formeller Integration mehrwertig

26) Lässt man dagegen Unstetigkeiten im Innern des Körpers zu, so sind allerdings auch im undeformierten Zustand Spannungen möglich, die man als *natürliche Selbstspannungen* oder *Eigenspannungen* bezeichnet; dieselben brauchen offenbar nur den Gleichgewichtsbedingungen (2′) zu genügen. Derartige Spannungsverteilungen, die sich gegebenenfalls physikalisch, z. B. auf optischem Wege, sehr wohl nachweisen lassen, werden aber bei der mathematischen Behandlung der Elastizitätstheorie traditioneller Weise bei Seite gelassen. Es wird daher auch im folgenden nicht weiter von ihnen die Rede sein. Siehe hierüber *F. H. Cilley,* Amer. J. of science (4) 11 (1901), p. 269; vgl. auch die Diskussion *J. Weingarten-A. Föppl,* Archiv Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 342; (3) 2 (1902), p. 190.

27) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 14¹ (1905), p. 127, 351.

sein können (vgl. Nr. 7 b), so erhält man an Stelle der Gleichung (33), wenn man durch eine Reihe von Schnitten σ_i den Körper auf einen einfach zusammenhängenden zurückführt und mit U_i, V_i, W_i die Sprünge in den Verschiebungen an den Schnittstellen bezeichnet, die folgende Gleichung:

$$(34)\qquad \int_S \varrho(Xu + Yv + Zw)\,dS + \int_\sigma (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,d\sigma$$
$$+ \sum_1^m {}_i \int_{\sigma_i} (X_i U_i + Y_i V_i + Z_i W_i)\,d\sigma_i = -2\int_S f\,dS,$$

wo X_i, Y_i, Z_i die auf die m Schnittflächen σ_i wirkenden Spannungskomponenten pro Flächeneinheit sind. Wenn nun

$$X = Y = Z = X_n = Y_n = Z_n = 0,$$

so verschwinden die beiden ersten Integrale der linken Seite; aber das dritte Integral braucht nicht null zu sein, und daher verschwindet das elastische Potential im allgemeinen nicht: *In einem mehrfach zusammenhängenden elastischen System, an dem weder Massenkräfte noch Oberflächenspannungen angreifen, können infolge von Verrenkungen innere Spannungen, sogenannte „künstliche Selbstspannungen", bestehen.* Das Potential derselben ist gleich

$$(35)\qquad f = \tfrac{1}{2} \sum_1^{6m} {}_i E_i s_i,$$

wo mit s_i die $6\,m$ Konstanten der Schnitte und mit E_i die Komponenten der Kräfte und Momente bezeichnet sind, die über die einzelnen Schnitte resultieren. Die Energie eines verrenkten Systems erweist sich als eine quadratische Form der *Verrenkungsgrössen* s_i bezw. der Kräfte E_i, und die Bestimmung der Koeffizienten dieser Form deckt sich mit der Lösung der Aufgabe: Die $6m$ Verrenkungsgrössen zu finden, wenn die $6m$ Kräfte E_i gegeben sind, und umgekehrt.

Sind ausser den Oberflächenspannungen und den Massenkräften auch die Verrenkungen null, so muss f verschwinden: eine Formänderung des Systems ist ausgeschlossen. Daraus folgt, dass *die Formänderung eines mehrfach zusammenhängenden elastischen Systems, an dem gegebene, von null verschiedene Massenkräfte und Oberflächenspannungen angreifen, eindeutig bestimmt ist, wenn noch die Verrenkung des Systems bekannt ist.*

9. Existenz der Lösung: Dirichlet'sches Prinzip. Die Frage nach der Existenz der Lösung der Gleichungen des elastischen Gleich-

gewichts ist in erschöpfender Weise noch nicht erledigt. Einen vorläufigen Beweis des Existenztheorems nach der *Methode des sog. Thomson-Dirichlet'schen Prinzips* gab *W. Thomson*[27]). Derselbe geht aus von der Tatsache, dass der Natur der Funktion f zufolge das Integral

$$(36) \qquad \int f\,dS$$

einen negativen Wert besitzt, wie auch die Funktionen u, v, w, aus denen sich die Funktion f aufbaut, gewählt sein mögen, und von der Idee, dass es unter allen diesen, im übrigen gewissen vorgegebenen Bedingungen genügenden (stetigen und differentiierbaren) Funktionssystemen u, v, w *eines geben wird*, das das Integral zum Maximum macht.

Unterwirft man u, v, w den Bedingungen

$$(37) \qquad \begin{cases} \int\limits_S \varrho(Xu + Yv + Zw)\,dS = \text{const.}, \\ \int\limits_\sigma (X_n u + Y_n v + Z_n w)\,d\sigma = \text{const.}, \end{cases}$$

so ist das System von Funktionen u, v, w, das das Integral (36) zum Maximum macht, eine Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts für den Fall, dass die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n vorgegeben sind.

Verlangt man dagegen, dass u, v, w auf σ gegebene Werte annehmen und der ersten der Gl. (37) genügen, so ist das System von Funktionen, das das Integral (36) zum Maximum macht, eine Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts für den Fall, dass die Massenkräfte X, Y, Z und die Werte der Verschiebungen auf σ vorgegeben sind.

Man findet leicht die Bedingungen, denen u, v, w genügen müssen, um die Existenz der Lösung im Falle gemischter Randbedingungen festzustellen.

Der Einwand, dem dies Beweisverfahren unterliegt, ist in dem Referate über Potentialtheorie II A 7b, Nr. **25** (*Burkhardt-Meyer*) näher erörtert. Indem die *Existenz* des Maximums des Integrals zunächst nicht bewiesen ist, sondern nur die Existenz der oberen Grenze, (die als solche aber im Gebiete der stetigen differentiierbaren Funktionen vielleicht nicht erreicht wird), zeigt die Schlussweise nur folgendes: *Wenn das Integral* (36) *im Gebiete der stetigen und differentiierbaren Funktionen wirklich ein Maximum besitzt,* so sind die Funktionen u, v, w, die

27) *W. Thomson,* Lond. Phil. Trans. 153 (1863), p. 610 = Math. and phys. papers 3, London 1890, p. 389.

diesem Maximum entsprechen, eine Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts, und andererseits, wenn ein Problem elastischen Gleichgewichts eine Lösung u, v, w zulässt, so hat das Integral (36) für dieses System von Funktionen ein Maximum. Wie das *Dirichet*'sche Prinzip zu formulieren ist, damit es vollständig ist d. h. wie man aus dem Variationsproblem exakt auf die Existenz eines Maximums schliessen kann, hat *D. Hilbert*[28]) neuerdings im Falle der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ gezeigt. Seine Methode wird sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten auf den vorliegenden Fall der Elastizitätstheorie übertragen lassen.

Inzwischen hat man gerade so wie im gleichen Falle der Potentialtheorie versucht, die Existenzbeweise mit anderen Mitteln zu führen. Es sind genau die *C. Neumann*'sche *Methode des arithmetischen Mittels* und das *Schwarz-Picard*'sche *Verfahren der successiven Approximation* übertragen und Ansätze zur Ausgestaltung der *Balayagemethode* von *H. Poincaré* gegeben worden, wofür die folgenden Nummern die näheren Ausführungen geben. Neuerdings eröffnet die Ausgestaltung der *Theorie der Integralgleichungen* neue Wege zur Führung der Existenzbeweise.

10. Analogien zur Methode der Green'schen Funktionen in der Potentialtheorie.

Die in vorstehender Nummer berührte Anwendung von Methoden zum Beweise der Existenz der Lösung, die zunächst ihre Ausbildung in der Theorie des *Newton*schen Potentials gefunden haben, erweist sich als fruchtbar, weil in der Tat zwischen dem Problem des elastischen Gleichgewichts und dem des *Newton*'schen Potentials eine weitgehende Analogie besteht. Dem *Green*'schen Satz hier entspricht dort das *Betti*'sche Reziprozitätstheorem, die *Green*'sche Formel hat ihr direktes Analogon in den *Somigliana*'schen, überhaupt ein Analogon in den *Betti*'schen Formeln. Dem Integrationsverfahren mit Hilfe der *Green*schen Funktion steht hier ein gleiches mit Hilfe eines Systems sogenannter *Green*'scher Funktionen gegenüber. Dabei ist in den folgenden Nrn. **10**b—**10**f der elastische Körper zunächst als *isotrop* vorausgesetzt. Über die Ausdehnung der Resultate auf anisotrope Körper siehe Nr. **10**g.

10a. Das Theorem von E. Betti und seine unmittelbaren Folgerungen. Die Funktionen u', v', w' mögen als Verschiebungen einem zweiten System von Massenkräften X', Y', Z' und einem zweiten System von Oberflächenspannungen X_n', Y_n', Z_n' entsprechen. Multi-

28) *D. Hilbert,* Festschrift z. Feier d. 150jährigen Bestehens d. Ges. d. W. zu Göttingen, Berlin 1904.

pliziert man dann die Grundgleichungen (2') des elastischen Gleichgewichts bezüglich mit u', v', w', summiert die entstehenden Ausdrücke und integriert über den ganzen vom System erfüllten Raum, der zunächst als endlich vorausgesetzt werde, so erhält man:

$$\int_S \varrho (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\sigma$$
$$= - \int_S (X_x x_x' + Y_y y_y' + \cdots + X_y x_y')\, dS.$$

Da in dieser Identität die gestrichenen Grössen mit den ungestrichenen vertauscht werden können und

$$X_x x_x' + Y_y y_y' + \cdots + X_y x_y' = \frac{\partial f}{\partial x_x} x_x' + \frac{\partial f}{\partial y_y} y_y' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_y} x_y'$$
$$= X_x' x_x + Y_y' y_y + \cdots + X_y' x_y,$$

so ergiebt sich das *Betti*'sche *Theorem*[29]) in der Form:

$$(38) \quad \int_S \varrho (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\sigma$$
$$= \int_S \varrho (X'u + Y'v + Z'w)\, dS + \int_\sigma (X_n' u + Y_n' v + Z_n' w)\, d\sigma$$

oder einfacher geschrieben

$$(38') \quad \int_S \varrho \sum X u'\, dS + \int_\sigma \sum X_n u'\, d\sigma = \int_S \varrho \sum X' u\, dS + \int_\sigma \sum X_n' u\, d\sigma.$$

M. Lévy hat dem Theorem folgenden Ausdruck gegeben: *Ist ein elastischer Körper nacheinander zwei Systemen von äusseren Kräften unterworfen, so ist die Arbeit der Kräfte des ersten Systems, wenn als Verschiebungen die des zweiten Systems gewählt werden, gleich der Arbeit der Kräfte des zweiten Systems, wenn jetzt als Verschiebungen die des ersten Systems gelten.*

Das *Betti*'sche Theorem gilt auch, wenn S unendlich gross ist und σ ins Unendliche sich erstreckt; zudem dürfen sowohl u, v, w wie u', v', w' in einem beliebigen Punkte unendlich gross werden; beides unter den Bedingungen, für welche Gl. (33) in den entsprechenden

29) *E. Betti*, Nuovo Cim. (2) 7 (1872), p. 89 = Ann. di mat. (2) 6 (1874), p. 101; Elasticità, p. 38; *M. Lévy*, Paris C. R. 107 (1888), p. 414. — Das *Betti*sche Theorem stellt einen speziellen Fall des Reziprozitätstheorem von Lord *Rayleigh* dar, das dieser im Jahre 1873 gab; vgl. Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 366. Vgl. auch *H. Helmholtz*, J. f. Math. 56 (1859), p. 29.

Fällen gültig ist. Der Satz hat in der Elastizitätstheorie eine ausserordentliche Tragweite.

E. Betti selbst hat aus ihm mehrere *wichtige Folgerungen* abgeleitet[30]).

Setzt man zunächst

$$u' = a_1 + p_2 z - p_3 y,$$
$$v' = a_2 + p_3 x - p_1 z,$$
$$w' = a_3 + p_1 y - p_2 x,$$

wo $a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3$ willkürliche Konstanten, so hat man:

$$X' = Y' = Z' = X_n' = Y_n' = Z_n' = 0.$$

In diesem Falle zeigt das *Betti*'sche Theorem, dass die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n denselben Gleichungen genügen müssten, wie wenn sie an den Punkten eines starren Systems angriffen, das sich unter ihrem Einfluss im Gleichgewicht befindet,

$$\begin{cases} \int\limits_S \varrho X dS + \int\limits_\sigma X_n d\sigma = 0, \ldots, \\ \int\limits_S \varrho (yZ - zY)\, dS + \int\limits_\sigma (yZ_n - zY_n)\, d\sigma = 0, \ldots. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind also in den Grundgleichungen des elastischen Gleichgewichts enthalten, und umgekehrt, setzt man sie ausser für das ganze elastische System für jeden Teil desselben als gültig voraus, so folgen aus ihnen die Grundgleichungen der Elastizität. (Vgl. IV 23, Nr. **3** b, *Müller-Timpe.*)

Nimmt man dagegen für u', v', w' die Ausdrücke an

$$u' = ax + \tfrac{1}{2} g y + \tfrac{1}{2} f z,$$
$$v' = \tfrac{1}{2} g x + by + \tfrac{1}{2} e z,$$
$$w' = \tfrac{1}{2} f x + \tfrac{1}{2} e y + cz,$$

wo $a, b, \cdots, g$ Konstanten, so erhält man:

$$X' = Y' = Z' = 0; \quad x_x' = a,\ y_y' = b, \ldots, x_y' = g;$$

damit werden $X_x', Y_y', \ldots, X_y'$ lineare Verbindungen von $a, b, \ldots, g$ mit konstanten Koeffizienten, mithin selbst Konstanten. Das *Betti*'sche Theorem ergiebt hiermit:

---

30) Teoria dell' elasticità, p. 40 ff.

$$\int_S \varrho \sum X u' dS + \int_\sigma \sum X_n u' d\sigma = X_x' \int_\sigma u \cos(nx) d\sigma + Y_y' \int_\sigma v \cos(ny) d\sigma + \cdots$$
$$+ X_y' \int_\sigma [u \cos(ny) + v \cos(nx)] d\sigma$$
$$= - X_x' \int_S x_x dS - Y_y' \int_S y_y dS - \cdots - X_y' \int_S x_y dS.$$

Man kann nun $a, b, \ldots, g$ so bestimmen, dass $X_x', Y_y', \ldots, X_y'$ willkürliche Werte annehmen. Richtet man es so ein, dass sich eine dieser Grössen (z. B. X_x') auf Eins, die übrigen ($Y_y', \ldots, X_y'$) auf Null reduzieren, so ergiebt sich eine Formel, die bei gegebenen Massenkräften X, Y, Z und Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n den dem ganzen vom elastischen System erfüllten Raum entsprechenden Mittelwert einer der Formänderungskomponenten (den von x_x) bestimmt. Verfügt man aber so über $a, b, \ldots, g$, dass $X_x' = Y_y' = Z_z' = 1$, $Y_z' = Z_x' = X_y' = 0$, so kann man die Gesamtdilatation und mithin auch die mittlere Dilatation des elastischen Systems bestimmen.

10b. Die Formeln von C. Somigliana für die Verschiebungskomponenten. Das Gegenstück zur *Green*'schen Formel der Potentialtheorie, die den Wert einer Funktion in einem Punkte eines begrenzten Gebiets durch ein Raum- und gewisse Oberflächenintegrale ausdrückt, bilden in der Elastizitätslehre im Falle der *Isotropie,* die Formeln von *C. Somigliana*[31]). Sie stellen die *Verschiebungskomponenten* eines im Gleichgewicht befindlichen isotropen elastischen Systems dar mit Hülfe eines Raumintegrals über die Massenkräfte und von Oberflächenintegralen, unter denen die Werte der Verschiebungen und der Spannungen an der Oberfläche auftreten.

Der Grundlösung $\frac{1}{r}$ der Potentialgleichung entsprechen in der Theorie des elastischen Gleichgewichts für isotrope Körper folgende, von *Somigliana* aufgestellte, drei besondere Integralsysteme:

$$(39) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, & v_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, & w_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \\ u_2 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, & v_2 = \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, & w_2 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z}, \\ u_3 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x}, & v_3 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial y}, & w_3 = \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}, \\ & \left(\text{wo } \alpha = - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right), & \end{cases}$$

31) Nuovo Cim. (3) 17, 18 (1885); 19, 20 (1886); Ann. di mat. (2) 17 (1889), p. 41; Nuovo Cim. (3) 36 (1894), p. 1.

der Hauptgleichungen

(40) $$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \ldots.$$

Jedes dieser drei Integralsysteme stellt ein System von Funktionen dar, die im ganzen Gebiete stetig sind, im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ null werden und nur im Punkte (x_0, y_0, z_0), dem Ursprung der Entfernung r, wie $\frac{1}{r}$ unendlich groß werden.

Setzt man nun im *Betti*'schen Theorem an Stelle von u', v', w' jedes der drei Integralsysteme ein, so führt eine dem Verfahren im entsprechenden Fall der Potentialtheorie analoge Untersuchung zu den drei *Formeln von Somigliana*:

(41) $$\begin{cases} 4\pi\mu u(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_S \varrho \sum X u_1 \, dS + \int\limits_\sigma \sum X_n u_1 \, d\sigma - \int\limits_\sigma \sum X_n^{(1)} u \, d\sigma, \\ 4\pi\mu v(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_S \varrho \sum X u_2 \, dS + \int\limits_\sigma \sum X_n u_2 \, d\sigma - \int\limits_\sigma \sum X_n^{(2)} u \, d\sigma, \\ 4\pi\mu w(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_S \varrho \sum X u_3 \, dS + \int\limits_\sigma \sum X_n u_3 \, d\sigma - \int\limits_\sigma \sum X_n^{(3)} u \, d\sigma, \end{cases}$$

worin $X_n^{(i)}$, $Y_n^{(i)}$, $Z_n^{(i)}$ diejenigen Ausdrücke für X_n, Y_n, Z_n bedeuten, die sich mittels der Funktionen u_i, v_i, w_i ergeben. Diese Formeln gelten auch, wenn S unbegrenzt ist oder σ ins Unendliche sich erstreckt, und zwar unter denselben Bedingungen für u, v, w, unter denen das *Betti*'sche Theorem besteht. In ihnen ist vorausgesetzt, dass der Punkt (x_0, y_0, z_0) innerhalb S und nicht auf den Rand fällt. Fällt der Punkt (x_0, y_0, z_0) ausserhalb von S, so sind die rechten Seiten von (41) gleich null, und wenn der Punkt (x_0, y_0, z_0) auf der Oberfläche σ liegt, tritt an die Stelle von 4π links ein anderer Zahlenfaktor, genau wie in der Potentialtheorie.

Diese Resultate zeigen ohne weiteres, dass jedes Funktionensystem u, v, w, das den Grundgleichungen (40) genügt, im ganzen Raum endlich und einwertig ist und im Unendlichen in geeignetem Grade null wird, identisch verschwinden muß. — Die den Gleichungen (40) genügenden Funktionen u, v, w besitzen ferner im Innern des Raums S Ableitungen von beliebiger Ordnung und sind dort analytische Funktionen[31]).

10c. Fortsetzung: Folgerungen; verschiedene Ansätze zur Erbringung des Existenzbeweises. *V. Volterra*[32]), *G. Lauricella*[32a]) und

32) Die von *V. Volterra* in seinen Vorlesungen gegebenen Resultate teilt *G. Lauricella* mit; vgl. Fußn. 32a).

E. und *F. Cosserat*[33]) haben die Raum- und Oberflächenintegrale, die in den Formeln von *Somigliana* auftreten, zum Gegenstand eines besonderen Studiums gemacht und gezeigt, dass ihre Eigenschaften denjenigen analog sind, die die in der *Green*'schen Formel auftretenden Integrale besitzen.

G. Lauricella beweist z. B. auch im Falle, dass ϱ variabel ist und zusammen mit X, Y, Z sehr allgemeinen Bedingungen genügt, folgenden Satz, der das Analogon zu dem *Laplace-Poisson'schen Theorem* der Potentialtheorie bildet: Die drei Integrale

$$(42)\qquad u_1 = -\frac{1}{4\pi\mu}\int_S \varrho \sum X u_1\, dS, \quad u_2 = -\frac{1}{4\pi\mu}\int \varrho \sum X u_2\, dS,$$

$$u_3 = -\frac{1}{4\pi\mu}\int \varrho \sum X u_3\, dS$$

sind als Funktionen von x_0, y_0, z_0 innerhalb und ausserhalb S endlich, stetig und eindeutig; in jedem Punkte ausserhalb S genügen sie den Gleichungen

$$\mu \Delta_0 u_1 + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x_0} = 0, \ldots,$$

in jedem Punkt innerhalb S den Gleichungen

$$\mu \Delta_0 u_1 + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x_0} = \varrho X_0, \ldots,$$

wo

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}, \quad \Theta_0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_0} + \frac{\partial u_2}{\partial y_0} + \frac{\partial u_3}{\partial z_0}$$

und X_0, Y_0, Z_0 die Werte von X, Y, Z als Funktionen von x_0, y_0, z_0 sind.

E. und *F. Cosserat* haben bemerkt, dass die drei Integralsysteme (39), mit beliebigen Konstanten multipliziert, dem Fall einer „konzentrierten", im Punkte $r = 0$ angreifenden Kraft entsprechen und dass eine solche auf einen Punkt im Innern einer Kugel wirkende Kraft durch Spannungen auf die Oberfläche ersetzt werden kann, die im Aussenraum den gleichen Verschiebungszustand hervorrufen. Dieser Satz stellt das Analogon zu dem *Gauss*'schen Satze der Potentialtheorie dar und kann als Ausgangspunkt einer der *Balayagemethode von H. Poincaré* zum Beweise der Existenz der Lösung (vgl. II A 7b, Nr. **31**, *Burkhardt-Meyer)* nachgebildeten Methode herangezogen werden.

32[a]) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 2[1] (1893), p. 298; Nuovo Cim. 35 (1893), p. 141, 177; Pisa Ann. sc. norm. 7 (1894), p. 40.

33) Paris C. R. 126 (1898), p. 1129; idem 133 (1901), p. 210.

Daran anschliessend haben dieselben Autoren dann weiter angedeutet, wie die Methode der Funktionalgleichung von *G. Robin*[33a]) auf das vorliegende Problem auszudehnen ist. Endlich zeigen sie, dass die den Kugelfunktionen hier entsprechenden Fundamentallösungen sich durch eine einfache Formel aus den Integralsystemen (39) ableiten lassen, ähnlich wie die Kugelfunktionen selbst aus $\frac{1}{r}$.

Schließlich hat auch von den Eigenschaften der *Somigliana*'schen Integrale ausgehend *G. Lauricella*[34]) versucht, die *Neumann*'sche *Methode des arithmetischen Mittels* (vgl. II A 7b, Nr. 27, *Burkhardt-Meyer)* zur Konstruktion des gegebenen Randwerten entsprechenden Potentials auf den Fall des elastischen Gleichgewichts isotroper Körper auszudehnen. Es ist ihm gelungen, die Existenz der Lösungen der Gleichungen (40) unter gewissen Beschränkungen bezüglich der Werte des Parameters $\frac{\lambda + \mu}{\mu}$ nachzuweisen, falls an der Oberfläche die Verschiebungen vorgeschrieben sind. Unter weitergehenden Beschränkungen hat er auch für den Fall, dass an der Oberfläche die Spannungen gegeben sind, das Existenztheorem bewiesen. Die Rechnungen sind jedoch ziemlich ausgedehnt, so dass auf diese Untersuchungen hier nicht näher eingegangen werden kann.

10d. Die Formeln von E. Betti für Dilatation und Rotation. Den Formeln von *Somigliana* für die Verschiebungskomponenten gehen parallel die von *E. Betti*[35]) zuerst gegebenen Formeln, die die *Dilatation* und *Rotationskomponenten* durch gewisse Raum- und Oberflächenintegrale ausdrücken. *E. Betti* findet diese Formeln für Θ und ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, indem er in die Gleichung, die das nach ihm benannte Theorem ausdrückt, die Verschiebungen

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

bzw.

$$u' = 0, \qquad v' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \qquad w' = +\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$$

und die entsprechenden für ϖ_2, ϖ_3 einsetzt. Es ergeben sich damit die Formeln:

33a) *G. Robin,* Paris C. R. 104 (1887), p. 1834 = Oeuvres 1, Paris 1899, p. 60.

34) Pisa Ann. norm. 7 (1894), p. 98; Ann. di mat. (2) 23 (1895), p. 287.

35) *E. Betti,* Nuovo Cim. (2) 8 (1872), p. 35 u. 164; u. 9 (1873), p. 34.

(43)
$$\left\{\begin{aligned}
-4\pi(\lambda+2\mu)\Theta(x_0,y_0,z_0) &= \int_S \varrho\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS\\
&+\int_\sigma\left(X_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+Y_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+Z_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma\\
&+2\mu\int_\sigma\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma,\\
-8\pi\mu\varpi_1(x_0,y_0,z_0) &= \int_S \varrho\left(Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS\\
+\int_\sigma\left(Z_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-Y_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma &+ \mu\int_\sigma\left(w\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-v\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma\\
+\mu\int_\sigma\Bigg\{u\frac{\partial}{\partial x}&\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(nz)-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(ny)\right]\\
&+v\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(nz)-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(ny)\right]\\
&+w\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(nz)-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(ny)\right]\Bigg\}d\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Die Formeln für ϖ_2 und ϖ_3 erhält man aus der für ϖ_1 hingeschriebenen durch cyklische Vertauschung der Grössen X, Y, Z; X_n, Y_n, Z_n; x, y, z.

Die *Betti*'schen Formeln lassen sich auch direkt aus den *Somigliana*'schen Formeln herleiten. Wenn man andererseits mittels der Formeln von *Betti* die Grössen Θ, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 bestimmt hat, so findet man die *Verschiebungen* u, v, w durch Superposition eines potentiellen und solenoïdalen Vektorfeldes (vgl. IV 14, Nr. **10**, *M. Abraham*), für die *Betti*[36]) im vorliegenden Falle folgende Form giebt:

Hat man irgendwie ein System von Funktionen Θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 bestimmt, die den Gleichungen der Elastizität genügen, so erhält man in

---

36) *E. Betti,* Elasticità, p. 33; *E. Cesàro,* Elasticità, p. 88. Eine andere Methode zur Bestimmung von u, v, w aus Θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 giebt *E. Cesàro*, Elasticità, p. 106.

$$(44)\quad \begin{cases} u = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial P_3}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z}, \\ w = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_2}{\partial x}, \end{cases}$$

wo T, P_1, P_2, P_3 beliebige Integrale der Gleichungen

$$\Delta T = \Theta, \qquad \begin{aligned} \Delta P_1 &= 2\varpi_1, \\ \Delta P_2 &= 2\varpi_2, \\ \Delta P_3 &= 2\varpi_3, \end{aligned}$$

ein System von Funktionen, die sich als Verschiebungskomponenten des im Gleichgewicht befindlichen elastischen Systems auffassen lassen.

Insbesondere liefern

$$\Theta_0 = -\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int\limits_S \varrho \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS,$$

$$\varpi_{1,0} = \frac{1}{8\pi\mu} \int\limits_S \varrho \left(Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS, \ldots$$

ein System von Funktionen Θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, die im Innern von S den Gleichungen des elastischen Gleichgewichts genügen; mithin bilden die durch

$$(45)\quad \begin{cases} -4\pi u_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_S \frac{\Theta_0\, dS}{r} + 2\left[\frac{\partial}{\partial z_0} \int\limits_S \frac{\varpi_{2,0}\, dS}{r} - \frac{\partial}{\partial y_0} \int\limits_S \frac{\varpi_{3,0}\, dS}{r}\right], \\ -4\pi v_0 = \frac{\partial}{\partial y_0} \int\limits_S \frac{\Theta_0\, dS}{r} + 2\left[\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_S \frac{\varpi_{3,0}\, dS}{r} - \frac{\partial}{\partial z_0} \int\limits_S \frac{\varpi_{1,0}\, dS}{r}\right], \\ -4\pi w_0 = \frac{\partial}{\partial z_0} \int\limits_S \frac{\Theta_0\, dS}{r} + 2\left[\frac{\partial}{\partial y_0} \int\limits_S \frac{\varpi_{1,0}\, dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_S \frac{\varpi_{2,0}\, dS}{r}\right] \end{cases}$$

definierten Funktionen u_0, v_0, w_0 von x_0, y_0, z_0 ein *System partikulärer Integrale* der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts für einen isotropen Körper. Für einen unendlich ausgedehnten Körper stellen sie, wie die (42), die allgemeine Lösung dar.

Mit (45) äquivalente Formeln wurden zuerst von *W. Thomson*[37]) aufgestellt. Derselbe[38]) gab auch die Reduktion der auftretenden sechsfachen Integrale auf dreifache Integrale.

---

37) *W. Thomson,* Cambr. and Dubl. math. Journ. 3 (1848), p. 87; *Thomson-Tait,* Natural philosophy 2, art. 730.

38) *Thomson-Tait,* Natural philosophy 2, art. 731.

10e. Integration mittels Systeme Green'scher Funktionen. Die *Somigliana*'schen Formeln

$$4\pi\mu u(x_0, y_0, z_0) = \int_S \varrho \sum X u_1 dS + \int_\sigma \sum X_n u_1 d\sigma - \int_\sigma \sum X_n^{(1)} u d\sigma, \ldots$$

liefern die Verschiebungskomponenten in einem Punkte (x_0, y_0, z_0) von S, wenn ausser den Massenkräften (im Innern des Körpers) an der Oberfläche σ die Spannungskomponenten X_n, Y_n, Z_n und zugleich die Verschiebungen u, v, w bekannt sind. Im allgemeinen genügt aber bereits die Kenntnis von je dreien dieser Grössen zur eindeutigen Bestimmung von u, v, w (vgl. Nr. 8). Hiervon ausgehend haben *V. Volterra* und *G. Lauricella*[39]) für die Gleichungen des elastischen Gleichgewichts ein Integrationsverfahren entwickelt, das der Methode der *Green*'schen Funktionen in der Potentialtheorie genau analog ist. Wie dort, so hat diese Methode auch hier die Bedeutung eines Verfahrens, das ein allgemeines Problem auf ein besonderes zurückzuführen gestattet.

Bezeichnen

$$u_1', v_1', w_1'; \; u_2', v_2', w_2'; \; u_3', v_3', w_3'$$

drei Systeme *regulärer* Integrale der Grundgleichungen des elastischen Gleichgewichts für einen isotropen Körper unter Ausschluss von Massenkräften, die auf σ gegebenen Bedingungen genügen,

$$X_n^{(1)'}, Y_n^{(1)'}, Z_n^{(1)'}; \; X_n^{(2)'}, Y_n^{(2)'}, Z_n^{(2)'}; \; X_n^{(3)'}, Y_n^{(3)'}, Z_n^{(3)'},$$

die Spannungen, die in jedem der drei Fälle an der Oberfläche σ angreifen, so hat man nach dem *Betti*'schen Theorem:

$$\int_S \varrho \sum X u_1' dS + \int_\sigma \sum X_n u_1' d\sigma - \int_\sigma \sum X_n^{(1)'} u d\sigma = 0,$$

$$\int_S \varrho \sum X u_2' dS + \int_\sigma \sum X_n u_2' d\sigma - \int_\sigma \sum X_n^{(2)'} u d\sigma = 0,$$

$$\int_S \varrho \sum X u_3' dS + \int_\sigma \sum X_n u_3' d\sigma - \int_\sigma \sum X_n^{(3)'} u d\sigma = 0.$$

Wenn nun auf σ die *Verschiebungen* gegeben sind und wenn man fordert, dass u', v', w' so bestimmt werden, dass sie auf der Oberfläche σ mit den *Somigliana*'schen Grundlösungen (39) in den Beziehungen:

$$u_1 + u_1' = 0, \quad v_1 + v_1' = 0, \quad w_1 + w_1' = 0, \quad \ldots, \quad w_3 + w_3' = 0$$

stehen, so liefern die *Somigliana*'schen Formeln:

---

39) Pisa Ann. sc. norm. 7 (1895), p. 1.

$$4\pi\mu u(x_0, y_0, z_0) = \int_S \varrho \sum X(u_1 + u_1')\, dS - \int_\sigma \sum [X_n^{(1)} + X_n^{(1)\prime}]\, u\, d\sigma,$$

. . . .

Damit ist die Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts gegeben, wenn ausser den Verschiebungskomponenten an der Oberfläche noch die äusseren Kräfte für die inneren Punkte vorgeschrieben sind. Die regulären Integralsysteme u', v', w', die auf der Oberfläche σ die vorgeschriebene Unstetigkeit haben und deren Existenz nur erst postuliert wird, kann man in Anlehnung an einen Sprachgebrauch der Potentialtheorie die *Greenschen Funktionen* des elastischen Gleichgewichts nennen.

Sind andererseits ausser den Kräften X, Y, Z auf σ die *Spannungen* X_n, Y_n, Z_n gegeben, so muss man die drei Systeme von Hülfslösungen: u_1', v_1', w_1'; ..., w_3' so zu bestimmen suchen, dass auf σ die Bedingungen:

$$(46)\quad \begin{cases} X_n^{(1)} + X_n^{(1)\prime} = 0, \quad Y_n^{(1)} + Y_n^{(1)\prime} = 0, \quad Z_n^{(1)} + Z_n^{(1)\prime} = 0; \\ \qquad \ldots, Z_n^{(3)} + Z_n^{(3)\prime} = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind. In diesem Falle aber ergiebt sich, dass dies nicht möglich ist, falls nicht S sich ins Unendliche erstreckt; denn wenn auf σ die Spannungskomponenten gegeben sind, so sind die Verschiebungen nur bis auf eine Verrückung des Systems als eines starren bestimmt (vgl. Nr. 7b), während nach dem Ansatz (46) sich die Verschiebungen als völlig bestimmt ergeben müssten. Hierzu stimmt folgendes: Wenn u_1', v_1', ..., w_3' sich so bestimmen liessen, dass die Gl. (46) erfüllt wären, so müsste

$$(47)\quad \begin{cases} 0 = \int_\sigma X_n^{(1)\prime} d\sigma = -\int_\sigma X_n^{(1)} d\sigma, \ \ldots, \\ 0 = \int_\sigma (Z_n^{(1)\prime} y - Y_n^{(1)\prime} z)\, d\sigma = -\int_\sigma (Z_n^{(1)} y - Y_n^{(1)} z)\, d\sigma, \ \ldots \end{cases}$$

sein. Setzt man aber andererseits, unter a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3 willkürliche Konstanten verstanden, für u, v, w die Ausdrücke

$$a_1 + p_3 y - p_2 z, \quad a_2 + p_1 z - p_3 x, \quad a_3 + p_2 x - p_1 y$$

in die *Somigliana*'schen Formeln ein (was unter der Voraussetzung zulässig ist, dass S sich nicht ins Unendliche erstreckt), so erhält man ein den Glgn. (47) widersprechendes Resultat, da jetzt:

$$(48)\quad \begin{cases} -4\pi\mu = \int_\sigma X_n^{(1)} d\sigma, \quad \int_\sigma Y_n^{(1)} d\sigma = \int_\sigma Z_n^{(1)} d\sigma = 0; \ \ldots \\ \int_\sigma (Z_n^{(1)} y - Y_n^{(1)} z)\, d\sigma = 0, \quad -4\pi\mu z_0 = \int_\sigma (X_n^{(1)} z - Z_n^{(1)} x)\, d\sigma, \\ \qquad 4\pi\mu y_0 = \int_\sigma (Y_n^{(1)} x - X_n^{(1)} y)\, d\sigma; \ \ldots \end{cases}$$

J. Fredholm[40]) hat gezeigt, wie man der vorliegenden Schwierigkeit entgeht. Man muss u_1', v_1', ... so zu bestimmen suchen, dass

$$X_n^{(1)} + X_n^{(1)'} = \alpha_1^{(1)} + \pi_3^{(1)} y - \pi_2^{(1)} z, \quad Y_n^{(1)} + Y_n^{(1)'} = \alpha_2^{(1)} + \pi_1^{(1)} z - \pi_3^{(1)} x,$$
$$Z_n^{(1)} + Z_n^{(1)'} = \alpha_3^{(1)} + \pi_2^{(1)} x - \pi_1^{(1)} y;$$
$$X_n^{(2)} + X_n^{(2)'} = \alpha_1^{(2)} + \pi_3^{(2)} - \pi_2^{(2)} z, \quad \ldots, \quad \ldots;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}$, $\pi_3^{(1)}$; $\alpha_1^{(2)}$, ... lineare Funktionen von x_0, y_0, z_0 sind, die so angesetzt sind, dass die Gl. (48) und gleichzeitig die Relationen

$$\int_\sigma X_n^{(1)'} d\sigma = 0, \quad \ldots; \quad \int_\sigma (Z_n^{(1)'} y - Y_n^{(1)'} z)\, d\sigma = 0, \quad \ldots$$

erfüllt sind. Die *Somigliana*'schen Formeln liefern dann:

$$4\pi \mu u(x_0, y_0, z_0) =$$
$$\int_S \varrho \sum X(u_1 + u_1')\, dS + \int_\sigma \sum X_n (u_1 + u_1')\, d\sigma + h_1 + k_3 y_0 - k_2 z_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo h_1, h_2, h_3; k_1, k_2, k_3 Konstanten sind; damit hat man die vollständige Lösung des vorgelegten Problems.

Alles dies findet sein genaues Gegenstück in der Potentialtheorie, wenn es sich darum handelt, eine Lösung der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ zu finden bei gegebenen Randwerten der Ableitung nach der Normalen.

Natürlich lassen sich diese Überlegungen auf die anderen Fälle elastischen Gleichgewichts ausdehnen, wo am Rande irgendwie zum Teil die Verschiebungs-, zum Teil die Spannungskomponenten gegegeben sind.

10f. Die Integrationsmethode von E. Betti-V. Cerruti. Wie das in vorstehender Nummer entwickelte Integrationsverfahren mittels Systeme *Green*'scher Funktionen von den *Somigliana*'schen Formeln Gebrauch macht, so geht die ältere Integrationsmethode von *E. Betti* und *V. Cerruti*[41]) von den *Betti*'schen Formeln aus. Sie ist zwar weniger direkt, aber im einzelnen weiter ausgebildet und auf das Problem der Ebene und Kugel mit Erfolg angewendet worden. Es gestaltet sich im einzelnen folgendermassen:

Sind an der Oberfläche σ die *Verschiebungskomponenten* gegeben, so sucht man zunächst ein System regulärer Integrale u', v', w' der

40) Acta math. 23 (1900), p. 41.

41) *E. Betti*, Elasticità, p. 55, 74; *V. Cerruti*, Roma Acc. Linc. Mem. 13 (1882), p. 81. Vgl. auch *J. Boussinesq*, Paris C. R. 106 (1888), p. 1043, 1119 und Application, Paris 1885.

Gleichungen des elastischen Gleichgewichts für ein isotropes System bei verschwindenden Massenkräften derart, dass auf σ gilt:

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Bezeichnet man mit X_n', Y_n', Z_n' die entsprechenden Oberflächenspannungen, so ergiebt das *Betti*'sche Theorem:

$$\int_S (Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_\sigma \left(X_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + Y_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Z_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma$$
$$= \int_\sigma (X_n'u + Y_n'v + Z_n'w)\,d\sigma$$

und die erste der Gleichungen (43) lässt sich schreiben

$$-4\pi(\lambda + 2\mu)\Theta(x_0, y_0, z_0)$$
$$= \int_S \left[X\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u'\right) + Y\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - v'\right) + Z\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - w'\right)\right] dS$$
$$+ \int_\sigma (X_n'u + Y_n'v + Z_n'w)\,d\sigma + 2\mu \int_\sigma \left(u \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma.$$

Damit ist die Dilatation bestimmt. Die Verschiebungen u, v, w selbst sind dann als Lösungen der Gleichungen

$$(49) \quad \Delta_0 u = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial \Theta}{\partial x_0}, \quad \Delta_0 v = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial \Theta}{\partial y_0}, \quad \Delta_0 w = -\frac{\lambda + \mu}{\mu}\frac{\partial \Theta}{\partial z_0}$$

durch die gegebenen Randwerte bestimmt.

Sind auf der Oberfläche die Werte der *Oberflächenspannungen* X_n, Y_n, Z_n vorgeschrieben, so muss man durch ein entsprechendes Verfahren nicht nur Θ, sondern auch ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 zu ermitteln suchen; u, v, w sind dann als Lösungen der Gl. (49) dadurch bestimmt, dass an der Oberfläche die Ableitungen nach der Normale gegebene Werte annehmen müssen:

$$\frac{du}{dn} = -\frac{X_n}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\Theta\cos(nx) + \varpi_2\cos(nz) - \varpi_3\cos(ny), \ \ldots$$

In dem Falle, dass S nicht sich ins Unendliche erstreckt, sind ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 nur bis auf Konstanten bestimmt, und es greifen in diesem Fall wieder ähnliche Bemerkungen Platz, wie sie im gleichen Falle in vorstehender Nummer gemacht sind.

10g. Ausdehnung der Resultate für krummlinige Koordinaten und auf anisotrope Körper. Das *Betti*'sche Theorem in Nr. **10a** wurde zunächst nur für cartesische Koordinaten aufgestellt, es gilt

natürlich auch bei Benutzung von rechtwinkligen *krummlinigen Koordinaten*[42]). Ebenso ist es leicht die *Somigliana*'schen und *Betti*'schen Formeln auf krummlinige Koordinaten zu transformieren[43]), so dass die in den voraufgehenden Nummern **10**b—**10**f dargelegten Betrachtungen sämtlich auch in krummlinigen Koordinaten sich aussprechen lassen.

Zugleich ist nach einer anderen Seite eine Ausdehnung der Resultate möglich. Alles was in Nr. **10**b—**10**f ausgeführt wurde, bezieht sich zunächst nur auf isotrope elastische Systeme. *J. Fredholm*[44]) hat jedoch gezeigt, dass diese Überlegungen sich unmittelbar auf *beliebige elastische Systeme* übertragen lassen. Es gelingt nämlich für die Gleichungen des Gleichgewichts eines beliebigen elastischen Systems drei Systeme partikulärer Integrale bei verschwindender Massenkraft X, Y, Z zu bestimmen, die den drei Systemen (39) bei den Gleichungen für isotrope Körper analog sind, also Funktionen, die im ganzen Gebiet S regulär sind ausser im Punkte (x_0, y_0, z_0), wo sie in dem Maasse wie $\frac{1}{r}$ unendlich gross werden. Auf weitere Ausführungen kann hier nicht eingegangen werden.

11. Übertragung der Methode der Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Die in den Nrn. **10**e und **10**f dargelegte Methode der Integration mit Hilfe von Systemen *Green*'scher *Funktionen* ergiebt sich als naturgemässe Folgerung aus der zwischen den Grundgleichungen des elastischen Gleichgewichts und der Potentialgleichung bestehenden Analogie. Sie ist daher auch der zunächst sich darbietende Weg zur Darstellung der Lösungen mittels *bestimmter Integrale*, indem man nämlich häufig in speziellen Fällen zur Kenntnis der *Green*'schen Funktionen durch besondere Kunstgriffe gelangen kann.

Es lässt sich die Analogie natürlich auch noch nach der Seite verfolgen, dass man nach Darstellung der Lösungen durch *Reihenentwicklungen* fragt. Indessen ist es bequemer, nicht speziell $\Delta u = 0$, sondern die allgemeinere Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, die in der Theorie der elastischen Bewegung eine besondere Rolle spielt, auch schon hier heranzuziehen. Es tritt damit der Gedanke der *Entwicklung der Lösungen* nach bestimmten Partikularlösungen, den „*Eigenfunktionen*", in den Vordergrund, eine Methode, die bisher noch nicht systematisch verfolgt ist, und für die die Theorie der Integralgleichungen neue

42) *E. Cesàro,* Elasticità, p. 198.

43) *O. Tedone,* Nuov. Cim. (4) 11 (1900), p. 3.

44) *J. Fredholm,* Acta math. 23 (1900), p. 1; Untersuchungen derselben Art werden auch von *C. Somigliana,* Ann. di mat. (2) 22 (1894), p. 143 gegeben. Siehe auch *M. Gebbia,* Ann. di mat. (3) 7 (1902), p. 141 u. (3) 10 (1904), p. 157.

Grundlagen giebt. Zugleich erscheint damit die alte *Fourier-Cauchy*'sche *Methode der trigonometrischen Partikularlösungen* in einem neuen Lichte.

Die *Methode der Partikularlösungen* findet bei der Integration zahlreicher Gleichungen der mathematischen Physik weitgehende Anwendung. Sie ist weit älter als die Methode der *Green*'schen Funktionen und, was die Anwendung auf numerische Berechnung betrifft, jener vielleicht sogar vorzuziehen. Die Sache liegt allerdings so, dass, wenn die Lösung des Problems auf beide Weisen gelingt, in der Regel auch der Übergang von der einen analytischen Darstellung der Lösung zur andern leicht zu bewerkstelligen ist. Es handelt sich hier im Grunde um zwei klassische Formen analytischer Darstellung, die ihr einfachstes Gegenstück in der Darstellung einer analytischen Funktion mittels des *Cauchy*'schen Integrals und mittels der *Taylor*'schen Reihe finden.

Die Methode der Partikularlösungen ist im Prinzip folgende: Man bestimmt unendlich viele partikuläre Lösungen, die nur einem Teil der Bedingungen unterworfen sind, denen die allgemeine Lösung genügen muss, und die gewisse, nicht ganz willkürliche Konstanten enthalten; diese Konstanten bilden eine unendliche diskontinuierliche oder kontinuierliche Wertfolge. Man bildet dann mit Hilfe der unendlich vielen partikulären Lösungen Reihen, bezw. Integrale, und bedient sich der damit hereinkommenden Koeffizienten, um die übrigen Bedingungen zu erfüllen. In dieser Fassung ist die Methode von *C. Jordan*[45]) für beliebige Systeme linearer Differentialgleichungen allgemein skizziert worden; sie umfasst als spezielle Fälle die alten Methoden der trigonometrischen Partikularlösungen für den unendlichen Raum von *J. B. Fourier*[46]) und *A. L. Cauchy*[46a]). Für den Fall der Gleichungen der Elastizität ist diese Methode von *C. Somigliana*[47]) näher ausgeführt worden.

Einen direkten Ansatz für die *Entwicklung der Lösungen nach „Eigenfunktionen"* haben für *isotrope* elastische Systeme *E.* und *F. Cosserat*[48]) gemacht, wobei ihnen gerade die Lösungsmethoden der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ als Muster dienen:

45) *C. Jordan*, Cours d'analyse 3, 2. Aufl., Paris 1896, p. 373.

46) *J. B. Fourier*, Théorie de la chaleur, Paris 1822.

46a) *A. L. Cauchy*, Exercices d'analyse et physique mathématique 1 (1840).

47) Lombardo Ist. Rend. (2) 24 (1891), p. 1005; idem (2) 29 (1896), p. 423.

48) Paris C. R. 126 (1898), p. 1089; idem 127 (1898), p. 415; idem 133 (1901), p. 145, 271, 326, 361, 382. Siehe auch die diesbezüglichen „indications sommaires" von *P. Appell*, Mécanique rationelle, Paris 1903, 3, p. 528, und *R. Marcolongo*, Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici, Mailand 1904, p. 238.

Man betrachtet die Lösungen u, v, w der Gleichungen

$$(50) \quad \Delta u + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta w + \xi \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

als Funktionen des Parameters ξ (für beliebiges ξ, während ursprünglich $\xi = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$, also $> \frac{1}{3}$ gilt) und sucht sie durch die Entwicklungen darzustellen:

$$(51) \quad \begin{cases} u = u_0 + \xi \sum \frac{A_i k_i U_i}{\xi - k_i}, \\ v = v_0 + \xi \sum \frac{A_i k_i V_i}{\xi - k_i}, \\ w = w_0 + \xi \sum \frac{A_i k_i W_i}{\xi - k_i}; \end{cases}$$

hier bedeuten, falls die Randbedingungen sich auf die *Verschiebungen* beziehen, u_0, v_0, w_0 drei harmonische Funktionen von x, y, z, die an der Oberfläche die für u, v, w vorgeschriebene Randwerte annehmen; A_i, k_i sind Konstante, U_i, V_i, W_i Funktionen von x, y, z, die, wie leicht zu erkennen, an der Oberfläche verschwinden und die Gleichungen (50) für $\xi = k_i$ befriedigen müssen.

Die Lösung des Problems ist damit auf die *Bestimmung der Polstellen* k_i von u, v, w und der ihnen entsprechenden *Eigenfunktionen* U_i, V_i, W_i zurückgeführt; die Konstanten A_i ergeben sich mit Hülfe der Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\iiint \Theta_i \Theta_j \, dx\, dy\, dz = 0 \; (i \neq j), \quad \text{wo } \Theta_i = \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z}.$$

Der Umstand, dass den „Eigenwerten" k_i des Parameters ξ Lösungen der Gleichungen (50) entsprechen, die an der Oberfläche verschwinden, scheint dem Eindeutigkeitstheorem der Elastizitätstheorie zu widersprechen. Der Natur der Funktion f zufolge bezieht sich jedoch letzteres nur auf die Werte $\xi > \frac{1}{3}$ (vgl. Nr. 2c). *E.* und *F. Cosserat* haben gezeigt, dass die Polstellen k_i sämtlich reell sind und zwischen den Grenzen $-\infty$ und -1 liegen. Die Möglichkeit der Entwicklungen (51) allgemein nachzuweisen, ist ihnen nicht gelungen, welcher Punkt eben von der Theorie der Integralgleichungen auszufüllen ist. Für die Kugel und die Kugelschale haben sie die Eigenwerte k_i und die entsprechenden Eigenfunktionen U_i, V_i, W_i bestimmt.

Sind an der Oberfläche die *Oberflächenspannungen* gegeben, so sind die Funktionen U_i, V_i, W_i definiert als die gewissen Eigenwerten k_i entsprechenden Lösungen der Gleichungen (50), für welche die Ausdrücke für die Oberflächenspannungen verschwinden. Die Lösung der Gleichungen (50) hört in diesem Falle bereits für $\xi = \frac{1}{3}$ auf, auf alle Fälle eindeutig bestimmt zu sein.

12. Gemischte Integrationsmethoden. Unter diesem Namen seien zwei Methoden zur Integration zusammengefasst, die entweder direkt die Grundgleichungen in ein System von Potentialgleichungen $\Delta\varphi = 0$ umsetzen und damit von den Eigenschaften der sog. *harmonischen Funktionen* Gebrauch machen oder unter Heranziehung der Glg. $\Delta\Delta\varphi = 0$ neben den harmonischen noch die sogenannten *biharmonischen* Funktionen einführen. Diese beiden Methoden scheinen besonders geeignet, spezielle Probleme tatsächlich zu lösen.

Von den Eigenschaften der *harmonischen Funktionen* macht die von *O. Tedone*[49]) gegebene Methode Gebrauch. Sie geht davon aus, dass die Grundgleichungen bei fehlenden Massenkräften für isotrope elastische Systeme sich schreiben lassen:

$$(52)\qquad \Delta\left(u + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta\right) = 0,\quad \Delta\left(v + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\Theta\right) = 0,$$
$$\Delta\left(w + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\Theta\right) = 0,$$

wobei benutzt ist, dass Θ eine harmonische Funktion, also $\Delta\Theta = 0$ ist.

Es handle sich zunächst um den Fall, dass an der Oberfläche σ die *Verschiebungen* vorgeschrieben sind. Bezeichnet dann G die am Rande verschwindende (mit Pol versehene) *Green*'sche Funktion der Potentialtheorie, so sind die Lösungen der obigen Gleichungen, wenn Θ für den Augenblick als bekannt vorausgesetzt wird, durch

$$(53)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma u\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta + \frac{+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \\ v = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma v\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\Theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \eta\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \\ w = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma w\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\Theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \zeta\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \end{cases}$$

gegeben, wo ξ, η, ζ die Oberflächenwerte von x, y, z bedeuten. Das Problem ist jetzt also nur noch, Θ so zu bestimmen, dass die Relation

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

identisch erfüllt ist. Da Θ eine harmonische Funktion, so genügt es, dafür zu sorgen, dass diese Bedingung an der Oberfläche befriedigt ist.

Sind auf der Oberfläche σ die *Spannungskomponenten* X_n, Y_n, Z_n gegeben, so setzt man zunächst auch ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 als bekannt voraus;

---

49) Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 129.

bezeichnet dann G_1 die *Green*'sche Funktion, für die am Rande $\frac{dG_1}{dn} = 0$, so lauten die Lösungen von (52):

$$(53')\begin{cases} u = \frac{1}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma X_n G_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \left[\frac{\lambda}{2\mu}\Theta\cos n\xi + \varpi_3\cos n\eta - \varpi_2\cos n\zeta\right] G_1 d\sigma \\ \qquad - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\Theta - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma \frac{d\xi\Theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{const.}, \\ v = \frac{1}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma Y_n G_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \left[\frac{\lambda}{2\mu}\Theta\cos n\eta + \varpi_1\cos n\zeta - \varpi_3\cos n\xi\right] G_1 d\sigma \\ \qquad - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} y\Theta - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma \frac{d\eta\Theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{const.}, \\ w = \frac{1}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma Z_n G_1 d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \left[\frac{\lambda}{2\mu}\Theta\cos n\zeta + \varpi_2\cos \eta\xi - \varpi_1\cos n\eta\right] G_1 d\sigma \\ \qquad - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} z\Theta - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma \frac{d\zeta\Theta}{dn} G_1 d\sigma + \text{const.} \end{cases}$$

Das Problem ist dann darauf zurückgeführt, Θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 so zu bestimmen, dass die Relationen

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$2\varpi_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\varpi_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\varpi_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

im ganzen Körper, bezw. an der Oberfläche, befriedigt werden.

Diese Methode läßt sich auch leicht auf den Fall nicht verschwindender Massenkräfte ausdehnen, so dass also die Lösung des Gleichgewichtsproblems möglich wird, ohne die Bedingungen am Rande zu ändern[50]). Die Idee, die Dilatation vorübergehend als bekannt anzunehmen und hernach aus einer Identität zu bestimmen, findet sich bereits bei *G. Lamé* und *E. Clapeyron*[51]) und später bei *E. Cesàro*[52]).

Auf dasselbe Problem Θ, bzw. Θ, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 zu bestimmen, führt die andere Methode, die neben den Eigenschaften der harmonischen die der *biharmonischen Funktionen* benutzt. Hier ist der Ausgangspunkt die sich sofort darbietende Bemerkung, dass, wenn die

50) *O. Tedone,* Palermo Circ. mat. Rend. 17 (1903), p. 241. *O. Tedone* hat seine Integrationsmethode auf die verschiedenen Einzelprobleme (Kugel, Halbraum u. s. w.) angewandt. Vgl. hierüber IV 25, Abschnitt I (*O. Tedone-A. Timpe*).

51) J. f. Math. 7 (1831), p. 155 = Paris Mém. prés. par div. sav. 4 (1833), p. 472.

52) *E. Cesàro,* Elasticità, p. 120.

Werte von Θ im ganzen Gebiet S oder auch nur auf dem Rande σ gegeben sind, die Verschiebungen u, v, w (wiederum im Falle verschwindender Massenkräfte) Lösungen der Gleichung

$$\Delta\Delta\varphi = 0$$

werden, mit der Bedingung, dass $\Delta\varphi$ im ganzen Raum oder auf der Begrenzung σ bekannte Werte hat.

Sind auf dem Rande σ die *Verschiebungen* gegeben, so sind die entsprechenden Lösungen von $\Delta\Delta\varphi = 0$ bestimmt und können wieder mit Hilfe der gewöhnlichen *Green*schen Funktion konstruiert werden. Das Problem ist also in der Tat auf die identische Erfüllung der Relation

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

zurückgeführt.

Sind auf der Begrenzung σ die *Oberflächenspannungen* gegeben, so nimmt man wieder auch $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ als bekannt an. Die Verschiebungen u, v, w sind ebenfalls wieder als Lösungen von $\Delta\Delta\varphi = 0$ bestimmt, von denen man die Δ-Werte und die Werte der normalen Ableitungen am Rande kennt. Also ist wieder das Problem auf die identische Erfüllung der Relationen

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2\varpi_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\varpi_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\varpi_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

zurückgeführt.

Hier sei noch angemerkt, dass neuerdings *G. Lauricella*[53]) unter Heranziehung des Verfahrens der *successiven Approximation* von dieser Integrationsmethode ausgeht, um das *Existenztheorem* für den Fall, dass an der Oberfläche die Verschiebungen gegeben sind, zu beweisen. Für den gleichen Fall vgl. auch *A. Korn*'s[54]) Beweis des Existenzsatzes.

13. Analytische Verallgemeinerung des Gleichgewichtsproblems[55]). Das System der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts ist, analytisch betrachtet, nur ein besonderer Fall viel all-

53) *G. Lauricella,* Nuovo Cim. (4) 9 (1899), p. 97; idem (4) 10 (1899), p. 5; Ann. di mat. (3) 11 (1905), p. 269.

54) *A. Korn,* Paris C. R. 142 (1906), p. 334; München Sitz.-Ber. 36 (1906), p. 37.

55) Aus einer Vorlesung von *V. Volterra. C. Somigliana* (Fussn. 47) hat den allgemeinen Fall von Systemen linearer, homogenener partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten betrachtet, für die ein *Betti*'sches Theorem gilt und die er „symmetrische Systeme“ nennt.

gemeinerer Gleichungssysteme, die sämtlich analoge Eigenschaften aufweisen und durch Nullsetzen der ersten Variation gewisser bestimmter Integrale erhalten werden. Bedeuten allgemein $x_1, x_2, \ldots, x_k$ k unabhängige Variabele, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ m Funktionen dieser Variabeln; bezeichnet man ferner mit $u_i^{(j)}$ die Ableitung von u_i nach x_j, mit $G(u_i)$ eine Funktion der u und eventuell der x, mit $f(u_i, u_i^{(j)})$ eine Funktion der u, $u^{(j)}$ und eventuell auch der x, mit $a(u_i)$ eine Funktion der u und der x und sucht die Funktionen u von x so zu bestimmen, dass die erste Variation des über den Teil S_k des k-dimensionalen Raumes $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ erstreckten Integrals

$$\int_{S_k} [f(u_i, u_i^{(j)}) - G(u_i)]\, dS_k$$

verschwindet mit der Nebenbedingung, dass das über die Grenze σ_k von S_k ausgedehnte Integral

$$\int_{\sigma_k} a(u_i)\, d\sigma_k$$

konstant gehalten wird, so findet man das Gleichungssystem:

$$(54)\qquad \frac{\partial G}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i^{(j)}}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

mit den Bedingungen an der Oberfläche σ_k:

$$(55)\qquad \sum_j \frac{\partial f}{\partial u_i^{(j)}} \cos(n x_j) = \frac{\partial a}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Wenn die Funktion f homogen und vom zweiten Grade in den u_i und $u_i^{(j)}$ ist, so wird für das hingeschriebene Gleichungssystem das *Betti'sche Theorem* bestehen bleiben. Bezeichnet man mit v_i zu u_i analoge Funktionen und mit Γ, α zu G, a analoge Funktionen, so stellt sich das in Rede stehende Theorem durch folgende Formel dar:

$$(56)\quad \int_{S_k} \sum_i v_i \frac{\partial G}{\partial u_i} dS_k - \int_{\sigma_k} \sum_i v_i \frac{\partial a}{\partial u_i} d\sigma_k = \int_{S_k} \sum_i u_i \frac{\partial \Gamma}{\partial v_i} dS_k - \int_{\sigma_k} \sum_i u_i \frac{\partial \alpha}{\partial v_i} d\sigma_k.$$

Ist überdies f eine definite Form der u und der $u^{(j)}$, so gilt für die Lösung der Gl. (54), (55) das *Eindeutigkeitstheorem* und der Beweis des *Existenztheorems* nach der Methode des *Dirichlet*'schen Prinzips. Wenn es dann gelingt, ein System partikulärer Integrale der Gl. (54) bei verschwindendem G zu bestimmen, die den Integralen (39) der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts für ein isotropes System analog sind, so lassen sich Formeln bilden, die den *Somigliana*'schen analog sind, und die Methode der Integration mit Hülfe *Green*'scher Funktionen lässt sich auf diesen allgemeinen Fall ausdehnen. Wenn

die x und die u sich auf drei reduzieren und G und a lineare Funktionen der u sind, so kommt man auf die Gleichungen der Elastizität zurück.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass bei Einführung des adjungierten Gleichungssystems für jedes System linearer Gleichungen ein *Betti*'sches Theorem existiert. (Über den Begriff der adjungierten Gleichung vgl. II A 7c, Nr. 1, *A. Sommerfeld.*)

III. Allgemeine Theorie der elastischen Bewegung.

14. Eindeutigkeit der Lösung. Der Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung des Problems der elastischen Bewegung (für den Fall eines einfach zusammenhängenden Körpers) gaben zuerst *G. Kirchhoff* und *F. Neumann*[56]). Multipliziert man die Hauptgleichungen (2) bezüglich mit $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, summiert und integriert über den ganzen vom elastischen System eingenommenen Raum S, so gelangt man durch partielle Integration leicht zu der folgenden Identität:

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\limits_S \left(X\frac{\partial u}{\partial t} + Y\frac{\partial v}{\partial t} + Z\frac{\partial w}{\partial t}\right) dS + \int\limits_\sigma \left(X_n\frac{\partial u}{\partial t} + Y_n\frac{\partial v}{\partial t}\right. \\ &\left. + Z_n\frac{\partial w}{\partial t}\right) d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left\{\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] - f\right\} dS. \end{aligned}\right.$$

Angenommen nun, zu jeder, auf den Zeitanfang $t = t_0$ folgenden Zeit t sei $X = Y = Z = X_n = Y_n = Z_n = 0$ und in einem beliebigen Augenblick, z. B. im ersten Augenblick, $t = t_0$, sei

$$u = v = w = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

dann zeigt die vorstehende Identität, dass das Integral

$$\int\limits_S \left\{\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] - f\right\} dS$$

von der Zeit unabhängig ist; da es aber zur Zeit $t = t_0$ verschwindet, so ist es identisch null, so dass für jedes t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = f = 0.$$

Diese Folgerungen in Verbindung mit den Eigenschaften von f zeigen, dass zu jeder Zeit u, v, w null sind.

---

56) *F. Neumann*, Elastizität, p. 125; *G. Kirchhoff*, Mechanik, p. 310, der einen speziellen Fall behandelt.

Könnten nun gegebenen Massenkräften X, Y, Z und gegebenen Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n, die als Funktionen der Zeit bekannt sind, sowie gegebenen Anfangsbedingungen zwei verschiedene Lösungssysteme u', v', w'; u'', v'', w'' entsprechen, so müsste das System nicht identisch verschwindender Funktionen: $u = u' - u''$, $v = v' - v''$, $w = w' - w''$ eine Lösung sein, die verschwindenden Massenkräften und Oberflächenspannungen, sowie den Anfangsbedingungen $u = v = w = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ entspräche, was mit dem vorigen Resultat im Widerspruch steht.

Zu demselben Schlusse gelangt man, wenn man, statt auf der Oberfläche σ die Werte der Spannungen X_n, Y_n, Z_n als Funktionen der Zeit vorzuschreiben, dort die Komponenten der Verschiebungen u, v, w giebt, oder auch die Komponenten der Verschiebungen nach einzelnen Koordinatenrichtungen und die Komponenten der Spannung nach den übrigen Richtungen.

15. Die ausgezeichneten Lösungen bei begrenzten Systemen.

15a. Definition der ausgezeichneten Lösungen. Ihre Haupteigenschaften. Das allgemeine Problem der Bewegung eines elastischen Systems wurde von *A. Clebsch*[57]) im wesentlichen auf die Theorie gewisser partikulärer Lösungen, der sog. *ausgezeichneten Lösungen*, zurückgeführt. Beschränkt man sich (nach Nr. 3) auf die Betrachtung des Falles, wo sowohl die Massenkräfte X, Y, Z wie die Oberflächenspannungen X_n, Y_n, Z_n null sind und versucht eine partikuläre Lösung des damit gegebenen Problems der Form:

$$u = u'\varphi(t), \quad v = v'\varphi(t), \quad w = w'\varphi(t), \tag{58}$$

wo u', v', w' Funktionen der Koordinaten x, y, z allein sind, zu bestimmen, so findet man:

$$\varphi(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt), \tag{59}$$

unter A, B und k Konstanten verstanden, während u', v', w' den Grundgleichungen:

$$\begin{cases} \varrho k^2 u' = \dfrac{\partial X_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z'}{\partial z}, \\ \varrho k^2 v' = \dfrac{\partial Y_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z'}{\partial z}, \\ \varrho k^2 w' = \dfrac{\partial Z_x'}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y'}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z'}{\partial z} \end{cases} \tag{60}$$

57) *A. Clebsch*, Elastizität, p. 62; *Clebsch-Saint-Venant*, Élasticité, p. 126. Siehe auch *E. Cesàro*, Elasticità, p. 58.

und den Bedingungen an der Oberfläche σ

$$(61)\qquad \begin{cases} X_x'\cos(nx) + X_y'\cos(ny) + X_z'\cos(nz) = 0, \\ Y_x'\cos(nx) + Y_y'\cos(ny) + Y_z'\cos(nz) = 0, \\ Z_x'\cos(nx) + Z_y'\cos(ny) + Z_z'\cos(nz) = 0 \end{cases}$$

genügen müssen; die Grössen sind mit Accenten versehen, da sie als mit den Funktionen u', v', w' gebildet aufzufassen sind. Bewegt sich ein elastisches System den Gleichungen (58) entsprechend, so sagt man, das System führt eine *harmonische Schwingung* aus. Die Gleichungen (60) und (61) heissen die *Grundgleichungen der harmonischen Bewegungen* und zwar Gleichungen (60) die Hauptgleichungen.

In Betreff der ausführlichen Untersuchung der harmonischen Schwingungen verweisen wir auf die Artikel über Akustik IV 26 (*H. Lamb*) und Optik V 21—23 (*A. Wangerin* und *W. Wien*). Hier sei über die *Haupteigenschaften der ausgezeichneten Lösungen* nur folgendes bemerkt:

Die Erfahrung führt zu der Annahme, dass ein elastischer Körper bei verschwindenden Randwerten unendlich viele harmonische Schwingungen auszuführen im Stande ist, die unendlich vielen Werten von k und willkürlichen Werten von A und B entsprechen. Die Werte von k, die sich als Wurzeln einer gewissen transcendenten (Determinanten-)Gleichung bestimmen, heissen die *ausgezeichneten Werte (Eigenwerte)* und die entsprechenden Funktionen u', v', w' die *ausgezeichneten Lösungen (Eigenfunktionen)* des Problems. Die ausgezeichneten Werte von k, deren Existenz vor der Hand einfach vorausgesetzt werde, mögen mit $k_1, k_2, k_3, \ldots$, die entsprechenden ausgezeichneten Lösungen mit u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3; ... bezeichnet werden.

Es sei nun

$$(62)\qquad K_{ij} = \int_S (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j)\,\varrho\, dS,$$

gesetzt, wo i und j zwei Indices bedeuten, die zwei gleichen oder verschiedenen Werten von k entsprechen. Setzt man u_i, v_i, w_i statt u', v', w' in die Gleichungen (60) ein und multipliziert diese Gleichungen bezüglich mit u_j, v_j, w_j, so findet man, indem man wie beim Beweise des *Betti*'schen Theorems verfährt:

$$(63)\qquad k_i^2 K_{ij} = -\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial x_x^{(i)}}\, x_x^{(j)} + \frac{\partial f}{\partial y_y^{(i)}}\, y_y^{(j)} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_y^{(i)}}\, x_y^{(j)} \right) dS.$$

Da die rechte Seite sich nicht ändert, wenn man die Indices i und j vertauscht, so folgt:

$$(k_i^2 - k_j^2) K_{ij} = 0.$$

Mithin

$$(64)\qquad \begin{cases} K_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j, \\ k_i^2 K_{ii} = -2\int\limits_S f_i\, dS \text{ für } i = j. \end{cases}$$

Hieraus läßt sich leicht ableiten, daß die ausgezeichneten Werte *nicht komplex* sein können[57a]). In der Tat, da alle übrigen vorkommenden Grössen reell sind, so müssten die Gleichungen (60) und (61), wenn sie von einem System komplexer Werte k_i, u_i, v_i, w_i erfüllt würden, auch von den konjugierten Werten befriedigt werden. Entspricht dem Index j dies neue System von Werten, so hätte man:

$$K_{ij} = \int\limits_S (u_i u_j + v_i v_j + w_i w_j)\, dS = 0;$$

das ist aber unmöglich, da die Produkte $u_i u_j$, $v_i v_j$, $w_i w_j$ im vorliegenden Falle Summen von Quadraten werden.

Der Fall, dass mehrere, etwa ν, ausgezeichnete Werte von k zusammenfallen, scheint zunächst auf Lösungen zu führen, die mit einer Potenz von t proportional sind und daher einer instabilen Bewegung entsprechen. *K. Weierstrass*[57b]) hat jedoch, wenigstens für ein System von endlichem Freiheitsgrade gezeigt, dass auch in diesem Falle sämtliche Potenzen von t verschwinden[57c]).

Die Ausführungen dieser Nummer gelten ohne Einschränkung nur für begrenzte Körper. Handelt es sich um den unbegrenzten Raum, so bilden die ausgezeichneten Werte k eine kontinuierliche Reihenfolge (vgl. oben Nr. **11**) und die ausgezeichneten Lösungen sind in hohem Grade willkürlich. Besonders einfach ausgezeichnete Lösungen sind dann die ebenen Wellen (vgl. IV 26, Nr. **6** a, *H. Lamb*).

15b. Die Superposition der ausgezeichneten Lösungen (das Prinzip von D. Bernoulli). Die Theorie der Schwingungen elastischer Körper stützt sich wesentlich auf das Prinzip der *Überlagerungen der kleinen Bewegungen*, wonach man aus zwei, oder allgemeiner aus mehreren partikulären Lösungen eines Problems der Bewegung elastischer Körper wiederum eine Lösung erhält, wenn man die entsprechenden Komponenten der verschiedenen Verschiebungen eines und desselben Punktes, wie sie den verschiedenen partikulären Lösungen entsprechen, algebraisch summiert.

57a) *S. D. Poisson*, Bull. Soc. philom. 1826, p. 145.

57b) *K. Weierstrass*, Berlin Ber. 1858, p. 207. Vgl. auch *Fr. Pockels*, Über die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 48.

57c) Vgl. *E. J. Routh*, Advanced rigid dynamics, chap. 6.

Seine analytische Begründung beruht auf dem linearen Charakter der Gleichungen, die bei der Lösung ähnlicher Probleme angewendet werden. Diesem Prinzip zufolge hat man also, wenn

$$\varphi_i(t) = A_i \cos(k_i t) + B_i \sin(k_i t),$$

in

$$\sum_1^n {}_i u_i \varphi_i(t), \quad \sum_1^n {}_i v_i \varphi_i(t), \quad \sum_1^n {}_i w_i \varphi_i(t)$$

für beliebiges n stets eine Lösung des Problems der Bewegung eines elastischen Körpers.

Die Erfahrung lehrt umgekehrt, dass der von einem schwingenden Körper herrührende Ton stets durch die Überlagerung einfacher Töne zu Stande kommt, von denen jeder einer bestimmten harmonischen Schwingung entspricht[58]). Natürlich kann die Erfahrung bei irgend einem schwingenden Körper nur eine endliche Zahl von Tönen nachweisen; aber es ist bei den Physikern stehende Annahme, dass die Zahl der harmonischen Schwingungen, die ein elastischer Körper auszuführen vermag, unendlich gross ist und dass jeder von diesem Körper ausgehende Schall von der Überlagerung einer endlichen oder unendlichen Zahl von Tönen herrührt, die ebenso vielen harmonischen Schwingungen entsprechen. So legt die Erfahrung selbst für die allgemeine Lösung des Problems der Bewegung eines elastischen Körpers den Ansatz nahe:

$$(65) \qquad u = \sum_1^\infty {}_i u_i \varphi_i(t), \quad v = \sum_1^\infty {}_i v_i \varphi_i(t), \quad w = \sum_1^\infty {}_i w_i \varphi_i(t),$$

worin die Konstanten A_i und B_i in geeigneter Weise zu bestimmen sind. Diese Induktion hat zuerst *Daniel Bernoulli*[59]) durchgeführt; er war der erste, der auf diese Weise das allgemeine Integral der Gleichung der schwingenden Saite bildete. Übrigens ist dies Verfahren in genauer Übereinstimmung mit der Methode der Integration mittels Partikularlösungen, von der in Nr. **11** a die Rede war; die Methode der Integration mittels (ausgezeichneter) Partikularlösungen hat geradezu vom *Bernoulli*'schen Prinzip her ihren Ursprung genommen und ihre besten Beispiele empfangen.

Setzt man die Existenz der unendlich vielen ausgezeichneten Lösungen voraus und nimmt überdies an, dass die Reihen (65) konvergent und wenigstens zweimal nach jeder der Variabeln x, y, z, t

58) *G. S. Ohm,* Ann. Phys. Chem. 59 (1843), p. 513; *H. v. Helmholtz,* Ann. Phys. Chem. 108 (1859), p. 280.

59) *D. Bernoulli,* Comm. Acad. Petrop. 6 ad annos 1732/33 (1738), p. 108.

gliedweise differentiierbar sind, so muss es, wenn die Reihen (65) das allgemeine Integral des vorliegenden Problems darstellen sollen, möglich sein, die Konstanten A_i und B_i so zu bestimmen, dass zu Anfang d. h. für $t = 0$:

$$(66)\quad \begin{cases} u_0 = \sum_1^8 {}_i A_i u_i, \qquad v_0 = \sum_1^\infty {}_i A_i v_i, \qquad w_0 = \sum_1^\infty {}_i A_i w_i, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = \sum_1^\infty {}_i k_i B_i u_i, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = \sum_1^\infty {}_i k_i B_i v_i, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 = \sum_1^\infty {}_i k_i B_i w_i, \end{cases}$$

wie auch immer u_0, v_0, w_0; $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0$ als Funktionen von x, y, z gegeben sein mögen. Vorausgesetzt, dass sich jene Grössen in der in (66) angedeuteten Weise entwickeln lassen und dass die Reihen integrabel sind, folgt aus den in Nr. **14a** für die ausgezeichneten Lösungen angemerkten Eigenschaften

$$(67)\quad \begin{cases} A_j = \dfrac{\int_S (u_0 u_j + v_0 v_j + w_0 w_j) \varrho \, dS}{\int_S (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) \varrho \, dS}, \\ B_j = \dfrac{\int_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 u_j + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 v_j + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 w_j\right] \varrho \, dS}{k_j \int_S (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) \varrho \, dS}. \end{cases}$$

15c. Die Existenz der Lösung, insbesondere der ausgezeichneten Lösungen. Das Rayleigh'sche Prinzip. Der in den Nrn. **14a** und **14b** gegebene Ansatz für die Lösung des Problems der elastischen Bewegung beruhte auf physikalischer Induktion. Vom mathematischen Standpunkt wird das Problem erst dann als in der angegebenen Weise gelöst angesehen werden können, wenn[60]):

1) die Existenz der unendlich vielen ausgezeichneten Werte k_i und der entsprechenden ausgezeichneten Lösungen u_i, v_i, w_i bewiesen ist;

2) der analytische Ausdruck dieser ausgezeichneten Funktionen bestimmt ist;

3) der Nachweis dafür erbracht ist, dass, wenn u_0, v_0, w_0; $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0$ willkürlich als Funktionen von x, y, z gegeben sind, die Reihen rechter Hand (66) mit den aus (67) bestimmten

---

60) *H. Poincaré,* Élasticité, p. 111 und Amer. Journ. 12 (1890), p. 211; Palermo Circ. mat. Rend. 8 (1894), p. 57.

A_i, B_i konvergieren und die entsprechenden Grössen $u_0, v_0, \ldots, \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0$ wirklich darstellen;

4) bewiesen ist, dass die Reihen (65) in jedem Punkte von S endliche Funktionen sind, die nach jeder der Variabeln x, y, z, t wenigstens zweimal gliedweise differentiierbar sind.

Man hat sich nun in der Hauptsache mit der Frage 1) beschäftigt, in der Annahme, dass die Voraussetzungen 3) und 4) im allgemeinen erfüllt sind, wenn es gelungen ist, die analytischen Ausdrücke der unendlich vielen ausgezeichneten Lösungen u_i, v_i, w_i zu bilden.

Einer der ersten Versuche, die Existenz der unendlich vielen Systeme ausgezeichneter Lösungen nachzuweisen, besteht in dem sogenannten *Rayleigh'schen Prinzip*[61]), das übrigens schon die Mathematiker des 18. Jahrhunderts ganz ungescheut verwendet haben. Danach wird *angenommen*, dass die streng bewiesenen Gesetze für die unendlich kleinen Schwingungen eines mechanischen Systems, das eine endliche Anzahl n von Freiheitsgraden besitzt, richtig bleiben, wenn n gegen Unendlich strebt und das System gewöhnlicher Gleichungen, das uns in jenem Fall die Bewegung darstellt, in ein System partieller Differentialgleichungen übergeht, während das Punktsystem in ein Kontinuum übergeht. In dieser Form ist das Prinzip insbesondere in der Akustik zu allseitiger Verwendung gekommen (vgl. IV 26, Nr. **1** e, *H. Lamb*). Erst neuerdings ist es von *D. Hilbert*[62]) in Verfolg seiner Beiträge zur Theorie der Integralgleichungen im Prinzip mathematisch streng ausgestaltet worden, womit sich zugleich auch die Punkte 3) und 4) erledigen. Es wird jedoch hierauf an dieser Stelle nicht weiter eingegangen, sondern in der folgenden Nr. **15** d über sonstige Versuche, die Existenz der Lösung zu beweisen, berichtet, um so lieber als zur Zeit die Ansätze der Theorie der Integralgleichungen für den Eall der Elastizität noch fehlen.

15d. Fortsetzung: Weitere Existenzbeweise. Wir nennen zuerst die Entwicklungen von *H. Poincaré*[63]), die zwar zunächst von den Einwänden getroffen werden, die sich gegen die auf das *Dirichlet*'sche Prinzip gegründeten Beweise richten, wo aber die Untersuchungen

---

61) *Lord Rayleigh,* Theory of sound, London 1877 (ins Deutsche übersetzt von *F. Neesen*, Braunschweig 1880); 2. ed. London 1894. — Vgl. *F. Pockels,* Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 39.

62) *D. Hilbert,* Grundzüge einer Theorie der linearen Integralgleichungen, Gött. Nachr. 1904ff. (bisher 5 Noten).

63) *H. Poincaré,* Amer. Journ. of math. 12 (1890), p. 211; Élasticité, p. 103 ff.; siehe auch *H. Weber,* Math. Ann. 1 (1868), wo für den einfachen Fall der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ bereits dieselben Betrachtungen gegeben werden.

von *D. Hilbert* inzwischen den Weg gezeigt haben, wie diesen Einwänden zu begegnen ist (vgl. Nr. **9**).

Die unendlich vielen Systeme ausgezeichneter Lösungen sind beim *Poincaré*'schen Beweis die Funktionssysteme, die das Integral

$$\int_S f dS$$

zum Maximum machen und den successiven Bedingungen genügen:

$$\int_S (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\varrho dS = 1;$$

$$\int_S (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\varrho dS = 1, \qquad \int_S (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)\varrho dS = 0;$$

$$\int_S (u_3^2 + v_3^2 + w_3^2)\varrho dS = 1, \qquad \int_S (u_1 u_3 + v_1 v_3 + w_1 w_3)\varrho dS = 0,$$

$$\int_S (u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3)\varrho dS = 0;$$

. . . .

Hiernach genügen u_i, v_i, w_i einer Gleichung folgender Art:

$$(68) \quad \begin{cases} \int_S \delta f dS + 2\lambda \int_S (u\delta u + v\delta v + w\delta w)\varrho dS \\ \quad + \lambda_1 \int_S (u_1 \delta u + v_1 \delta v + w_1 \delta w)\varrho dS + \cdots \\ \quad + \lambda_{i-1} \int_S (u_{i-1}\delta u + v_{i-1}\delta v + w_{i-1}\delta w)\varrho dS = 0, \end{cases}$$

wo $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{i-1}$ zu bestimmende Konstanten sind. Setzt man in dieser Gleichung u_i, v_i, w_i für die willkürlichen δu, δv, δw und berücksichtigt die Bedingungen, denen die u_i, v_i, w_i unterworfen sind, so findet man

$$\int_S f_i dS + \lambda = 0,$$

wo f_i den Ausdruck von f bedeutet, der mit den Funktionen u_i, v_i, w_i gebildet ist. λ ist also eine positive Konstante, die mit k_i^2 bezeichnet werden mag. Setzt man andererseits in (68) für δu, δv, δw nacheinander die Funktionssysteme: $u_{i-1}, v_{i-1}, w_{i-1}$; $u_{i-2}, v_{i-2}, w_{i-2}$; . . . u_1, v_1, w_1 und berücksichtigt die successiven Bedingungen, denen diese Funktionen unterliegen, so findet man:

$$\lambda_{i-1} = \lambda_{i-2} = \cdots\cdots = \lambda_1 = 0.$$

Daraus folgt, dass u_i, v_i, w_i der Gleichung genügen:

$$(69) \qquad \int_S \delta f dS + 2k_i^2 \int_S (u\delta u + v\delta v + w\delta w)\varrho dS = 0$$

und mithin auch den Gleichungen (60) und (61) für den Wert k_i^2 von k^2.

Jedem System von Funktionen u_i, v_i, w_i, die einer der Gleichungen (68) genügen, entspricht ein einziger Wert k_i^2 von λ, aber nicht umgekehrt. Zwei Funktionssysteme, die zwei verschiedenen Gleichungen genügen, können nicht übereinstimmen; wäre z. B. $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$, $w_2 = w_1$, so würde folgen:

$$\int_S (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)\varrho\, dS = \int_S (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\varrho\, dS$$
$$= \int_S (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\varrho\, dS = 0.$$

Man hat sonach unendlich viele Systeme von Funktionen u_i, v_i, w_i, die sämtlich von einander verschieden sind, vorausgesetzt natürlich, dass jede Gleichung (68) wenigstens eine Lösung hat. Die Funktionen eines dieser Systeme lassen sich nicht linear und in derselben Weise durch die Funktionen der vorhergehenden Systeme ausdrücken. Von den Werten k_i^2, die den unendlich vielen Systemen von Funktionen u_i, v_i, w_i entsprechen, welche den successiven Gleichungen (68) genügen, können nicht unendlich viele null werden; andernfalls würden die entsprechenden Funktionen u_i, v_i, w_i Verrückungen des elastischen Systems als eines starren darstellen und es würde deren unendlich viele geben, die sich als lineare Funktionen einer endlichen Anzahl derselben würden ausdrücken lassen. Schliesslich kann es, wie man zeigt, unter den Werten k^2 nicht unendlich viele geben, die einander gleich sind.

15e. Fortsetzung: Der Spezialfall der Isotropie. Die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Für den Fall, wo das *elastische System isotrop* ist, kann der Beweis des Existenztheorems noch weiter geführt und in dem Falle, wo an der Oberfläche die Verschiebungen vorgeschrieben sind, mit den alten Methoden sogar streng ausgestaltet werden. Es ist hierfür die Bemerkung wichtig, daß wie die Theorie der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts sich zunächst als eine Verallgemeinerung der Theorie der Potentialgleichung darstellt, so die Theorie der Schwingungen eines begrenzten elastischen Systems als eine Verallgemeinerung der Theorie erscheint, die sich auf die Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

mit zwei unabhängigen Variablen der Schwingungen einer elastischen Membran bezieht.

Die grundlegende Arbeit bezüglich des Existenztheorems für diese

Gleichung ist die von *H. A. Schwarz*[64]), in der zum erstenmal für zweidimensionale Gebiete die Existenz der *ersten* ausgezeichneten Lösung unter der Voraussetzung streng bewiesen ist, dass an dem Rande die Lösung selbst null wird. Diese Arbeit hat eine ganze Reihe von Arbeiten seitens anderer Mathematiker hervorgerufen, von denen am bemerkenswertesten die von *E. Picard* und die von *H. Poincaré*[65]) sind. Der letztere beweist unter der üblichen Voraussetzung für die genannten Gleichungen die Existenz der unendlich vielen ausgezeichneten Lösungen. Ein zusammenfassendes Referat über die älteren Untersuchungen bezüglich der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ hat *Fr. Pockels* gegeben[66]).

Diese Resultate sind nun von *G. Lauricella* auf den Fall der Schwingungsgleichungen für ein isotropes elastisches System und noch anderer Gleichungen ausgedehnt worden[67]).

Damit ergiebt sich, dass das Studium der Bewegungsprobleme bei elastischen Systemen, das analytisch sich in letzter Linie auf das Studium der Gleichungen der harmonischen Schwingungen (60), (61) reduziert, als naturgemässe Verallgemeinerung der bekannten Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ erscheint, und man kann sagen, dass die Resultate, die für diese Gleichung gelten, zum grössten Teil auch für die Gleichungen (60) zutreffen werden, was allerdings bisher nicht durchweg bewiesen ist. Im Falle eines isotropen Systems ist diese Übertragung tatsächlich grösstenteils geleistet.

15f. Die Aufstellung der ausgezeichneten Lösungen. Für die wirkliche Ermittlung der ausgezeichneten Lösungen oder allgemeiner für die Integration der Gl. (60) bei gegebenen Randbedingungen bietet sich zunächst die *Methode der Partikularlösungen* dar. In der Tat ist dies die in den Fällen, wo das Problem sich lösen lässt, vorzugsweise befolgte Methode. Man kann aber auch versuchen, die in Rede stehenden Gleichungen nach den üblichen Methoden mittels *Green'scher Funktionen* zu integrieren, wofür von *O. Tedone*[68]) für den Fall isotroper Systeme Formeln aufgestellt worden

---

64) Helsingfors Acta soc. scient. Fenn. 15 (1885), p. 333 = Ges. math. Abh. 1, Berlin 1890, p. 241.

65) *H. Poincaré,* Palermo Circ. mat. Rend 8 (1894), p. 57; *E. Picard,* Acta math. 12 (1889), p. 323; Traité d'analyse 3, Paris 1896, p. 105. S. auch II A 7 c, Nr. 9 (*Sommerfeld*).

66) *Fr. Pockels,* Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891.

67) Ann. di mat (2) 26 (1897), p. 113; Torino Mem. (2) 45 (1895), p. 295; idem (2) 46 (1896), p. 65. Siehe auch *A. Korn,* Paris C. R. 142 (1906), p. 508.

68) *O. Tedone,* Torino Mem. (2) 47 (1896—97), p. 228 bezw. 48 und 255 bezw. 75.

sind, die der Formel von *H. Weber* und *H. v. Helmholtz* für die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ bei zwei oder drei Dimensionen analog sind (vgl. II A 7c, Nr. 9, *A. Sommerfeld*).

16. Der Fall eines unbegrenzten Mediums. Wellen.

Wenn das elastische System den ganzen Raum erfüllt, verschwinden die Randbedingungen, und das Studium des Problems der Bewegung des elastischen Systems reduziert sich im allgemeinen Falle auf das Studium der Integrale der Differentialgleichungen (2) bei gegebenen Anfangsbedingungen, im Falle der Isotropie auf das der Gleichungen (8) bzw. (9). Diese werden durch Differentiation und Addition leicht in die anderen:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Theta$$

und

$$\frac{\partial^2 \varpi_i}{\partial t^2} = b^2 \Delta \varpi_i \text{ (für } i = 1, 2, 3)$$

umgesetzt (vgl. IV 26, Nr. 8a, *H. Lamb*). Die Untersuchung dieser Gleichungen stellt sich damit als eine Verallgemeinerung der Theorie der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi \tag{70}$$

dar, welche die *Ausbreitung des Schalles* beherrscht, und die unter Annahme eines allseitig normalen Drucks sofort aus den Gleichungen (8) mit $a^2 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\varrho}$ folgt, andererseits natürlich unter Annahme eines Geschwindigkeitspotentials φ und Wellen unendlich kleiner Amplitude sich aus den hydrodynamischen Grundgleichungen ergiebt (vgl. IV 26, Nr. 6a, *H. Lamb*).

16a. Der besondere Fall der Schallgleichung. Zu den wichtigsten, an die Schallgleichung anknüpfenden Fragen gehört die der *Ausbreitung der Wellen*. *Chr. Huygens*[69]), der sich wesentlich von der physikalischen Anschauung leiten liess, hat hier das fundamentale nach ihm benannte Prinzip aufgestellt, allerdings in einer ungenauen und nicht sehr klaren Form, die zu langen Auseinandersetzungen speziell zwischen *A. Fresnel* und *S. D. Poisson* geführt hat. *Poisson*[70]) verdankt man die Auffindung des allgemeinen Integrals der Gleichung (70), die an sich jeden Einwand hätte abschneiden und die Klarheit im *Huygens*'schen Prinzip hätte herstellen können. Doch wurde diese

69) *Chr. Huygens,* Traité de la lumière, 1690.

70) *S. D. Poisson,* Paris Mém. de l'Acad. 3 (1818).

erst später vollständig erreicht, als *G. Kirchhoff*[71]) seine Formel entdeckte, von der die *Poisson*'sche ein besonderer Fall ist.

Die *Kirchhoff*'sche Formel steht zur Gleichung (70) in demselben Verhältnis wie die *Green*'sche Formel zur Potentialgleichung und lässt sich zugleich mit der *Poisson*'schen Formel aus einer anderen, erheblich allgemeineren ableiten, welch letztere im linearen vierdimensionalen Raum gilt, wo die Koordinaten eines Punktes durch (x, y, z, t) gegeben sind[72]).

Ist (x_0, y_0, z_0, t_0) ein Punkt dieses Raumes und Σ das Stück einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, die in diesen Raum eingetaucht ist und von der kegelartigen Mannigfaltigkeit

$$a(t_0 - t) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} = r$$

begrenzt wird, so lautet die in Rede stehende Formel:

$$(71) \qquad 4\pi a^2 \varphi(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{dn} - a^2 \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} \right) \frac{d\Sigma}{r}$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \int_{\Sigma} \left(- \frac{dt}{dn} + a^2 \frac{t_0 - t}{r} \frac{dr}{dn} \right) \varphi \frac{d\Sigma}{r},$$

wo $\frac{dt}{dn}, \frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}, \frac{dz}{dn}$ die Richtungscosinus der Normalen von Σ bedeuten. Die Aufstellung dieser Formel gelingt mit Hilfe des Charakteristikenbegriffs (vgl. II A 7 c, Nr. **3**, *A. Sommerfeld*).

Wird Σ gebildet von dem Stück des linearen Raumes (x, y, z) das von der gewöhnlichen Oberfläche σ begrenzt wird, und von einem Stück der dreidimensionalen cylindrischen Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man durch jeden Punkt der Oberfläche σ eine Parallele zur t-Axe zieht, so ergiebt sich unmittelbar die *Kirchhoff'sche Formel*

$$(72) \qquad 4\pi \varphi(x_0, y_0, z_0, t_0)$$
$$= \int_{\sigma} \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \frac{\varphi\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right)}{r} - \frac{1}{r} \frac{d}{dn} \varphi\left(x, y, z, t_0 - \frac{r}{a}\right) \right\} d\sigma,$$

worin

$$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{dn}, \quad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{dn}.$$

Reduziert sich hier σ auf eine Kugel, so findet man die *Poisson'sche Formel*; man erhält diese auch unmittelbar aus (71), indem man annimmt, dass Σ sich eben auf das Stück des Raumes (x, y, z) redu-

71) Berlin Ber. 1882, p. 641; Ann. Phys. Chem. (2) 18 (1883), p. 663; Ann. éc. norm. sup. (3) 3 (1886), p. 303; Vorlesungen über math. Physik: Optik, Leipzig 1901, p. 22.

72) *O. Tedone,* Roma Acc. Linc. Rend. (5) 5^1 (1896), p. 357.

ziert, das von jener Kugel σ und einem Stück der oben genannten zylindrischen Mannigfaltigkeit eingeschlossen ist. Die *Poisson*'sche Formel lässt sich schreiben:

$$(73) \qquad 4\pi\varphi(x, y, z, t)$$
$$= \int_0^\pi d\omega \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \varphi_1(x + at\sin\omega\cos\vartheta, y + at\sin\omega\sin\vartheta, z + at\cos\omega)\, t\sin\omega$$
$$+ \frac{d}{dt}\int_0^\pi d\omega \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \varphi_2(x + at\sin\omega\sin\vartheta, y + at\sin\omega\sin\vartheta, z + at\cos\omega)\, t\sin\omega,$$

wo die Funktionen φ_1 und φ_2 unter den Integralzeichen die willkürlichen Funktionen bedeuten, auf die sich φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ reduzieren. Die Formel (73) stellt mithin auch das „allgemeine Integral“ der Gleichung (70) dar, wie es in der Regel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen verstanden wird und dessen Existenz ohne weiteres aus den dort üblichen *Cauchy-Kowalewski*'schen Existenzsätzen folgt (vgl. II A 5, Nr. **1**, *E. v. Weber*).

Es sei noch bemerkt, dass, wenn man in der *Kirchhoff*'schen Formel die Lösung φ von (70) als Produkt einer Funktion φ' von x, y, z und einer Funktion von t voraussetzt, eben diese Formel in die von *H. v. Helmholtz*[73]) für die harmonischen Schwingungen aufgestellte:

$$(74) \qquad 4\pi\varphi'(x_0, y_0, z_0) = \int_\sigma \left(\varphi' \frac{d}{dn}\frac{\cos\varkappa r}{r} - \frac{\cos\varkappa r}{r}\frac{d\varphi'}{dn}\right) d\sigma,$$

die bereits erwähnt wurde (vgl. Nr. **15** f), übergeht.

V. Volterra[74]) und *O. Tedone*[75]) haben für die Gleichungen vom Typus (70) bei zwei Dimensionen, bzw. bei beliebiger Zahl von Dimensionen, Formeln entwickelt, die den Gleichungen (71), (72), (73), (74) entsprechen.

16b. Ausdehnung der Resultate auf allgemeine isotrope Systeme. Analoge Formeln lassen sich nun sehr wahrscheinlich auch für das allgemeine System der Grundgleichungen (2) der Bewegungen eines elastischen Körpers aufstellen. Im Falle der *Isotropie* gelingt dies ziemlich einfach[76]).

Mittels der Methode der Charakteristiken hat in der Tat

---

73) J. f. Math. 57 (1860), p. 1.

74) Acta math. 18 (1894), p. 161; Roma Acc. Linc. Rend. (5) 2^1 (1893), p. 389, 549.

75) Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 1.

76) *O. Tedone,* Torino Mem. (2) 47 (1896/97), p. 181; siehe auch: Torino Rend. 34 (1899), p. 1054 und 35 (1900), p. 460.

O. Tedone im linearen Raum (x, y, z, t) Formeln abgeleitet, die der Formel (71) für Gleichung (70) analog sind und die das allgemeine Integral des Gleichungssystems in diesem Raum darstellen. Es ergeben sich aus diesen Formeln genau in der für die Gleichung (70) beschriebenen Weise Formeln, die der *Kirchhoff*'schen und der *Helmholtz*'schen analog sind[76a]). Ebenso leicht lassen sich auch Formeln aufstellen, die der *Poisson*'schen analog sind und das allgemeine Integral der Gleichungen der Bewegung isotroper elastischer Körper im Raum (x, y, z) darstellen; aus ihnen folgt auch sofort der Satz von *Stokes-Clebsch*[77]), dass *jedes System von Integralen der Gleichungen der Bewegung eines isotropen elastischen Mediums sich in folgender Form darstellen lässt:*

$$(75) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}$$

wo in dem Fall, dass die Massenkräfte null sind, P der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta P$$

genügt, während U, V, W die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

befriedigen.

Von diesem Satze existieren auch mehrere direkte Beweise[77]). Bemerkt sei noch, dass analoge Resultate für die Gleichungen der Schwingungen eines elastischen Systems in einem zweidimensionalen Raum[74]) und auch in einem Raum von n Dimensionen gelten[77a]).

16c. Weitergehende Untersuchungen. Die *Poisson*'sche Formel ist in der Analysis und in der mathematischen Physik von großer Bedeutung, auch historisch, da sie das allgemeine Integral einer der ersten und wichtigsten Gleichungen der mathematischen Physik darstellt, deren Integration gelungen ist. In der Folgezeit ist nun auf mannig-

---

76a) Vgl. *A. E. H. Love*, Lond. Math. Soc. Proc. (2) 1 (1904), p. 291; *C. Somigliana*, Torino Atti 41 (1905/6), (drei Noten).

77) *A. Clebsch,* J. f. Math. 61 (1863), p. 125; *G. G. Stokes,* Cambr. Phil. Soc. Trans. 9 (1849) = Math. phys. papers 2, p. 258; *C. Somigliana,* Roma Acc. Linc. Rend. (5) 1^2 (1892), p. 111; *O. Tedone,* Torino Mem. (2) 47, p. 237 bezw. 57; *P. Duhem*, J. de math. (5) 6 (1900), p. 215.

77a) *O. Tedone,* Ann. di mat. (3) 1 (1898), p. 283.

fache Weisen versucht worden, für andere Gleichungen oder Systeme von Gleichungen analoge Formeln und Intergrationsmethoden zu entwickeln. Ausser der *Poisson*'schen Methode[70]) zur Ermittlung des allgemeinen Integrals von Gleichungen oder Gleichungssystemen kennt man die von *A. Cauchy*[78]), von der in Nr. **11** die Rede war und die im vorliegenden Falle mit den ebenen Wellen als ausgezeichneten Lösungen für den unbegrenzten Raum operiert, und die Methode, die später von *K. Weierstrass* angegeben und von *S. v. Kowalewsky* veröffentlicht wurde[79]). In der betreffenden Arbeit beschäftigt sich *S. v. Kowalewsky* ausser mit der Gleichung (70) und den Gleichungen der Bewegung isotroper Körper speziell mit den Gleichungen, die für die Schwingungen in einem sogenannten *Green*'schen Medium gelten. Dieses Medium, zu dessen Einführung *G. Green* in Verfolg seiner optischen Untersuchungen geführt wurde, ist dadurch definiert, dass bei geeigneter Wahl der Koordinatenaxen das elastische Potential durch den Ausdruck:

$$-2f = a_0(x_x + y_y + z_z)^2 + a^2(y_z^2 - 4y_y z_x) + b^2(z_x^2 - 4z_z x_x) + c^2(x_z^2 - 4x_x y_y)$$

gegeben ist. Die Arbeit von *S. v. Kowalewsky* ist dann später zum Teil von *V. Volterra*[80]) berichtigt worden.

Die *Kirchhoff*'sche Formel ist gleichfalls Gegenstand vieler Studien und Untersuchungen gewesen, und es existieren von ihr jetzt mehrere Beweise, von denen ausser dem angegebenen und dem von *G. Kirchhoff* selbst, diejenigen von *G. A. Maggi*[81]), von *E. Beltrami*[82]) und von *A. Gutzmer*[83]) genannt sein mögen. Wie bereits erwähnt wurde, bildet die *Kirchhoff*'sche Formel für die Gleichung (70) gewissermassen das Analogon zu den *Green*'schen Formeln bei der Potentialgleichung. Diese beiden Formeln lassen auch viele der Analogien hervortreten, die zwischen den Eigenschaften der Integrale der beiden Gleichungen bestehen[84]), andererseits aber auch die Unterschiede, von denen der

---

78) *A. L. Cauchy*, Exercices d'analyse et physique math. 1 (1840); siehe auch *B. Riemann*, Partielle Differentialgleichungen, Braunschweig 1869, p. 105 ff. und *C. Jordan*, Cours d'analyse 3, 2. Aufl., Paris 1896, p. 373.

79) Acta math. 6 (1885), p. 249.

80) Acta math. 16 (1892), p. 153.

81) Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 21.

82) Lombards Ist. Rend. (2) 22 (1889), p. 428; Roma Acc. Lim. Rend. (5) 1^1 (1892), p. 99; idem (5) 4^2 (1895), p. 29 und p. 51.

83) J. f. Math. 114 (1895), p. 333.

84) *V. Volterra*, Nuovo Cim. (3) 31 (1892), p. 251. Siehe auch *T. Levi-Cività*, Nuovo Cim. (4) 6 (1897).

wesentlichste der ist, dass die Integrale der Gleichung (70), wie überhaupt die Integrale der Gleichungen und Gleichungssysteme vom Typus der Gleichung (70), nicht analytisch sein können und überhaupt nicht mehr als zweimal differentiierbar zu sein brauchen, während die Gleichungen und Gleichungssysteme vom Typus der Potentialgleichung nur analytische Integrale zulassen.

Soweit dem Referenten bekannt, ist bisher noch kein allgemeines Verfahren angegeben worden, die Gleichung (70) und solche von ihrem Typus unter Benutzung der *Kirchhoff*'schen und der dazu analogen Formeln mittels *Green*'scher Funktionen zu integrieren und von da aus womöglich zur Integration dieser Gleichungen bei gegebenen Randbedingungen mittels bestimmter Integrale zu gelangen[85]). Indessen sind hierzu in neuerer Zeit verschiedene Ansätze gegeben, über die hier noch einiges mitgeteilt sei.

Kirchhoff war bei Ableitung seiner Formel von einer gewissen partikulären Lösung, der „Grundlösung", der Gleichung (70) ausgegangen. Die Versuche, das *Kirchhoff*'sche Integrationsverfahren auf allgemeinere Gleichungen, in erster Linie auf die vom Typus

$$(76) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \sum_1^n {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

auszudehnen, scheiterten nun zunächst an dem Umstande, dass die Auffindung einer derartigen Grundlösung von (76) durch eine einfache Übertragung vom Falle $n = 3$ her sich nicht erreichen liess[86]). Diese Schwierigkeit wurde jedoch von *V. Volterra*[87]) überwunden, und die Methode selbst hat sich als geeignet erwiesen, auch auf Systeme von Gleichungen ausgedehnt zu werden[88]).

Für den Fall $n = 1$ hat bereits *B. Riemann*[89]) eine Integrationsmethode angegeben, die vielfach als die *Riemann*'sche Methode der Charakteristiken bezeichnet wird (vgl. II A 7c, Nr. 3, *A. Sommerfeld*). Mit derselben haben sich weiterhin *P. du Bois-Reymond*[90]) und *G. Darboux*[91]) eingehend beschäftigt. Eine Verallgemeinerung hat sie durch

85) Es existiert allerdings ein früherer Versuch von *V. Cerruti.* Aber am Schluss der Ausgangsformel befindet sich ein Versehen, das die Resultate nichtig macht, Roma Acc. Linc. Mem. 8 (1882), p. 361.

86) *P. Duhem,* Hydrodynamique, élasticité, acoustique, Cours prof. en 1890 bis 91, Paris 1891, livr. III, chap. VIII.

87) *V. Volterra,* Roma Acc. Linc. Rend. (5) 1² (1892), p. 161, 265.

88) *O. Tedone,* Torino Mem. (2) 47 (1896/7), p. 244 bezw. 64.

89) Göttingen Abh. 8 (1860), p. 43 = Ges. Werke, p. 145.

90) *O. Böklen,* Math. naturw. Mitteil. Tübingen 1 (1883), p. 34.

91) Leçons sur la théorie des surfaces 2, Paris 1889, p. 71.

V. Volterra erfahren, der sich ihrer bei der Integration von Gleichungen und Gleichungssystemen bedient, die ausser von der Zeit von zwei Koordinaten abhängen[74]. Den beiden Charakteristiken, die beim *Riemann*'schen Problem von einem Punkte der xt-Ebene auslaufen, entspricht hier ein von einem Punkte des xyt-Raums auslaufender charakteristischer Kegel. *O. Tedone*[75], [76] hat die Theorie *Volterra*'s auf Gleichungen und Gleichungssysteme vom Typus (76) angewendet, die ausser von der Zeit von drei oder einer beliebigen Zahl von Koordinaten abhängen. Zugleich gab *Coulon*[93] die Ausdehnung der Methode der Charakteristiken auf Gleichungen der Form:

$$\sum_1^m j\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j^2} = \sum_1^n i\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}.$$

Die Verallgemeinerung auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, die durch *J. Beudon*'s[92] Theorie der Mannigfaltigkeiten und die von ihm eingeführte Erweiterung des Charakteristikenbegriffs ermöglicht wurde, gab *J. Coulon*[93]. Die Lösung der Randwertaufgabe gelingt mit Hülfe eines dem *Green*'schen Satze analogen Theorems und einer der *Green*'schen Funktion analogen Funktion, deren Existenz durch die *Picard*'sche Methode der successiven Approximationen für eine bestimmte Klasse von Gleichungen nachgewiesen wird; dem charakteristischen Kegel in *Volterra*'s Theorie entspricht die von *G. Darboux*[94] eingeführte „surface à point singulier", d. h. die konische Fläche, die von den durch den betreffenden Raumpunkt gehenden Bicharakteristiken der Differentialgleichung gebildet wird[95]. Die Verallgemeinerung des Charakteristikenbegriffs auf Systeme von Differentialgleichungen lieferte *Hadamard*[96].

Den Zusammenhang der Theorie der Charakteristiken mit der Fortpflanzung von Wellen haben *J. Coulon*[97] und *Hadamard*[98] näher aufgedeckt.

17. Ausbreitung einer Stosswelle in einem unbegrenzten beliebigen elastischen Medium. Der in vorstehender Nr. **16c** erwähnte

92) Bull. Soc. math. de France **25** (1897), p. 108; Paris C. R. 124 (1897), p. 671.

93) *J. Coulon*, Paris C. R. 130 (1900), p. 765, 1064 und Thèse Paris, 1902.

94) *G. Darboux*, Paris Mem. prés. par. div. sav. 27 (1883), p. 34.

95) Verschiedene Ergänzungen und Vereinfachungen der Theorie verdankt man *R. d'Adhémar*, Paris C. R. 132 (1901), p. 310; Thèse Paris 1904; Palermo Circ. mat. Rend. 20 (1905), 142.

96) Théorie des ondes, Paris 1903, p. 263.

97) *J. Coulon*, Thèse Paris 1902, p. 100.

98) Théorie des ondes, p. 159, 274, Bull. Soc. math. de France 29 (1901), p. 50.

Zusammenhang der Theorie der Charakteristiken mit der Fortpflanzung von Wellen kann als Folge einer besonderen Fassung des Begriffs der Welle angesehen werden, wie sie zuerst *H. Hugoniot*[99]) gegeben. *Hugoniot* bezeichnet als Welle eine *Unstetigkeit* entweder in den ersten oder höheren Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten nach der Zeit und den Koordinaten, die entlang einer Fläche statt hat und auch im Laufe der Zeit auf einer Fläche bleibt, sich also *fortpflanzt.* Sind nun die Unstetigkeiten von zweiter und höherer Ordnung, so werden diese Unstetigkeitsflächen gerade durch die Charakteristiken der Differentialgleichungen gegeben (vgl. IV 19, Nr. 4, *G. Zemplén*). Ist dagegen die Unstetigkeit *erster* Ordnung, liegen sog. *Stosswellen* vor, so gilt der erwähnte Zusammenhang nicht mehr. Es greifen hier dann Überlegungen Platz, für die *E. B. Christoffel*[100]) die ersten Entwickelungen gegeben hat.

Christoffel nimmt an, dass in einem beliebigen elastischen Medium die Ableitungen der Verschiebungskomponenten nach der Zeit und nach den Koordinaten auf einer Fläche σ einen Sprung erleiden, und stellt sich die Aufgabe, die Art der Fortpflanzung dieser Fläche in dem elastischen Medium zu studieren. Es seien u_1, v_1, w_1 die Werte der Verschiebungen auf der positiven Seite von σ und u_2, v_2, w_2 die Werte derselben Verschiebungen auf der negativen Seite. Wenn ferner eine Tangentialebene in einem Punkt von σ sich mit der Geschwindigkeit ω in der positiven Richtung der Normalen von σ bewegt, so wird für ein unendlich kleines cylindrisches Element $\varrho\omega\, dt\, d\sigma$ des Mediums in der Nachbarschaft des Berührungspunktes die Geschwindigkeit von

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial v_1}{\partial t}, \frac{\partial w_1}{\partial t} \quad \text{auf} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial v_2}{\partial t}, \frac{\partial w_2}{\partial t}$$

springen. Dies wird man als die Folge eines Impulses auffassen können, dessen Komponenten sind:

$$\varrho\omega\, dt\, d\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right), \quad \varrho\omega\, dt\, d\sigma\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t}\right), \quad \varrho\omega\, dt\, d\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t}\right);$$

diese werden den mit dt multiplizierten Differenzen der Werte der entsprechenden Spannungskomponenten gleich sein, die auf das Element von σ auf der einen und auf der andern Seite wirken. Bezeichnen ξ, η, ζ die Werte der Differenzen

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t}$$

99) *H. Hugoniot,* Paris C. R. 101 (1885) und J. éc. polyt. 59 (1887). Im übrigen vgl. immer *J. Hadamard*, Théorie des ondes, Paris 1903.

100) Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 81, 103.

und $X'_x, Y'_y, \ldots, X'_y$ die Differenzen der Werte der $X_x, Y_y, \ldots, X_y$ auf der einen und auf der andern Seite von σ, so gelten die Beziehungen:

$$(77)\quad \begin{cases} \varrho\omega\xi = X'_x \cos(nx) + X'_y \cos(ny) + X'_z \cos(nz), \\ \varrho\omega\eta = Y'_x \cos(nx) + Y'_y \cos(ny) + Y'_z \cos(nz), \\ \varrho\omega\zeta = Z'_x \cos(nx) + Z'_y \cos(ny) + Z'_z \cos(nz). \end{cases}$$

Bezeichnen andererseits $x'_x, y'_y, \ldots, x'_y$ die Überschüsse der Formänderungskomponenten der positiven Seite von σ über die der negativen und f' den Ausdruck von f, der mit den Grössen $x'_x, y'_y, \ldots, x'_y$ gebildet ist, so hat man weiterhin

$$X'_x = \frac{\partial f'}{\partial x'_x}, \quad Y'_y = \frac{\partial f'}{\partial y'_y}, \ldots, X'_y = \frac{\partial f'}{\partial x'_y}.$$

Längs der ganzen Oberfläche σ müssen die Beziehungen erfüllt sein:

$$\omega x_x + \xi\cos(nx) = 0,$$
$$\omega y'_y + \eta\cos(ny) = 0, \ldots, \omega x'_y + \xi\cos(ny) + \eta\cos(nx) = 0,$$

und vermöge dieser Beziehungen geht der Ausdruck $\omega^2 f'$ in eine definite Form zweiten Grades φ der Variabeln ξ, η, ζ über, in der die Koeffizienten Funktionen von $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ sind. Die Gl. (77) schreiben sich dann einfach:

$$\varrho\omega^2\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0, \quad \varrho\omega^2\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0, \quad \varrho\omega^2\zeta + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0,$$

und diese Gleichungen sind linear und homogen in ξ, η, ζ. Sollen sie mit einander verträglich sein, so muss, wenn

$$2\varphi = \lambda_{11}\xi^2 + \lambda_{22}\eta^2 + \ldots + 2\lambda_{12}\xi\eta$$

gesetzt wird, die Bedingung erfüllt sein:

$$(78)\quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} + \varrho\omega^2 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} + \varrho\omega^2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} + \varrho\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

und diese Gleichung für ω^2 hat bekanntlich drei reelle und positive Wurzeln, die also Funktionen von $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ sind. Jede Tangentialebene von σ schreitet mit einer Geschwindigkeit vorwärts, die gleich irgend einem der diesen Wurzeln entsprechenden Werte von ω ist. Im allgemeinen giebt also die ursprüngliche Fläche zu drei Unstetigkeitsflächen Anlass, die sich durch das elastische Medium hindurch fortpflanzen.

Der Ort der Berührungspunkte der eine Fläche σ in ihren verschiedenen Lagen berührenden parallelen Ebenen ist eine Gerade, die ein *Strahl* genannt wird. Die Wellenfläche ist die Fläche, mit der eine ursprünglich verschwindend kleine Kugelfläche δ nach Verlauf

der Zeiteinheit zur Deckung gelangt. (Vgl. hierüber Näheres in dem Referate über Optik V 21, *A. Wangerin.*)

18. Analytische Verallgemeinerung des Bewegungsproblems. Wie die Gleichungen des elastischen Gleichgewichts, so lassen sich auch die Gleichungen der elastischen Bewegung analytisch als ein höchst spezieller Fall von Gleichungssystemen auffassen, die man erhält, wenn man die erste Variation gewisser Integrale gleich null setzt. Man bezeichne mit $u_1, u_2, \ldots, u_m$, m Funktionen der $p+q$ Variabeln $t_1, t_2, \ldots, t_p$; $x_1, x_2, \ldots, x_q$, mit T und P zwei definite Formen, von denen die erste positiv ist und von den u und den Ableitungen der u nach den t abhängt, die zweite aber negativ ist und von den Ableitungen der u nach den x und eventuell auch von den u selbst abhängt, mit $a(u_i)$ eine Funktion die von den u und den x abhängt und suche die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ so zu bestimmen, dass die erste Variation des folgenden Integrals verschwindet:

$$\int_{t_1'}^{t_1''} dt_1 \int_{t_2'}^{t_2''} dt_2 \cdots \int_{t_p'}^{t_p''} dt_p \int_{S_q} (T+P)\, dS_q,$$

mit der Nebenbedingung dass

$$\int_{\sigma_q} a(u_i)\, d\sigma_q$$

konstant sei, wo $t_1', t_2', \ldots, t_p'$; $t_1'', t_2'', \ldots, t_p''$ zwei Systeme von Werten von $t_1, t_2, \ldots, t_p$ bezeichnen, denen verschwindende Variationen von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ entsprechen, S_q ein bestimmtes Stück des linearen q-dimensionalen Raumes $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ bedeutet und σ_q seine Grenze sei. Bezeichnet n die Normale der Begrenzung von S_q, so ergibt sich sofort, dass die u den Gleichungen genügen müssen:

$$\sum_1^p {}_k \frac{\partial}{\partial t_k}\left(\frac{\partial T}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial t_k}}\right) + \sum_1^q {}_h \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial P}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_h}}\right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} - \frac{\partial P}{\partial u_i} = 0,$$

$$\sum_1^q {}_h \frac{\partial P}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_h}} \cos(n x_h) = \frac{\partial a}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese Gleichungen ergeben die Möglichkeit, Reziprozitätssätze aufzustellen, die dem *Betti*'schen analog sind, und viele der früheren Betrachtungen behalten, passend verallgemeinert, hier ihre Gültigkeit.

(Abgeschlossen im April 1906.)

IV 25. SPEZIELLE AUSFÜHRUNGEN ZUR STATIK ELASTISCHER KÖRPER.

VON

O. TEDONE UND A. TIMPE
IN GENUA IN DANZIG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Wegen der allgemeinen *Lehrbuch*litteratur, in der die in dem vorliegenden Referate behandelten Spezialausführungen zur Statik elastischer Körper weitgehende Erörterung finden, vgl. die Litteraturübersicht in dem Artikel IV 23 (*C. H. Müller-A. Timpe*). Speziell genannt seien hier einige der öfter zitierten

Monographien.

C. W. Borchardt, Untersuchungen über die Elastizität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme. Berlin Monatsber. 1873, p. 9 = Ges. Werke, Berlin 1888, p. 245.

J. Boussinesq, Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres. Premier Mémoire (Des tiges), J. de math. (3) 16 (1871), p. 125; Second Mémoire (Des plaques), J. de math. (2) 16 (1871), p. 241, Complément, J. de math. (3) 5 (1879), p. 163, 329.

— Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris 1885.

G. H. Bryan, On the stability of elastic systems, Cambr. Phil. Soc. Proc. 6 (1888), p. 199.

V. Cerruti, Ricerche intorno all' equilibrio dei corpi isotropi, Roma Acc. Linc. Mem. (3) 13 (1882), p. 81.

L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausannae 1744 (Additamentum I = De curvis elasticis, p. 245).

— Sur la force des colonnes, Berlin Mém. de l'Acad. 13 (1759), p. 252.

F. Gehring, De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur, Diss. Berlin 1860.

G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J. f. Math. 40 (1850), p. 51 = Ges. Abhandlungen, p. 237.
— Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, J. f. Math. 56 (1858), p. 285 = Ges. Abh., p. 285.
G. Lamé et *E. Clapeyron*, Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes, Paris Mém. près par div. sav. 4 (1833), p. 465 = J. f. Math. 7 (1831), p. 145, 237, 281.
G. Lamé, Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, J. de math. 19 (1854), p. 51.
J. Cl. Maxwell, On the equilibrium of elastic solids, Edinb. Roy. Soc. Trans. 20 (1853), p. 87 = Scientific papers 1, Cambridge 1890, p. 30.
J. H. Michell, On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100.
S. D. Poisson, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 357.
B. de Saint-Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, Paris Mém. prés. par div. sav. 14 (1855), p. 233.
— Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes, J. de math. (2) 1 (1856), p. 89.
O. Tedone, Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo, Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 129 und (3) 10 (1904), p. 13.
W. Thomson, Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid, Cambr. and Dubl. math. J. 3 (1848), p. 87 = Math. and. phys. papers 1 Cambr. 1890, p. 97.
— Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid, London Phil. Trans 153 (1864), p. 583 = Math. and phys. papers 3, p. 351.
W. Voigt, Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle II, Göttingen, Abh. 34 (1887), math. Klasse, p. 53.

Vorbemerkung. Das vorliegende Referat bringt in Ergänzung des voraufgehenden Artikels IV 24 (*O. Tedone*) spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper. Dabei scheidet sich der Stoff nicht ganz gleichmässig in drei Hauptabschnitte.

Ein *erster Abschnitt* dient gewissermassen als Illustration zu der in dem voraufgehenden Referat gegebenen allgemeinen Integrationstheorie. Er zeigt, wie die dort berichteten Integrationsmethoden für *bestimmte Körper einfachster Begrenzung* (unendlicher Halbraum, Kugel u. s. w.) zur tatsächlichen Aufstellung der *allgemeinen Lösung*

führen. Dabei soll es nicht die Absicht sein, über alle Lösungsmethoden, die für ein spezielles Problem gegeben sind, gleichmässig ausführlich zu berichten. Vielmehr wird im Allgemeinen nur immer eine Lösung, die unter den gegebenen Verhältnissen als die einfachste erscheint, näher ausgeführt, während für die übrigen die nötigen Litteraturnachweise gegeben werden.

Ein *zweiter Abschnitt* giebt Ausführungen über Lösungsversuche, die das allgemeine Integrationsproblem nach der Seite spezialisieren, dass nicht nur über die Körperform, die in den Anwendungen meist gegeben, sondern auch über die *Randbedingungen spezielle Annahmen* gemacht werden. Indem man dann die Randbedingungen von vornherein in einfache natürliche Beziehung zur Körperform setzen kann, wird es oft möglich, spezielle Lösungen zu finden. Hierzu dient insbesondere die zweckmässige Einführung geeigneter Koordinaten und geeigneter Komponenten der Verschiebung. Dabei ist die Bemerkung von Wichtigkeit, dass die auf dieses Prinzip gegründeten Ansätze zur Ableitung spezieller Lösungen häufig von vornherein bestimmte Voraussetzungen über die Abhängigkeit der gesuchten Funktionen von den einzelnen Koordinaten zu Hilfe nehmen, womit ein ordnendes Prinzip für die Menge solcherweise gefundener Einzellösungen gegeben ist.

Ein *dritter Abschnitt* giebt endlich Ausführungen zur Elastizität der *Körper mit einer oder zwei unendlich kleinen Dimensionen*[1]).

I. Allgemeine Lösungen für Körper einfachster Begrenzung.

1. Isotroper Boden (unendlicher Halbraum). Die erste Lösung dieses Problems (für den Fall rein normaler Belastung) wurde von *G. Lamé* und *E. Clapeyron* im Jahre 1828 mittels Reihenentwickelungen gegeben[2]). Einen ersten Fortschritt in dem Problem erzielte *J. Boussinesq*[3]) durch Einführung der verschiedenen Arten direkten und inversen Potentials, wodurch es ihm gelang, die Lösung mittels bestimmter Integrale darzustellen. In der Behandlung des allgemeinen Falles beliebiger Belastung begegnete er sich mit *V. Cerruti*[4]), der 1882 die Lösung mittels bestimmter Integrale aufstellte, wobei er

1) Die Abschnitte I und III sind im wesentlichen von *O. Tedone*, der Abschnitt II von *A. Timpe* verfasst.

2) J. f. Math. 7 (1831), p. 145, 237, 381 = Paris Mém. prés. par div. sav. 4 (1833), p. 465.

3) Paris C. R. 86 (1878), p. 1260; 87 (1878), p. 402; 88 (1879), p. 331, 375, 701, 741; Application des potentiels, Paris 1885, p. 21 ff. — Vgl. *Clebsch-St. Venant,* Élasticité, Note zu § 46, p. 374.

4) Roma Acc. Linc. Mem. (3) 13 (1882), p. 81.

sich der Methode der Integration durch *Green*'sche Funktionen bediente. Weiterhin ist das Problem noch in zahlreichen anderen Arbeiten behandelt worden, die z. T. bedeutsame Verallgemeinerungen oder Vereinfachungen der Lösung enthalten; zur Orientierung mögen die in der Fussnote gegebenen Zitate genügen[5]).

Im Folgenden soll nur diejenige Lösung, die als die einfachste erscheint, näher ausgeführt werden, und zwar nur für den Fall, dass an der Oberfläche entweder nur die Verschiebungen oder nur die Spannungen vorgeschrieben sind, wenngleich auch für die Fälle Lösungen bekannt sind, wo an der Oberfläche teilweise die Verschiebungen und teilweise die Spannungen gegeben sind[6]). Überdies werden die Massenkräfte als Null vorausgesetzt.

a) Gegeben also ein unendlicher elastischer Körper, der den von der Ebene $z = 0$ begrenzten Raum S, in welchem $z < 0$, erfüllt. Das Problem des elastischen Gleichgewichts des Körpers S, wenn an dessen Oberfläche $z = 0$ zunächst die *Verschiebungen* gegeben sind, drückt sich dann aus durch die Aufgabe: das System regulärer Funktionen u, v, w zu bestimmen, die in jedem Punkte von S den Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \qquad \Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \Delta w = -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

oder auch

$$(1') \qquad \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu\left(\dfrac{\partial \varpi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial \varpi_3}{\partial y}\right) = 0, \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + 2\mu\left(\dfrac{\partial \varpi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right) = 0, \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + 2\mu\left(\dfrac{\partial \varpi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \varpi_2}{\partial x}\right) = 0, \end{cases}$$

---

5) *C. Somigliana,* Nuovo Cim. (3) 17, 18 (1885), 19, 20 (1886); Roma Acc. Linc. Rend. (5) 11^1, (1902), p. 145; *R. Marcolongo,* Napoli Rend. (2) 3 (1889), p. 205; *G. Lauricella,* Pisa Ann. sc. norm 7 (1895), p. 17; *E. Almansi,* Ann. di mat. (3) 2 (1898), p. 36; *J. H. Michell,* London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 183; 32 (1900), p. 247; *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 34 (1901/02), p. 276; *B. Riemann-H. Weber*, Partielle Differentialgleichungen der Physik 2, 4. Aufl., Braunschweig 1901, p. 188; *O. Tedone,* Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 35; *L. Orlando,* Palermo Circ. mat. Rend. 18 (1904), p. 311; *E. Cesàro*, Napoli Rend. 1906. — Vgl. *R. Marcolongo,* Elasticità, p. 245.

6) *J. Boussinesq,* Paris C. R. 106 (1888), p. 1043, 1119; *V. Cerruti*, Roma Acc. Linc. Rend. (4) 4^1 (1888), p. 785; *R. Marcolongo,* Napoli Rend. (2) 5 (1891), p. 25; *O. Tedone*, Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 41.

$$2\varpi_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\varpi_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\varpi_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

genügen, während an der Oberfläche σ sich u, v, w auf bekannte, im Unendlichen verschwindende Funktionen von x und y reduzieren.

Die Lösung ergiebt sich nun am einfachsten unter Benutzung der in IV 24, Nr. **12** (*O. Tedone*) skizzierten Integrationsmethode unter Heranziehung der Eigenschaften der harmonischen Funktionen. Dort werden für u, v, w folgende drei Formeln aufgestellt:

$$(2)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\Theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\,\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \\ v = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\Theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \eta\,\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \\ w = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\Theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \zeta\,\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \end{cases}$$

wo G die am Rande verschwindende *Green*sche Funktion der Potentialtheorie ist und ξ, η, ζ die Oberflächenwerte von x, y, z bedeuten. Die Formeln (2) lassen sich nun auch in der Form schreiben:

$$(2')\quad \begin{cases} u = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma (x-\xi)\,\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \\ v = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma (y-\eta)\,\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \\ w = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma (z-\zeta)\,\Theta\frac{dG}{dn}d\sigma, \end{cases}$$

in die man leicht die für den Halbraum bekannte *Green*sche Funktion einführen kann, womit sich für u, v, z die Werte ergeben:

$$(3)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma u\frac{d\sigma}{r} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \Theta\frac{d\sigma}{r}\right\}, \\ v = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma v\frac{d\sigma}{r} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \Theta\frac{d\sigma}{r}\right\}, \\ w = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma w\frac{d\sigma}{r} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \Theta\frac{d\sigma}{r}\right\}; \end{cases}$$

hierin ist r die Entfernung des Punktes x, y, z, auf den sich die Verschiebungen beziehen, von dem variablen Punkt ξ, η, ζ.

Die Formeln (3) stellen die Lösung des Problems dar, wenn Θ als Funktion der Werte, die u, v, w auf σ annehmen, so bestimmt wird, dass

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

d. h. nach den Formeln (3)

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\sigma u\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\sigma v\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\sigma w\frac{d\sigma}{r}\right]-\pi\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Theta\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich Θ ausgedrückt durch die Oberflächenwerte von u, v, w in der Form:

$$(4) \qquad \Theta = \frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\sigma u\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\sigma v\frac{d\sigma}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\sigma w\frac{d\sigma}{r}\right].$$

womit durch die Formeln (3) und (4) das Problem gelöst ist.

b) Wenn auf σ die Werte der *Spannungen* X_z, Y_z, Z_z gegeben sind, so reduziert sich das Problem des elastischen Gleichgewichts auf die Bestimmung des Systems der regulären Funktionen u, v, w, die in jedem Punkte von S den Gleichungen (1) genügen, während auf σ die Bedingungen zu erfüllen sind:

$$(5) \quad X_z = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\varpi_2\right), \quad Y_z = 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\varpi_1\right), \quad Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

wo X_z, Y_z, Z_z bekannte Funktionen von x und y sind, die im Unendlichen verschwinden.

Um dies Problem analog zu lösen, setze man jetzt für einen Augenblick neben Θ auch ϖ_1, ϖ_2 als bekannt voraus und wende die Formeln (2) auf die nach z differenzierten Gleichungen (1) an. Bedenkt man, daß

$$\int\limits_\sigma \frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\frac{d\sigma}{r} = \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\sigma\frac{\Theta}{r}d\sigma = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_\sigma\Theta\log(z+r)\,d\sigma,$$

und integriert nach z, so findet man mit Rücksicht auf (5) für u, v, w im Punkte (x, y, z) die Werte:

$$(6)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{4\pi\mu}\left\{\displaystyle\int\limits_\sigma X_z\frac{d\sigma}{r}+2\mu\int\limits_\sigma\varpi_2\frac{d\sigma}{r}\right.\\ \qquad\left. -(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[z\displaystyle\int\limits_\sigma\Theta\frac{d\sigma}{r}-\int\limits_\sigma\Theta\log(z+r)\,d\sigma\right]\right\},\\ v = \dfrac{1}{4\pi\mu}\left\{\displaystyle\int\limits_\sigma Y_z\frac{d\sigma}{r}-2\mu\int\limits_\sigma\varpi_1\frac{d\sigma}{r}\right.\\ \qquad\left. -(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial y}\left[z\displaystyle\int\limits_\sigma\Theta\frac{d\sigma}{r}-\int\limits_\sigma\Theta\log(z+r)\,d\sigma\right]\right\},\\ w = \dfrac{1}{4\pi\mu}\left\{\displaystyle\int\limits_\sigma Z_z\frac{d\sigma}{r}-\lambda\int\limits_\sigma\Theta\frac{d\sigma}{r}\right.\\ \qquad\left. -(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial z}\left[z\displaystyle\int\limits_\sigma\Theta\frac{d\sigma}{r}-\int\limits_\sigma\Theta\log(z+r)\,d\sigma\right]\right\}. \end{cases}$$

Die Bestimmung von Θ geschieht wieder durch die Relation:

$$\Theta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

d. h. nach obigen Gleichungen (6)

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma X_z \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma Y_z \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma Z_z \frac{d\sigma}{r}\right.$$
$$\left. + 2\mu\int_\sigma\left(\frac{\partial \varpi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial \eta}\right)\frac{d\sigma}{r} - 2\pi(2\lambda+\mu)\Theta\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (1′) ergiebt sich hieraus

$$(7) \qquad \Theta = \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma X_z \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma Y_z \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma Z_z \frac{d\sigma}{r}\right].$$

Die beiden Rotationskomponenten ϖ_1 und ϖ_2 ergeben sich aus den Relationen:

$$2\varpi_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad 2\varpi_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

so dass man erhält:

$$(8) \quad \begin{cases} \varpi_1 = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma Z_z \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma Y_z \frac{d\sigma}{r}\right] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \Theta \frac{d\sigma}{r}, \\ \varpi_2 = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma X_z \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma Z_z \frac{d\sigma}{r}\right] - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \Theta \frac{d\sigma}{r}. \end{cases}$$

Ähnlich ergiebt sich für ϖ_3:

$$\varpi_3 = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma Y_z \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma X_z \frac{d\sigma}{r}\right].$$

Damit ist das Problem wiederum gelöst, da durch die Gleichungen (6), (7) und (8) alle in Frage kommenden Größen durch die Oberflächenwerte X_z, Y_z, Z_z ausgedrückt sind.

Bemerkung 1. Die gleichen Probleme a) und b) lassen sich für den von *zwei parallelen Ebenen* begrenzten Körper lösen[7]).

---

7) *G. Lamé* und *E. Clapeyron*, J. f. Math. 7 (1831), p. 404 = Paris Mém. prés. par div. sav. 4 (1833), p. 548; *V. Cerruti*, Roma Acc. Linc. Rend. (4) 1 (1885), p. 521; *C. Somigliana*, Nuov. Cim. (3) 18 (1885), p. 161; 19 (1886), p. 84, 278; *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100; *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 34 (1902), p. 276; *O. Tedone*, Palermo Circ. mat. Rend. 18 (1904), p. 368; Ann. di mat. (3) 10 (1904), p. 13; *L. Orlando*, Palermo Circ. mat. Rend. 19 (1905), p. 66, 78; *J. Dougall*, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 41 (1904), p. 129.

2. Allgemeinere von Ebenen begrenzte (auch anisotrope) Körper. *C. Somigliana*[8]) ermöglicht bei bestimmten Typen von Randbedingungen die Integration der Grundgleichungen der Elastizität in Gebieten, die von Ebenen begrenzt sind, dadurch dass er die von *W. Thomson* gegebene „Methode der elektrischen Bilder" (vgl. II A 7 b, Nr. **16** *H. Burkhardt-W. Fr. Meyer*) auf die Gleichungen der Elastizität anwendet.

Die begrenzenden Ebenen seien Struktursymmetrieebenen des elastischen Mediums. Ferner sei angenommen, dass die Massenkräfte verschwinden. Dann lässt sich zunächst der Satz beweisen: Stellen die Funktionen u, v, w eine Lösung der Gleichungen der Elastizität dar, der die Oberflächenspannungen X_z, Y_z, Z_z auf $z = 0$ entsprechen, so erhält man eine neue Lösung $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, indem man die Funktionen u, v, w an der Ebene $z = 0$ „spiegelt", d. h. indem man bildet

$$(9) \qquad \bar{u} = u(x, y, -z), \quad \bar{v} = v(x, y, -z), \quad \bar{w} = -w(x, y, -z).$$

Die entsprechenden Oberflächenspannungen auf $z = 0$ sind

$$(10) \qquad \bar{X}_z = -X_z, \quad \bar{Y}_z = -Y_z, \quad \bar{Z}_z = Z_z.$$

Da auf $z = 0$ die Relationen $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$, $\bar{w} = -w$ gelten, so liefern die Funktionen

$$u' = u + \bar{u}, \quad v' = v + \bar{v}, \quad w' = w + \bar{w}$$

eine neue Lösung, die auf $z = 0$ den Bedingungen genügt:

$$(11) \qquad X_z' = 0, \quad Y_z' = 0, \quad w' = 0,$$

unter X_z', Y_z', Z_z' die den Verschiebungen u', v', w' entsprechenden Oberflächenspannungen verstanden; andererseits stellen die Funktionen

$$u'' = u - \bar{u}, \quad v'' = v - \bar{v}, \quad w'' = w - \bar{w}$$

eine weitere Lösung dar, die auf $z = 0$ den Bedingungen genügt:

$$(12) \qquad u'' = 0, \quad v'' = 0, \quad Z_z'' = 0,$$

falls X_z'', Y_z'', Z_z'' die den Verschiebungen u'', v'', w'' entsprechenden Oberflächenspannungen bezeichnen.

Ist nun der Körper von m Ebenen begrenzt, die durch einen Punkt gehen und eine reguläre Gebietseinteilung des Raumes bewirken, so lassen sich aus einer Lösung u_1, v_1, w_1 durch fortgesetzte Spiegelung an den begrenzenden Ebenen weitere Lösungssysteme u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3; $\ldots$; u_{2m}, v_{2m}, w_{2m} ableiten, die zusammen mit

8) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 11^1 (1902), p. 145; (5) 13^1 (1904), p. 307; (5) 13^2 (1904), p. 129.

u_1, v_1, w_1 eine $2m$-gliedrige Gruppe bilden, wo m eine endliche ganze Zahl. Diese Lösungen zerfallen in zwei Klassen:

$$u_2, v_2, w_2; \; u_4, v_4, w_4; \; \ldots; \; u_{2m}, v_{2m}, w_{2m}$$

und

$$u_1, v_1, w_1; \; u_3, v_3, w_3; \; \ldots; \; u_{2m-1}, v_{2m-1}, w_{2m-1},$$

von denen die eine durch Spiegelung an irgend einer der begrenzenden Ebenen in die andere übergeführt wird. Bildet man daher die Funktionen:

$$(13) \quad \begin{cases} U = \sum_{i=1}^{m} u_{2i}, & V = \sum_{i=1}^{m} v_{2i}, \quad W = \sum_{i=1}^{m} w_{2i}, \\ \overline{U} = \sum_{i=1}^{m} u_{2i-1}, & \overline{V} = \sum_{i=1}^{m} v_{2i-1}, \quad \overline{W} = \sum_{i=1}^{m} w_{2i-1}, \end{cases}$$

so stellen $u' = U + \overline{U}$, $v' = V + \overline{V}$, $w' = W + \overline{W}$ eine Lösung dar, die auf jeder begrenzenden Ebene die Bedingung erfüllt, dass die tangentiale Komponente der Oberflächenspannung und die Normalkomponente der Verschiebung verschwinden. Andererseits stellen $u'' = U - \overline{U}$, $v'' = V - \overline{V}$, $w'' = W - \overline{W}$ eine Lösung dar, die auf jeder begrenzenden Ebene der Bedingung genügt, dass die tangentiale Komponente der Verschiebung und die Normalkomponente der Oberflächenspannung verschwinden.

Man wähle nun für u_1, v_1, w_1 eine der Grundlösungen, die in einem bestimmten Punkte P des von dem elastischen Medium erfüllten Raumteils einen Pol erster Ordnung besitzen; im Falle der Isotropie sind diese Grundlösungen durch die Gl. (39) von IV 24, Nr. **10** b (*Tedone*) gegeben. Die Funktionen u', v', w' und u'', v'', w'' besitzen dann in P und in den sämtlichen Bildpunkten von P ebenfalls Pole erster Ordnung. Sie spielen dieselbe Rolle wie die *Green*schen Funktionen in der Potentialtheorie. Wendet man auf u', v', w' und ein zu bestimmendes Verschiebungssystem u, v, w das *Betti*sche Reziprozitätstheorem an, wobei der Punkt P durch eine kleine Kugel aus dem Integrationsbereich auszusondern ist, so gelangt man zu einer der *Green*schen analogen Formel, in der eine lineare Verbindung der Werte von u, v, w in P durch die Tangentialkomponente der Oberflächenspannung und die Normalkomponente der Oberflächenverschiebung ausgedrückt erscheint. Operiert man in entsprechender Weise mit den beiden anderen Grundlösungen, so erhält man zwei weitere lineare Verbindungen zwischen jenen Werten, so dass diese selbst ermittelt werden können, wenn überall an der Oberfläche die *tangentiale Spannung* und die *normale Verschiebung* gegeben sind.

In derselben Weise liefert die Anwendung des *Betti*schen Theorems auf u'', v'', w'' und eine zu bestimmende Verschiebung u, v, w den Wert der letzteren in irgend einem Punkte P, wenn an der Oberfläche die tangentiale *Komponente der Verschiebung* und die *normale Komponente der Spannung* bekannt sind.

Das Verfahren ist anwendbar auf *Dieder*, deren Winkel durch einen ganzzahligen Bruchteil von π gegeben ist; *Trieder*, die aus solchen Diedern durch eine senkrecht schneidende Ebene abgegrenzt werden, und *Trieder*, die von den Symmetrieebenen des Tetraeders, Oktaeders oder Ikosaeders ausgeschnitten werden. Es ist auch anwendbar für den Fall, dass die Zahl $2m$ der durch successive Reflexion an den begrenzenden Seitenflächen des elastischen Körpers sich ergebenden Lösungen unendlich ist, sofern es gelingt sich von der Konvergenz der solcherweise entstehenden Reihen zu überzeugen. Den Fall des *rechteckigen Prismas*, das gewissen Grenzbedingungen von dem hier betrachteten Typus unterworfen ist, hat *L. Lorenz*[9]) nach einem andern Verfahren behandelt. *O. Tedone*[10]) behandelte das Problem des rechtwinkligen Dieders oder Trieders, an dessen Oberfläche die Verschiebungen gegeben sind. Die Anwendung der Methode von *Betti-Cerruti* (IV 24, Nr. **10** f, *O. Tedone*) auf Probleme dieser Art gab *R. Marcolongo*[11]).

3. Isotrope Kugel: Erste Lösung mittels bestimmter Integrale über Greensche Funktionen. Das Problem des elastischen Gleichgewichts eines homogenen und isotropen Körpers, der von einer Kugelfläche begrenzt wird, ist eins der wenigen anderen Probleme elastischen Gleichgewichts, von denen eine vollständige Lösung seit langer Zeit gegeben ist. Die älteste Lösung desselben stammt von *G. Lamé*[12]), der sie mittels der gewöhnlichen Methode der Reihenentwicklungen fand, indem er zunächst die Gleichungen des Problems auf Polarkoordinaten transformierte. Diese Lösung erfuhr eine beträchtliche Verallgemeinerung durch *W. Thomson*[13]), der das Problem unter

---

9) J. f. Math. 58 (1861), p. 347.

10) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 10^2 (1901), p. 251.

11) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 11^1 (1902), p. 318. Vgl. auch *L. Orlando,* Palermo Circ. mat. Rend. 17 (1903), p. 335; Nuovo Cim. (5) 7 (1904), p. 421; Roma Acc. Linc. Rend. (5) 13 (1904), p. 513 und Sopra alcuni problemi di fisica matematica, Messina 1905; *M. Puglisi,* Palermo Circ. mat. Rend. 17 (1903), p. 353; *E. Morandi,* Ann. di mat. (3) 9 (1904), p. 161, in welchen Arbeiten mit mehr oder weniger verschiedenen Methoden ähnliche Probleme gelöst werden.

12) J. de math. 19 (1854), p. 51 = Coordonnées curvilignes, p. 309.

13) London Phil. Trans. 153 (1863), p. 583 = *W. Thomson*, Math. and phys.

Berücksichtignng von Massenkräften, die ein Potential besitzen, behandelte und auch zeigte, dass man zum Ziele kommen könne, ohne die Gleichungen auf Polarkoordinaten zu transformieren. *C. W. Borchardt*[14]) andererseits verdankt man die erste Lösung in Form bestimmter Integrale. In der Folge sind zahlreiche Arbeiten im Anschluss an die vorstehend genannten entstanden, die die Lösung des Problems entweder in Form von Reihenentwicklungen[15]) oder aber in Form bestimmter Integrale[16]) behandeln, und die den Lösungen entweder grössere Allgemeinheit oder grössere Einfachheit zu verleihen suchen. Wir geben im Folgenden zunächst wieder nur die einfachste Lösung.

a) Gegeben also ein homogener und isotroper elastischer Körper, der von der Kugelfläche σ begrenzt ist, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Sind auf σ die *Verschiebungen* gegeben, so besteht das Problem des elastischen Gleichgewichts darin, das System regulärer Funktionen u, v, w zu bestimmen, die in jedem Punkte innerhalb σ den Gleichungen (1) genügen und auf σ gegebene Werte annehmen.

Zu dem Zwecke kann man in die Gleichungen (2') die für die Kugel bekannte *Green*sche Funktion G einsetzen, die sich auf einen Punkt x, y, z im Innern der Kugel bezieht, und erhält sofort:

$$(14)\quad \begin{cases} u = U + (\varrho^2 - R^2)\dfrac{\partial T}{\partial x}, \quad v = V + (\varrho^2 - R^2)\dfrac{\partial T}{\partial y}, \\ w = W + (\varrho^2 - R^2)\dfrac{\partial T}{\partial z}. \end{cases}$$

---

papers 3, Cambridge 1890, p. 351. Vgl. auch *W. Thomson* and *P. G. Tait,* Treatise on natural philosophy 2, Cambridge 1883, p. 286.

14) Berlin Monatsber. 1873, p. 9 = Ges. Werke, p. 248.

15) *G. H. Darwin,* London Phil. Trans. 170 (1879), p. 1 und 173 (1882), p. 187; *C. Chree,* Quart. Journ. of math. 21 (1886), p. 193, und 23 (1888), p. 11; Cambr. Phil. Soc. Trans. 14 (1889), p. 250; *C. Somigliana,* Lomb. Ist. Rend. (2) 29 (1896), p. 423.

16) *V. Cerruti,* Assoc. franç. pour l'avanc. d. sc., C. R. de la 14me sess., 2me part., p. 68 (1885); Roma Acc. Linc. Rend. (4) 2^1 (1886), p. 461 und 586; (4) 5^2 (1889), p. 189; Roma Acc. Linc. Mem. (4) 7 (1891), p. 25, abgedruckt im Nuovo Cim. (3) 33 (1893), p. 97, 145, 202, 259; *C. Somigliana,* Pisa Ann. sc. norm. 4 (1887), p. 101; *R. Marcolongo,* Roma Acc. Linc. Rend. (4) 5^2 (1889), p. 349; (5) 1^1 (1892), p. 335; Ann. di mat. (2) 23 (1895), p. 111; *G. Lauricella,* Pisa Ann. sc. norm. 7 (1895), p. 81; Ann. di mat. (3) 6 (1901), p. 289; *E. Almansi,* Torino Mem. (2) 47 (1897), p. 103; Ann. di mat. (3) 2 (1898), p. 34; *E. u. F. Cosserat,* Paris C. R. 126 (1898), p. 1089; 133 (1901), p. 326; *J. H. Michell,* Messenger of math. (2) 30 (1900), p. 16; *J. Hadamard,* Ann. éc. norm. 18 (1901), p. 313; *O. Tedone,* Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 147; Palermo Circ. mat. Rend. 17 (1903), p. 241.

In diesen Gleichungen ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

und

$$T = -\frac{\lambda + \mu}{8\pi R \mu} \int_\sigma \frac{\Theta}{r}\, d\sigma$$

oder auch

$$(15) \qquad 2\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} + T = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu}\Theta.$$

Weiter ist

$$(16) \quad U = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{u\, d\sigma}{r^3}, \quad V = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{v\, d\sigma}{r^3}, \quad W = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{w\, d\sigma}{r^3},$$

so dass das Problem gelöst ist, wenn T und Θ aus den beiden Gleichungen

$$(17) \quad \begin{cases} 2\varrho \dfrac{\partial T}{\partial \varrho} + T = -\dfrac{\lambda + \mu}{2\mu}\Theta, \\ \Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} + 2\varrho \dfrac{\partial T}{\partial \varrho} \end{cases}$$

bestimmt werden. Aus den Gleichungen (17) folgt sofort für T die Gleichung:

$$(18) \qquad \frac{\lambda + 3\mu}{\mu} \varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho} + T = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

aus der sich T als eindeutige (harmonische) Funktion durch eine Quadratur ergiebt.

b) Sind andererseits auf σ die *Spannungen* gegeben, so sind jetzt neben den Gleichungen (1) im Innern auf σ die Bedingungen:

$$(19) \quad \begin{cases} R X_n = \lambda x \Theta + 2\mu\left(R \dfrac{\partial u}{\partial \varrho} + y \varpi_3 - z \varpi_2\right), \\ R Y_n = \lambda y \Theta + 2\mu\left(R \dfrac{\partial v}{\partial \varrho} + z \varpi_1 - x \varpi_3\right), \\ R Z_n = \lambda z \Theta + 2\mu\left(R \dfrac{\partial w}{\partial \varrho} + x \varpi_2 - y \varpi_1\right) \end{cases}$$

zu befriedigen, wo X_n, Y_n, Z_n bekannte stetige Funktionen der Punkte der Oberfläche σ sind.

Eine Lösung findet man, wenn man bemerkt, dass die Gleichungen (1) sich auch in der Form schreiben lassen:

$$(1'') \quad \begin{cases} \Delta\left(\varrho \dfrac{\partial u}{\partial \varrho}\right) = -\dfrac{\lambda + \mu}{\mu} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \dfrac{\partial \Theta}{\partial \varrho} + \Theta\right), \\ \Delta\left(\varrho \dfrac{\partial v}{\partial \varrho}\right) = -\dfrac{\lambda + \mu}{\mu} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varrho \dfrac{\partial \Theta}{\partial \varrho} + \Theta\right), \\ \Delta\left(\varrho \dfrac{\partial w}{\partial \varrho}\right) = -\dfrac{\lambda + \mu}{\mu} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varrho \dfrac{\partial \Theta}{\partial \varrho} + \Theta\right), \end{cases}$$

$$\varrho \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} + \Theta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho \frac{\partial v}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho \frac{\partial w}{\partial \varrho}\right).$$

Es werden dann unter Berücksichtigung von (19) die Ableitungen der Verschiebungen u, v, w nach ϱ durch folgende Formeln gegeben, die genau den Gleichungen (14) entsprechen:

$$(20)\begin{cases}\varrho\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}=\dfrac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma X_n\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_\sigma\left(\frac{\lambda}{2\mu}\xi\Theta+\eta\varpi_3-\zeta\varpi_2\right)\frac{d\sigma}{r^3}\\ \qquad\qquad+(\varrho^2-R^2)\dfrac{\partial T}{\partial x},\\ \varrho\dfrac{\partial v}{\partial \varrho}=\dfrac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma Y_n\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_\sigma\left(\frac{\lambda}{2\mu}\eta\Theta+\zeta\varpi_1-\xi\varpi_3\right)\frac{d\sigma}{r^3}\\ \qquad\qquad+(\varrho^2-R^2)\dfrac{\partial T}{\partial y},\\ \varrho\dfrac{\partial w}{\partial \varrho}=\dfrac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma Z_n\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_\sigma\left(\frac{\lambda}{2\mu}\zeta\Theta+\xi\varpi_2-\eta\varpi_1\right)\frac{d\sigma}{r^3}\\ \qquad\qquad+(\varrho_2-R^2)\dfrac{\partial T}{\partial z}.\end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werte von u, v, w im Punkte x, y, z durch Integration nach ϱ. Die noch unbekannten Funktionen Θ, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sind dabei so zu bestimmen, dass die folgenden Gleichungen identisch erfüllt sind:

$$(21)\begin{cases}-\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\varrho\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varrho}+\Theta\right)=2\varrho\dfrac{\partial T}{\partial\varrho}+T,\\ \varrho\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varrho}+\Theta=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\dfrac{\partial u}{\partial\varrho}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\dfrac{\partial w}{\partial\varrho}\right),\\ \varrho\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial\varrho}+\varpi_1=\dfrac12\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\dfrac{\partial w}{\partial\varrho}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\right)\right],\\ \varrho\dfrac{\partial\varpi_2}{\partial\varrho}+\varpi_2=\dfrac12\left[\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\dfrac{\partial u}{\partial\varrho}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\dfrac{\partial w}{\partial\varrho}\right)\right],\\ \varrho\dfrac{\partial\varpi_3}{\partial\varrho}+\varpi_3=\dfrac12\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\dfrac{\partial u}{\partial\varrho}\right)\right].\end{cases}$$

Die Erfüllung dieser Gleichungen (21) geschieht folgendermassen: Man beachte zunächst, dass die Formeln

$$(22)\begin{cases}\dfrac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\displaystyle\int\frac{\xi\Theta}{r^3}d\sigma=x\Theta+(R^2-\varrho^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ \dfrac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\displaystyle\int\frac{\eta\Theta}{r^3}d\sigma=y\Theta+(R^2-\varrho^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ \dfrac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\displaystyle\int\frac{\zeta\Theta}{r^3}d\sigma=z\Theta+(R^2-\varrho^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{cases}$$

bestehen, wo φ mit Θ durch die Beziehung verknüpft ist:

$$(23)\qquad \varphi + 2\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \Theta, \quad \text{mithin auch} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_\sigma \frac{\Theta}{r}\,d\sigma.$$

Lässt man nun ψ_1, ψ_2, ψ_3 und $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ in derselben Weise einander entsprechen wie φ und Θ und berücksichtigt die Relationen, welche $\Theta, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ verknüpfen, so findet man leicht, dass die zweite der Gleichungen (21) sich schreiben läßt:

$$(24)\quad \frac{3\lambda+2\mu}{2\mu}\Theta - 2\frac{\lambda+\mu}{\mu}\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} - 2\varrho\frac{\partial T}{\partial\varrho}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma X_n\frac{d\sigma}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma Y_n\frac{d\sigma}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma Z_n\frac{d\sigma}{r^3}\right).$$

Aus dieser Gleichung kann man φ und T mit Hilfe von (23) und der ersten der Gleichungen (21) eliminieren. Bezeichnet man mit τ die rechte Seite von (24), so erhält man in der Tat:

$$(25)\qquad \frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}\left(\Theta + 2\varrho\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho}\right) + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\varrho^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varrho^2} = \varrho\frac{\partial\tau}{\partial\varrho} + \frac{1}{2}\tau.$$

Die Funktion Θ bestimmt sich aus dieser Gleichung eindeutig durch zwei Quadraturen. Ist Θ bestimmt, so erhält man φ aus (23) und T aus der ersten der Gleichungen (21). Sind so Θ, φ und T bekannt, so ist es leicht, $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ aus den letzten drei Gleichungen (21) zu bestimmen. Um z. B. ϖ_1 zu ermitteln, bemerkt man, dass die erste dieser drei Gleichungen sich reduziert auf:

$$(26)\qquad \varrho\frac{\partial\varpi_1}{\partial\varrho} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma Z_n\frac{d\sigma}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{8\pi\mu}\int\limits_\sigma Y_n\frac{d\sigma}{r^3}\right)$$
$$-\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\lambda}{2\mu}\Theta + 2\frac{\lambda+\mu}{\mu}\varphi + 2T\right).$$

In gleicher Weise bestimmen sich ϖ_2 und ϖ_3, so dass das Problem damit vollständig gelöst ist.

Bemerkung 1. Die vorstehend gegebene Lösungsmethode steht in naher Beziehung zu einem von *E. Almansi*[17]) eingeschlagenen Integrationsverfahren. In der Tat ist für den Fall a) sein Ausgangspunkt ebenfalls durch die Formeln (14) und (15) gegeben, von denen er aber *a posteriori* beweist, dass sie den ursprünglichen drei Gleichungen (1) für eine beliebige harmonische Funktion T genügen. Im Falle b) des Spannungsproblems zieht er auch noch die *Beltrami*schen Gleichungen (vgl. IV 24, Nr. 7a, *O. Tedone*) heran.

Bemerkung 2. Ebenso wie für die Kugel vom Radius R führt das Integrationsverfahren von *O. Tedone* auch ohne weiteres zur

17) *E. Almansi,* Torino Mem. (2) 47 (1897), p. 103.

Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts eines isotropen, homogenen Mediums, das den Aussenraum der Kugelfläche vom Radius R erfüllt. Auch auf den Fall eines von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Körpers unter beliebigen Randbedingungen ist die Methode leicht anwendbar[18]). Ebenso ergiebt sich leicht, dass für $R = \infty$ die Lösungen a) und b) in jene für den unendlichen Halbraum übergehen (vgl. Nr. **1**)[19]).

Bemerkung 3. Die in dieser Nummer (sowie auch in **1**) gemachte Annahme verschwindender Massenkräfte ist für die Anwendung des skizzierten Integrationsverfahrens nicht wesentlich. Es lässt sich leicht auf den Fall beliebig gegebener Massen- und Oberflächenkräfte ausdehnen[20]).

4. Isotrope Kugel: Zweite Lösung mittels Reihenentwicklungen nach Kugelfunktionen. Aus der durch die Gleichungen (14) und (18) gegebene Darstellung für u, v, w und T geht hervor, dass das allgemeine Integral der Gleichungen (1), das innerhalb der Kugel vom Radius R um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt eindeutig ist, sich in Reihenform durch die Formeln darstellen lässt:

$$(27)\quad \begin{cases} u = \sum_1^\infty{}^i \left[U_i + M_i(R^2 - r^2)\dfrac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial x}\right], \\ v = \sum_1^\infty{}^i \left[V_i + M_i(R^2 - r^2)\dfrac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial y}\right], \\ w = \sum_1^\infty{}^i \left[W_i + M_i(R^2 - r^2)\dfrac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial z}\right], \end{cases}$$

worin U_i, V_i, W_i, Ψ_i räumliche Kugelfunktionen, d. h. homogene Polynome vom Grade i in x, y, z sind, die der Gleichung $\Delta = 0$ genügen, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und

$$(28)\quad M_i = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda + \mu}{\lambda(i-1) + \mu(3i-2)}, \qquad \Psi_{i-1} = \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z}.$$

Die Gleichungen (27) und (28) bilden bei *W. Thomson*[13]) den Ausgangspunkt, der gerade damit beginnt direkt zu zeigen, dass sie für beliebige U_i, V_i, W_i den Gleichungen (1) genügen.

a) Sind auf der Kugeloberfläche σ nun zunächst die *Verschiebungen* u, v, w gegeben und nach Kugelflächenfunktionen, d. h. den sogenannten *Laplace*schen Kugelfunktionen entwickelt, also

$$(29)\quad u = \sum_1^\infty{}^i A_i, \quad v = \sum_1^\infty{}^i B_i, \quad w = \sum_1^\infty{}^i C_i,$$

18) *O. Tedone,* Ann. di mat. (2) 10 (1904), p. 40.
19) *O. Tedone,* Ann. di mat. (3) 8 (1902), p. 177.
20) *O. Tedone,* Palermo Circ. mat. Rend. 17 (1903), p. 241.

wo A_i, B_i, C_i, *Laplace*sche Funktionen von der Ordnung i bedeuten, so findet man bei Berücksichtigung von (27) und (28) ohne weiteres:

$$(30)\quad \begin{gathered} U_i = A_i \frac{r^i}{R^i}, \quad V_i = B_i \frac{r^i}{R^i}, \quad W_i = C_i \frac{r^i}{R^i}, \\ \Psi_{i-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_i \frac{r^i}{R^i}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_i \frac{r^i}{R^i}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C_i \frac{r^i}{R^i}\right). \end{gathered}$$

Mit diesen Werten von U_i, V_i, W_i, Ψ_{i-1} lösen die Gleichungen (27) das vorgegebene Problem des elastischen Gleichgewichts der isotropen Vollkugel.

b) Durch einfache Rechnung findet man nun sofort, dass die Ausdrücke von $X_n r$, $Y_n r$, $Z_n r$, die der Lösung (27) mit den aus (30) eingesetzten U_i, V_i, W_i, Ψ_{i-1} entsprechen, sich in folgender Weise schreiben lassen:

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} X_n r = \mu \sum_1^\infty{}_i \Big\{ & (i-1) A_i \frac{r^i}{R^i} + 2 i M_{i+2} R^2 \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial x} \\ & - 2(i-2) M_i r^2 \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial x} - \frac{1}{2i+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{2i+3}}{R^{2i+1}} \Phi_{-i-2}\right) \\ & - E_i \frac{r^{2i+1}}{R^{2i-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^{2i-1}}{r^{2i-1}} \Psi_{i-1}\right) \Big\}, \\ Y_n r = \mu \sum_1^\infty{}_i \Big\{ & (i-1) B_i \frac{r^i}{R^i} + 2 i M_{i+2} R^2 \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial y} \\ & - 2(i-2) M_i r^2 \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial y} - \frac{1}{2i+1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r^{2i+3}}{R^{2i+1}} \Phi_{-i-2}\right) \\ & - E_i \frac{r^{2i+1}}{R^{2i-1}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R^{2i-1}}{r^{2i-1}} \Psi_{i-1}\right) \Big\}, \\ Z_n r = \mu \sum_1^\infty{}_i \Big\{ & (i-1) C_i \frac{r^i}{R^i} + 2 i M_{i+2} R^2 \frac{\partial \Psi_{i+1}}{\partial z} \\ & - 2(i-2) M_i r^2 \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial z} - \frac{1}{2i+1} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r^{2i+3}}{R^{2i+1}} \Phi_{-i-2}\right) \\ & - E_i \frac{r^{2i+1}}{R^{2i-1}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R^{2i-1}}{r^{2i-1}} \Psi_{i-1}\right) \Big\}, \end{aligned} \right.$$

worin

$$(31)\quad \begin{gathered} \Phi_{-i-2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_i \frac{R^{i+1}}{r^{i+1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_i \frac{R^{i+1}}{r^{i+1}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C_i \frac{R^{i+1}}{r^{i+1}}\right), \\ E_i = \frac{1}{2i+1} \, \frac{\lambda(i+2) - \mu(i-3)}{\lambda(i-1) + \mu(3i-2)}. \end{gathered}$$

Sind also auf der Oberfläche σ die *Spannungen* X_n, Y_n, Z_n in der Form gegeben

$$(32)\qquad X_n = \sum_1^\infty {}_i F_i, \quad Y_n = \sum_1^\infty {}_i G_i, \quad Z_n = \sum_1^\infty {}_i H_i,$$

wo F_i, G_i, H_i wieder *Laplace*sche Funktionen von der Ordnung i sind, so ist für $r = R$:

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{F_i r^i}{\mu R^{i-1}} = (i-1) A_i \dfrac{r^i}{R^i} - \dfrac{1}{2i+1} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{r^{2i+3}}{R^{2i+1}} \Phi_{-i-2}\right) \\ \qquad\qquad - E_i \dfrac{r^{2i+1}}{R^{2i-1}} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{R^{2i-1}}{r^{2i-1}} \Psi_{i-1}\right), \\ \dfrac{G_i r^i}{\mu R^{i-1}} = (i-1) B_i \dfrac{r^i}{R^i} - \dfrac{1}{2i+1} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{r^{2i+3}}{R^{2i+1}} \Phi_{-i-2}\right) \\ \qquad\qquad - E_i \dfrac{r^{2i+1}}{R^{2i-1}} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{R^{2i-1}}{r^{2i-1}} \Psi_{i-1}\right), \\ \dfrac{H_i r^i}{\mu R^{i-1}} = (i-1) C_i \dfrac{r^i}{R^i} - \dfrac{1}{2i+1} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{r^{2i+3}}{R^{2i+1}} \Phi_{-i-2}\right) \\ \qquad\qquad - E_i \dfrac{r^{2i+1}}{R^{2i-1}} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{R^{2i-1}}{r^{2i-1}} \Psi_{i-1}\right). \end{cases}$$

Da die beiden Seiten dieser Gleichungen harmonische Funktionen sind, so müssen sie auch überall innerhalb σ einander gleich sein. Aus (33) folgen sofort die beiden Gleichungen:

$$(34)\quad \begin{cases} \Psi_{i-1} = \dfrac{\lambda(i-1) + \mu(3i-2)}{\lambda(2i^2+1) + 2\mu(i^2-i+1)} \dfrac{R}{\mu} \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(F_i \dfrac{r^i}{R^i}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(G_i \dfrac{r^i}{R^i}\right) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(H_i \dfrac{r^i}{R^i}\right)\right], \\ \Phi_{-i-2} = \dfrac{R}{2i\mu}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{R^{i+1}}{r^{i+1}} F_i\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{R^{i+1}}{r^{i+1}} G_i\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{R^{i+1}}{r^{i+1}} H_i\right)\right]. \end{cases}$$

Das Problem des elastischen Gleichgewichts der Kugel im Falle, wo auf σ die Spannungen X_n, Y_n, Z_n in der Form (32) gegeben sind, ist damit durch die Formeln (27) gelöst, wenn für Ψ_{i-1} der durch die erste der Gleichungen (34) bestimmte Wert und für $U_i = A_i \frac{r^i}{R^i}$, $V_i = B_i \frac{r^i}{R^i}$, $W_i = C_i \frac{r^i}{R^i}$ die Werte eingesetzt werden, welche durch die Gleichungen (33) vollkommen bestimmt sind.

Bemerkung 1. Das Problem des elastischen Gleichgewichts eines homogenen und isotropen Mediums, das den Aussenraum der Kugel vom Radius R erfüllt, wird genau wie das vorige gelöst, indem man in (27) $-i$ für i, d. h. räumliche Kugelfunktionen von negativem Grade für die von positivem Grade substituiert.

Bemerkung 2. Das Problem des elastischen Gleichgewichts eines homogenen und isotropen Körpers, der von den konzentrischen Kugeln

vom Radius R und R' begrenzt wird, wird dagegen so gelöst, dass zugleich die homogenen harmonischen Polynome von positivem und die von negativem Grade in Betracht gezogen werden und gesetzt wird:

$$(27') \begin{cases} u = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} {}_i \left[U_i - M_i r^2 \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial x} \right], \\ v = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} {}_i \left[V_i - M_i r^2 \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial y} \right], \quad \Psi_{i-1} = \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z}, \\ w = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} {}_i \left[W_i - M_i r^2 \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial z} \right]; \end{cases}$$

M_i hat hierin die frühere Bedeutung. Bezüglich der wirklichen Bestimmung von U_i, V_i, W_i, wenn auf den beiden Kugelflächen vom Radius R und R' die Verschiebungen oder aber die Spannungen als Entwicklungen nach *Laplace*schen Funktionen gegeben sind, vgl. die oben erwähnte Abhandlung von *W. Thomson*[13]).

5. Isotropes Rotationsellipsoid. Wenn man den Gedankengang *Lamé*s hinsichtlich der Probleme der Elastizität oder überhaupt der mathematischen Physik verfolgt, so drängt sich unwillkürlich die Überzeugung auf, dass er wiederholt die Lösung des Problems des elastischen Gleichgewichts eines Ellipsoids versucht haben muss. In seinem Buche „Leçons sur les coordonnées curvilignes“ [§ 179, p. 337] bemerkt er, nachdem er seine Lösung des Problems (des elastischen Gleichgewichts) der Kugel auseinandergesetzt hat, dass damit das erste Beispiel für die Lösung der in Rede stehenden Probleme für einen allseitig begrenzten Körper gegeben sei, und sagt dann: „Il y a tout lieu de penser qu'on ne réussira, dans la même voie, avec un autre système orthogonal, qu'en lui découvrant, d'abord, la faculté analogue, de développer *simultanément* deux ou trois fonctions, de une ou de deux de ses coordonnées.“ Man wird daher vermuten, dass *Lamé* untersucht hat, ob jene Bedingungen für den nach der Kugel einfachsten allseitig begrenzten Körper, für das von ihm in die mathematische Physik eingeführte Ellipsoid, zutreffen. Doch hat *Lamé*, soweit den Referenten bekannt ist, nichts über den Gegenstand veröffentlicht.

In der Folgezeit sind zahlreiche Versuche zur Lösung des Problems unternommen. Wir nennen die Arbeiten von *C. Somigliana*[21]), von *C. Chree*[22]), von *E.* und *F. Cosserat*[23]) und von *T. Boggio*[24]), in

21) Ist. Lomb. Rend. (2) 24 (1891), p. 1005.

22) Quart. J. of math. 27 (1895), p. 338.

denen so vorgegangen wird, dass zunächst Partikularlösungen in Form von Polynomen konstruiert werden. Ihre Resultate sind aber auf das Äussere des Ellipsoids nicht leicht auszudehnen. Eine Lösung im eigentlichen Sinne des Wortes dürfte von keiner dieser Arbeiten erbracht sein[24a]). Für das Rotationsellipsoid hat *O. Tedone*[25]) auf Grund des von ihm entwickelten Integrationsverfahrens (IV 24, Nr. **12**, *O. Tedone*) eine völlig allgemeine Lösung in Reihenform gegeben, die hier skizziert werden kann. Insbesondere sei wegen der Eigenschaften der Kugelfunktionen, von denen im folgenden weitgehender Gebrauch gemacht wird, auf das Referat von *A. Wangerin* (II A 10) verwiesen.

a) An der Oberfläche des Ellipsoids seien die *Verschiebungen* vorgeschrieben. Die Lösung des Problems ist dann gegeben durch

$$(35)\qquad \begin{cases} u = U - \dfrac{\lambda + \mu}{2\mu}(x\Theta - \Theta_x), \\ v = V - \dfrac{\lambda + \mu}{2\mu}(y\Theta - \Theta_y), \\ w = W - \dfrac{\lambda + \mu}{2\mu}(z\Theta - \Theta_z), \end{cases}$$

wo U, V, W im Innern des Ellipsoids reguläre harmonische Funktionen, welche auf der Oberfläche die für u, v, w vorgeschriebenen Werte annehmen, Θ die Dilatation und Θ_x, Θ_y, Θ_z ebenfalls im Innern des Ellipsoids reguläre harmonische Funktionen, die auf der Oberfläche bezüglich die Werte von $x\Theta$, $y\Theta$, $z\Theta$ annehmen. Wenn diese Funktionen durch die Oberflächenwerte von u, v, w bzw. von U, V, W ausgedrückt sind, ist das Problem gelöst.

Es werde nun gesetzt:

$$(36)\qquad \begin{cases} x = h\varrho t, \\ y = h\sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}\cos\psi, \\ z = h\sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}\sin\psi, \end{cases}$$

wobei $|t| \leqq 1$ und entweder h, ϱ reell, oder h, ϱ rein imaginär; im ersteren Falle $|\varrho| \geqq 1$. Dann stellen bekanntlich ϱ, t, ψ ein System rechtwinkliger Koordinaten dar, und die Flächen $\varrho = \text{const.}$ sind im ersteren Falle verlängerte, im zweiten Falle abgeplattete Rotations-

23) Paris C. R. 127 (1898), p. 315; 133 (1901), p. 361.

24) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 15 (1906), p. 104.

24a) Spezielle Probleme betr. das Ellipsoid sind auch gelöst worden von *C. Chree,* Quart. J. of math. 23 (1888), p. 11; *L. Lecornu,* Paris C. R. 123 (1896), p. 96 und *A. Viterbi,* Roma Acc. Linc. Rend. (5) 12¹ (1903), p. 249 u. 300.

25) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 14¹ (1905), p. 76.

ellipsoide. Ob der eine oder der andere Fall vorliegt, möge unbestimmt gelassen werden, und es sei r der dem gegebenen Ellipsoid entsprechende Wert von ϱ.

Zunächst kann man U, V, W in Reihenform darstellen. Bedeute $P_m(t)$ das *Legendre*sche Polynom vom Argument t und der Ordnung m, und bezeichne $P_{m,i}(t)$ den Ausdruck

$$(1-t^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i P_m(t)}{dt^i},$$

so kann man setzen:

$$U = \sum_0^\infty{}^i \sum_i^\infty{}^m (a_{m,i}\cos i\psi + b_{m,i}\sin i\psi)\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)} P_{m,i}(t), \tag{37}$$

wo die Konstanten a und b als bekannt anzusehen sind. V und W werden durch zwei analoge Formeln gegeben, die sich ergeben, wenn die a, b etwa mit a', b' bzw. mit a'', b'' vertauscht werden.

Analog kann man die Dilatation Θ als harmonische Funktion in der Form

$$\Theta = \sum_0^\infty{}^i \sum_i^\infty{}^m (A_{m,i}\cos i\psi + B_{m,i}\sin i\psi)\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)} P_{m,i}(t) \tag{38}$$

ansetzen, in der aber die Konstanten $A_{m,i}$ zunächst noch unbekannt sind. Damit ist dann das Problem darauf zurückgeführt, die Funktionen Θ_x, Θ_y, Θ_z zu konstruieren und die Konstanten $A_{m,i}$, $B_{m,i}$ so zu bestimmen, daß die Relation

$$\begin{aligned}\frac{3\lambda+5\mu}{2\mu}\Theta + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(x\frac{\partial\Theta}{\partial x} + y\frac{\partial\Theta}{\partial y} + z\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{\partial\Theta_x}{\partial x} - \frac{\partial\Theta_y}{\partial y} - \frac{\partial\Theta_z}{\partial z}\right) \\ = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\end{aligned} \tag{39}$$

identisch erfüllt ist.

Berücksichtigt man die Formeln (vgl. II A 10, Nr. 6, *A. Wangerin*):

$$\left\{\begin{aligned} (1-t^2)\frac{dP_m(t)}{dt} &= (m+1)[tP_m(t) - P_{m+1}(t)], \\ (2m+1)tP_m(t) &= (m+1)P_{m+1}(t) + mP_{m-1}(t), \\ (2m+1)\ P_m(t) &= \frac{d}{dt}[P_{m+1}(t) - P_{m-1}(t)], \end{aligned}\right. \tag{40}$$

sowie die entsprechenden allgemeinen Formeln, die sich auf die $P_{m,i}$ beziehen, und die Integralformeln, die die Werte der Konstanten $A_{m,i}$, $B_{m,i}$ durch die Oberflächenwerte von Θ ausdrücken, so ergeben sich ohne weiteres für die Θ_x, Θ_y, Θ_z folgende Formeln:

1)
$$\left\{\begin{aligned}
\Theta_x &= c \sum_0^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_m \Big[\Big(\frac{\alpha}{\beta} A_{m+1,i} + \frac{\gamma}{\delta} A_{m-1,i}\Big)\cos i\psi \\
&\qquad + \Big(\frac{\alpha}{\beta} B_{m+1,i} + \frac{\gamma}{\delta} B_{m-1,i}\Big)\sin i\psi\Big] \frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)} P_{m,i}(t), \\
\Theta_y &= c_1 \sum_0^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_m \Big[\Big(\frac{\alpha'}{\beta} A_{m+1,i+1} - \frac{\gamma'}{\delta} A_{m-1,i+1} - \frac{A_{m+1,i-1}}{\beta} + \frac{A_{m-1,i-1}}{\delta}\Big)\cos i\psi \\
&\quad + \Big(\frac{\alpha'}{\beta} B_{m+1,i+1} - \frac{\gamma'}{\delta} B_{m-1,i+1} - \frac{B_{m+1,i-1}}{\beta} + \frac{B_{m-1,i-1}}{\delta}\Big)\sin i\psi\Big] \frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)} P_{m,i}(t), \\
\Theta_z &= c_1 \sum_0^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_m \Big[\Big(\frac{\alpha'}{\beta} B_{m+1,i+1} - \frac{\gamma'}{\delta} B_{m-1,i+1} + \frac{B_{m+1,i-1}}{\beta} - \frac{B_{m-1,i-1}}{\delta}\Big)\cos i\psi \\
&\quad - \Big(\frac{\alpha'}{\beta} A_{m+1,i+1} - \frac{\gamma'}{\delta} A_{m-1,i+1} + \frac{A_{m+1,i-1}}{\beta} - \frac{A_{m-1,i-1}}{\delta}\Big)\sin i\psi\Big] \frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)} P_{m,i}(t),
\end{aligned}\right.$$

wo zur Abkürzung

$$c = hr, \qquad c_1 = \frac{h}{2}\sqrt{r^2 - 1},$$

$$\alpha = m + i + 1, \qquad \gamma = m - i, \qquad \alpha' = \alpha(\alpha + 1)$$

$$\beta = 2m + 3, \qquad \delta = 2m - 1, \qquad \gamma' = \gamma(\gamma - 1)$$

gesetzt ist.

Um nun zur Berechnung der Konstanten $A_{m,i}$, $B_{m,i}$ überzugehen, ist es zunächst erforderlich Formeln aufzustellen, die die Ableitungen der Reihe (38) nach x, y, z liefern. Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{P}_{m,i}(\varrho, t) = P_{m+2,i}(\varrho) P_{m,i}(t) - P_{m+2,i}(t) P_{m,i}(\varrho),$$

so findet man unter Anwendung der Formeln (40) und der entsprechenden allgemeineren Formeln:

2)
$$\left\{\begin{aligned}
h(\varrho^2 - t^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x} &= (\varrho^2 - 1) t \frac{\partial\Theta}{\partial\varrho} + (1 - t^2)\varrho\frac{\partial\Theta}{\partial t} \\
&= \sum_0^\infty{}_i \sum_{i+1}^\infty{}_m \frac{(m+i)(m-i+1)[A_{m,i}\cos i\psi + B_{m,i}\sin i\psi]}{(2m+1) P_{m,i}(r)} \mathfrak{P}_{m-1,i}(\varrho, t), \\
h(\varrho^2 - t^2)\frac{\partial\Theta}{\partial y} &= \sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}\cos\psi\Big(\varrho\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho} - t\frac{\partial\Theta}{\partial t}\Big) - \frac{(\varrho^2 - t^2)\sin\psi}{\sqrt{(\varrho^2-1)(1-t^2)}}\frac{\partial\Theta}{\partial\psi} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_0^\infty{}'_i \sum_{i+2}^\infty{}_m \frac{A_{m,i}\cos(i+1)\psi + B_{m,i}\sin(i+1)\psi}{(2m+1)P_{m,i}(r)\sqrt{-1}} \mathfrak{P}_{m-1,i+1}(\varrho, t) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_i \sum_1^\infty{}_m \frac{(m+i)(m+i-1)(m-i+1)(m-i+2)[A_{m,i}\cos(i-1)\psi + B_{m,i}\sin(i-1)\psi]}{(2m+1)P_{m,i}(r)\sqrt{-1}} \mathfrak{P}_{m-i,i-1}(\varrho, t), \\
h(\varrho^2 - t^2)\frac{\partial\Theta}{\partial z} &= \sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}\sin\psi\Big(\varrho\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho} - t\frac{\partial\Theta}{\partial t}\Big) + \frac{(\varrho^2 - t^2)\cos\psi}{\sqrt{(\varrho^2-1)(1-t^2)}}\frac{\partial\Theta}{\partial\psi} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_0^\infty{}'_i \sum_{i+2}^\infty{}_m \frac{A_{m,i}\sin(i+1)\psi - B_{m,i}\cos(i+1)\psi}{(2m+1)P_{m,i}(r)\sqrt{-1}} \mathfrak{P}_{m-1,i+1}(\varrho, t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_m \frac{(m+i)(m+i-1)(m-i+1)(m-i+2)[A_{m,i}\sin(i-1)\psi - B_{m,i}\cos(i-1)\psi]}{(2m+1)P_{m,i}(r)\sqrt{-1}} \mathfrak{P}_{m-i,i-1}(\varrho, t),
\end{aligned}\right.$$

wo der dem Summenzeichen in den beiden letzten Formeln angehängte Akzent anzeigt, daß für $i = 0$ der Faktor $\frac{1}{2}$ fortfällt. Mit Hilfe dieser Formeln transformiert sich Relation (39) in

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty{}'_i \sum_i^\infty{}_m \frac{1}{2m+3}\Big\{\Big[\frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} R_{m,i} A_{m,i} \\ &+ \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} S_{m+2,i} A_{m+2,i} - T_{m,i}\Big] \cos i\psi \\ &+ \Big[\frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} R_{m,i} B_{m,i} \\ &+ \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} S_{m+2,i} B_{m+2,i} - T'_{m,i}\Big] \sin i\psi\Big\} \mathfrak{P}_{m,i}(\varrho, t) = 0; \end{aligned}\right.$$

hierin ist

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} R_{m,i} &= \frac{3\lambda + 5\mu + m(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu) P_{m,i}(r)} - r\frac{m+i+1}{P_{m+1,i}(r)} + \frac{\sqrt{1-r^2}}{2P_{m+1,i-1}(r)} \\ &\qquad - \frac{(m+i+1)(m+i+2)\sqrt{1-r^2}}{2P_{m+1,i+1}(r)}, \\ S_{m+2,i} &= \frac{-3\lambda - 5\mu + (m+3)(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu) P_{m+2,i}(r)} - r\frac{m-i+2}{P_{m+1,i}(r)} - \frac{\sqrt{1-r^2}}{2P_{m+1,i-1}(r)} \\ &\qquad + \frac{(m-i+1)(m-i+2)\sqrt{1-r^2}}{2P_{m+1,i+1}(r)}, \\ T_{m,i} &= \frac{\mu}{h(\lambda+\mu)}\Big[2(m+i+1)(m-i+2)\frac{a_{m+1,i}}{P_{m+1,i}(r)} \\ &\qquad - \frac{a'_{m+1,i-1} - b''_{m+1,i-1}}{\sqrt{-1}\, P_{m+1,i-1}(r)} \\ &\qquad - \frac{(m+i+1)(m+i+2)(m-i+1)(m-i+2)(a'_{m+1,i+1} + b''_{m+1,i+1})}{\sqrt{-1}\, P_{m+1,i+1}(r)}\Big], \\ T'_{m,i} &= \frac{\mu}{h(\lambda+\mu)}\Big[2(m+i+1)(m-i+2)\frac{b_{m+1,i}}{P_{m+1,i}(r)} \\ &\qquad - \frac{b'_{m+1,i-1} + a''_{m+1,i-1}}{\sqrt{-1}\, P_{m+1,i-1}(r)} \\ &\qquad - \frac{(m+i+1)(m+i+2)(m-i+1)(m-i+2)(b'_{m+1,i+1} - a''_{m+1,i+1})}{\sqrt{-1}\, P_{m+1,i+1}(r)}\Big]; \end{aligned}\right.$$

der dem Summenzeichen angehängte Akzent deutet an, daß die den beiden ersten Werten von i entsprechenden Größen $R_{m,0}$, $R_{m,1}$, $S_{m+2,0}$, ... einen vom allgemeinen Gesetz abweichenden Wert haben.

Um nunmehr die Gleichungen zu finden, denen die Konstanten $A_{m,i}$, $B_{m,i}$ genügen, bemerke man, daß

$$\mathfrak{P}_{m,i}(\varrho, t)$$
$$= (\varrho^2 - t^2)(2m+3) \sum_{i \text{ od. } i+1}^{m} {}_k (2k+1) \frac{(k-i)!}{(m-i+2)!} \frac{(m+i)!}{(k+i)!} P_{k,i}(\varrho) P_{k,i}(t),$$

wo der untere Index des Summenzeichens i ist, wenn $m-i$ gerade, und $i+1$, wenn $m-i$ ungerade. Setzt man diesen Wert von $\mathfrak{P}_{m,i}$ in (43) ein und ordnet rücksichtlich der $P_{m,i}(\varrho) P_{m,i}(t)$, so ergeben sich die gesuchten Gleichungen, indem man in der so transformierten Formel (43) die Koeffizienten von $P_{m,i}(\varrho) P_{m,i}(t) \cos i\psi$ und $P_{m,i}(\varrho) P_{m,i}(t) \sin i\psi$ gleich Null setzt. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich dann, dass die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_{m,i}(\varrho, t) \cos i\psi$, $\mathfrak{P}_{m,i}(\varrho, t) \sin i\psi$ in der Formel (43) verschwinden. Wir betrachten im folgenden nur diejenigen Koeffizienten, welche die $A_{m,i}$ mit geradem $m-i$ enthalten; für die $A_{m,i}$ mit ungeradem $m-i$ und für die $B_{m,i}$ ist die Überlegung analog. Bemerkt man, dass für jedes Wertesystem von m, i die Gleichung:

$$R_{m,i} P_{m,i}(r) + S_{m+2,i} P_{m+2,i}(r) = 0 \tag{45}$$

besteht, so folgt sofort aus den genannten Gleichungen:

$$\frac{(2i+2k)!}{(2k)!} \frac{A_{i+2k,i}}{(2i+4k+1) P_{i+2k,i}(r)} \tag{46}$$
$$= (2i)! \frac{A_{i,i}}{(2i+1) P_{i,i}(r)} - \sum_{0}^{k-1} {}_j \frac{(2j+2i)!}{(2j+2)!} \frac{T_{i+2j,i}}{R_{i+2j,i} P_{i+2j,i}(r)}.$$

Geht man nunmehr zur Grenze $k = \infty$ über und bemerkt, dass wegen der Konvergenz von (38)

$$\lim_{k=\infty} A_{i+2k,i} = 0,$$

so findet man, wenn man noch die asymptotischen Werte von $P_{i+2k,i}(r)$ in Rücksicht zieht,

$$\frac{A_{i,i}}{(2i+1) P_{i,i}(r)} = \frac{1}{(2i)!} \sum_{0}^{\infty} {}_j \frac{(2j+2i)!}{(2j+2)!} \frac{T_{i+2j,i}}{R_{i+2j,i} P_{i+2j,i}(r)} \tag{47}$$

und daher auch

$$\frac{A_{i+2k,i}}{(2i+2k+1) P_{i+2k,i}(r)} = \frac{(2k)!}{(2i+2k)!} \sum_{0}^{\infty} {}_j \frac{(2j+2i)!}{(2j+2)!} \frac{T_{i+2j,i}}{R_{i+2j,i} P_{i+2j,i}(r)}. \tag{47'}$$

b) Durch ähnliche Rechnungen gelangt man zur Lösung des Problems, wenn an der Oberfläche des Ellipsoids die *Spannungen* vorgeschrieben sind. Wir wollen hier das Verfahren nur kurz andeuten. Man hat in diesem Falle ausser Θ auch die Rotationskomponenten ϖ_1,

ϖ_2, ϖ_3 zunächst als bekannt anzunehmen. Als harmonische Funktionen lassen sie sich in einer zu (38) analogen Form ansetzen. Man hat dann die drei Ausdrücke zu konstruieren:

$$(48)\quad \begin{cases} \lambda\Theta\frac{x}{r^2} + 2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{r^2} + \frac{1}{r^2-1}\left(y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + y\varpi_3 - z\varpi_2\right)\right], \\ \lambda\Theta\frac{y}{r^2-1} + 2\mu\left[\frac{x}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varpi_3\right) + \frac{1}{r^2-1}\left(y\frac{\partial v}{\partial y} + z\frac{\partial v}{\partial z} + z\varpi_1\right)\right], \\ \lambda\Theta\frac{z}{r^2-1} + 2\mu\left[\frac{x}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varpi_2\right) + \frac{1}{r^2-1}\left(y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} - y\varpi_1\right)\right], \end{cases}$$

wo u, v, w die im vorigen Problem bestimmten Funktionen sind. Setzt man $\varrho = r$ und benutzt die früher angewendeten Formeln (41), so kann man jeden der so umgeformten Ausdrücke (48) nach Kugelfunktionen entwickeln. Bedient man sich überdies der Gleichungen (1′), so kann man aus den erhaltenen Ausdrücken die Konstanten eliminieren, die in den Reihen für ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 vorkommen. Da nun die Ausdrücke (48) für $\varrho = r$ die Werte von

$$(49)\quad X_n\sqrt{\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2+z^2}{(r^2-1)^2}},\quad Y_n\sqrt{\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2+z^2}{(r^2-1)^2}},\quad Z_n\sqrt{\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2+z^2}{(r^2-1)^2}},$$

annehmen, so erhält man, wenn man die Ausdrücke (49) für $\varrho = r$ nach Kugelfunktionen entwickelt und mit den analogen Entwicklungen der (48) für $\varrho = r$ identifiziert, eine Reihe von Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten a, b; a', b'; a'', b'', die in die Ausdrücke für u, v, w mittels der Konstanten der Reihenentwicklungen für (49) und der Konstanten A und B der Entwicklung für Θ eingehen. Setzt man schliesslich diese Werte von a, b; a', b'; a'', b'' in (46) und den analogen Gleichungen ein, so ergeben sich Gleichungen, in denen als Unbekannte nur die A bzw. die B vorkommen. Diese Gleichungen lassen sich wie in dem Falle, wo an der Oberfläche die Verschiebungen gegeben sind, lösen.

Bemerkung. Vertauscht man die Kugelfunktionen P mit denen 2. Art, so erhält man die Lösung der entsprechenden Probleme für den Aussenraum des Ellipsoids. Kombiniert man die beiden Lösungen, so kann man die genannten Probleme auch für den von zwei konfokalen Rotationsellipsoiden begrenzten Raum lösen.

6. Unendlicher isotroper Kreiszylinder. Die erste Behandlung des Zylinderproblems wurde wieder von *G. Lamé* und *E. Clapeyron*[26]) in Angriff genommen. Mehr oder minder spezielle Fälle sind dann in grosser Zahl gelöst worden, worüber im Abschnitt II ausführlich

26) J. f. Math. 7 (1831), p. 407.

berichtet wird. Eine allgemeine Lösung gab nach der Methode der Partikularlösungen (vgl. IV 24, Nr. **11**, *O. Tedone*) *L. Pochhammer*[26a]) im Falle, dass die Spannungen an der Begrenzung periodisch im Sinne der Zylinderaxe verteilt sind. Für beliebige Spannungen an der Oberfläche gab *O. Tedone*[27]) nach der von ihm entwickelten Integrationsmethode (IV 24, Nr. **12**f., *O. Tedone*) die Lösung.

a) Sind auf dem Mantel des unendlichen Zylinders vom Radius R die *Verschiebungen* vorgeschrieben, so geht man von den Formeln (2) aus. Die Axe des Zylinders falle zusammen mit der x-Axe. Führt man nun Zylinderkoordinaten x, l, ψ ein, sodass $y = l \cos\psi$, $z = l \sin\psi$ und bezeichnet mit J_ν die *Bessel*sche Funktion 1. Art von der Ordnung ν (vgl. II A 10, Nr. **44**, *A. Wangerin*), so lassen sich nach einer von *G. Kirchhoff*[27a]) gegebenen Entwicklung die Funktionen

$$U = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u \frac{dG}{dn} d\sigma, \quad V = \frac{1}{4\pi}\int v \frac{dG}{dn} d\sigma, \quad W = \frac{1}{4\pi}\int w \frac{dG}{dn} d\sigma$$

und Θ als harmonische Funktionen in folgende Reihen entwickeln:

$$(50)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{4\pi}\int_\sigma u \frac{dG}{dn} d\sigma = \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} [u_\nu(\xi)\cos\nu\psi \\ \qquad\qquad + \bar{u}_\nu(\xi)\sin\nu\psi]\cos t(\xi - x)\, d\xi, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(51)\quad \Theta = \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\Theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \bar{\Theta}_\nu(\xi)\sin\nu\psi]\cos t(\xi - x)\, d\xi,$$

wo $i = \sqrt{-1}$; $u_\nu, \bar{u}_\nu, \dots \bar{w}_\nu$ sind die Koeffizienten der *Fourier*schen Entwickelung der gegebenen Oberflächenwerte von u, v, w und daher als bekannt anzusehen. Da ferner auf dem Zylindermantel

$$\Theta = \sum_0^\infty{}' [\Theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \bar{\Theta}_\nu(\xi)\sin\nu\psi],$$

so kann man auch für die in den Formeln (2) auftretenden Ausdrücke:

26a) *L. Pochhammer*, J. f. Math. 81 (1876), p. 33; vgl. *C. Chree*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 14 (1889), p. 250.

27) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 13¹ (1904), p. 232.

27a) *G. Kirchhoff*, Über den induzierten Magnetismus eines unbegrenzten Zylinders von weichem Eisen, J. f. Math. 48 (1853), p. 348 = Ges. Abh., Leipzig 1882, p. 193.

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma \xi\Theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma,\qquad \frac{1}{4\pi}\int \eta\Theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma,\qquad \frac{1}{4\pi}\int \zeta\Theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma$$

ähnliche, die Θ_ν, $\overline{\Theta}_\nu$ als Koeffizienten enthaltende Entwicklungen aufstellen. Die Reihen, die sich so für u, v, w ergeben, hat man nun in die Identität

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

einzuführen und alsdann die Koeffizienten der einzelnen trigonometrischen Terme links und rechts gleichzusetzen. Man erhält so folgende Relationen für die Θ_ν:

$$(52)\quad \begin{cases} \Theta_\nu(x) + \dfrac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Rit\frac{J_\nu'(itR)\,[J_{\nu-1}(itR)J_{\nu+1}(itR) - J_\nu^2(itR)]}{J_{\nu-1}(itR)\,J_\nu(itR)\,J_{\nu+1}(itR)}\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Theta_\nu(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi \\ \quad = \dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\Big\{u_\nu'(x) + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu(itR)\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{v_{\nu+1}(\xi) + \overline{w}_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}(itR)} \\ \quad + \dfrac{\overline{w}_{\nu-1}(\xi) - v_{\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}(itR)}\Big]\cos t(\xi - x)\,d\xi\Big\}, \end{cases}$$

und analoge Relationen für die $\overline{\Theta}_\nu$.

Diese Integralgleichungen sind von der Form

$$(53)\qquad \Theta^*(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Theta^*(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi = f(x),$$

wo $\varphi(t)$ und $f(x)$ bekannte Funktionen und $\varphi(t)$ eine gerade Funktion ist; ihre Lösung ist gegeben durch

$$(54)\qquad \Theta^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi.$$

b) In ähnlicher Weise erledigt sich das Problem des unendlichen isotropen Zylinders, wenn die auf den Mantel wirkenden *Spannungen* vorgeschrieben sind.

Bemerkung 1. Führt man statt der *Bessel*schen Funktionen 1. Art diejenigen 2. Art ein, so erhält man die Lösung für einen den Aussenraum des Zylinders erfüllenden Körper.

Bemerkung 2. Das Problem des elastischen Gleichgewichts eines geraden *Kreiskegels* ist von *O. Tedone*[28]) in ähnlicher Weise durch Einführung der *Mehler*schen Kegelfunktion (vgl. II A 10, Nr. 28, *A. Wangerin*) gelöst worden.

---

28) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 14^1 (1905), p. 316.

7. Allgemeinere isotrope Rotationskörper. *A. Wangerin*[29]) ist es auch für allgemeinere Fälle gelungen, die Lösungen der Hauptgleichungen des elastischen Gleichgewichts eines homogenen isotropen Körpers, der von einer beliebigen Umdrehungsfläche begrenzt ist, durch Verallgemeinerung des *Lamé*schen Ansatzes für die Kugel in eine Form zu bringen, die für die Befriedigung von Randbedingungen geeignet ist. Die in den vorstehenden Nummern behandelten Probleme ordnen sich als spezielle Fälle dieser allgemeinen Kategorie unter.

Es werden Zylinderkoordinaten r, ψ, z eingeführt, in denen sich das Quadrat des Bogenelements durch

$$(55) \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2 + dz^2.$$

ausdrückt.

In einer Ebene $\psi = \text{const.}$ seien nun zwei orthogonale Kurvensysteme gegeben, die stets als durch eine Gleichung von der Form

$$(56) \qquad \alpha + i\beta = f(z + ir)$$

bestimmt angesehen werden können, unter f eine Funktion der Variabeln $z + ir$ verstanden. α, β, ψ können dann als die Parameter eines Systems rechtwinkliger Koordinaten im Raum betrachtet werden, und das Quadrat des Bogenelements in diesem neuen Koordinatensystem wird sich ausdrücken durch:

$$(57) \qquad ds^2 = h^2(d\alpha^2 + d\beta^2) + r^2 d\psi^2, \quad h^{-1} = \operatorname{mod} f'(z + ir).$$

Die Elementardilatation Θ genügt nun der Gleichung:

$$(58) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(r \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(r \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}\right) + \frac{h^2}{r} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \psi^2} = 0;$$

mithin kann man setzen:

$$(59) \qquad \Theta = X_0 + \sum_1^\infty {}^s X_s e^{is\psi},$$

wo X_0 und X_s reguläre Lösungen der beiden Gleichungen

$$(60) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(r \frac{\partial X_0}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(r \frac{\partial X_0}{\partial \beta}\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(r \frac{\partial X_s}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(r \frac{\partial X_s}{\partial \beta}\right) - s^2 \frac{h^2}{r} X_s = 0 \end{gathered}$$

sind.

Setzt man nun Θ in der Form (59) als gegeben voraus, so handelt es sich zunächst darum, die Rotationskomponenten $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ aus den vier Gleichungen zu bestimmen:

---

29) Arch. Math. Phys. 55 (1873), p. 113. Die Theorie wurde weiter ausgestaltet von *P. Jaerisch,* J. f. Math. 104 (1889), p. 177, und Hamburg math. Ges. Mitt. 1 (1889), p. 278.

$$(61)\quad \begin{cases} 2\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(r\mathfrak{T}_3) - h\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \psi}\right] = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} r \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}, \\ 2\left[h\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \alpha}(r\mathfrak{T}_3)\right] = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} r \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}, \\ 2\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(h\mathfrak{T}_2) - \frac{\partial}{\partial \beta}(h\mathfrak{T}_1)\right] = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{h^2}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(hr\mathfrak{T}_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(hr\mathfrak{T}_2) + h^2\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial \psi} = 0. \end{cases}$$

Zu diesem Zwecke setzt man:

$$(62)\quad \begin{gathered} 2h\mathfrak{T}_1 = L_0 + \sum_1^\infty {}^s L_s e^{is\psi}, \quad 2h\mathfrak{T}_2 = M_0 + \sum_1^\infty {}^s M_s e^{is\psi}, \\ 2r\mathfrak{T}_3 = N_0 + \sum_1^\infty {}^s N_s e^{is\psi}, \end{gathered}$$

wo die L, M, N nur von α und β abhängen. Man findet so:

$$(63)\quad \begin{cases} L_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha}, \quad M_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial \beta}, \quad N_0 = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\int r\left(\frac{\partial X_0}{\partial \beta}d\alpha - \frac{\partial X_0}{\partial \alpha}d\beta\right), \\ isL_s = \frac{\partial Y_s}{\partial \alpha} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial \alpha}(zX_s) + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} r \frac{\partial X_s}{\partial \beta}, \\ isM_s = \frac{\partial Y_s}{\partial \beta} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial \beta}(zX_s) - \frac{\lambda+2\mu}{\mu} r \frac{\partial X_s}{\partial \alpha}, \\ N_s = Y_s + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} zX_s; \end{cases}$$

in diesen Formeln sind Y_0 und Y_s Funktionen, die den X_0 und X_s analog sind bzw. denselben Gleichungen genügen.

Es bleibt noch übrig, die Verschiebungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ nach den Richtungen α, β, ψ aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$(64)\quad \begin{cases} \Theta = \frac{1}{h^2 r}\left(\frac{\partial hr\varkappa_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial hr\varkappa_2}{\partial \beta} + h^2\frac{\partial \varkappa_3}{\partial \psi}\right) = X_0 + \sum_1^\infty {}^s X_s e^{is\psi}, \\ 2h\mathfrak{T}_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r\varkappa_3}{\partial \beta} - h\frac{\partial \varkappa_2}{\partial \psi}\right) = L_0 + \sum_1^\infty {}^s L_s e^{is\psi}, \\ 2h\mathfrak{T}_2 = \frac{1}{r}\left(h\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \psi} - \frac{\partial r\varkappa_3}{\partial \alpha}\right) = M_0 + \sum_1^\infty {}^s M_s e^{is\psi}, \\ 2r\mathfrak{T}_3 = \frac{r}{h^2}\left(\frac{\partial h\varkappa_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial h\varkappa_1}{\partial \beta}\right) = N_0 + \sum_1^\infty {}^s N_s e^{is\psi}. \end{cases}$$

Zu diesem Zweck macht man den Ansatz:

$$\begin{gathered} h\varkappa_1 = U_0 + \sum_1^\infty {}^s U_s e^{is\psi}, \quad h\varkappa_2 = V_0 + \sum_1^\infty {}^s V_s e^{is\psi}, \\ r\varkappa_3 = W_0 + \sum_1^\infty {}^s W_s e^{is\psi}; \end{gathered}$$

wo U, V, W ebenfalls nur von α und β abhängen. Durch direkte Substitution findet man:

$$(65)\quad \begin{cases} U_0 = \dfrac{\partial Z_0}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \quad V_0 = \dfrac{\partial Z_0}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \alpha}; \\ W_0 = -\displaystyle\int r\left(\dfrac{\partial Y_0}{\partial \beta}\, d\alpha - \dfrac{\partial Y_0}{\partial \alpha}\, d\beta\right); \end{cases}$$

in diesen Formeln ist Z_0 eine Funktion von derselben Art wie X_0 und Y_0, und Φ und Ψ sind bezüglich partikuläre Integrale der Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) = h^2 r X_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}\right) + \frac{h^2}{r} N_0 = 0,$$

die sich leicht in der Form bestimmen lassen:

$$\Phi = P X_0 + Q\frac{\partial X_0}{\partial \alpha} + R\frac{\partial X_0}{\partial \beta}, \quad \Psi = P' N_0 + Q'\frac{\partial N_0}{\partial \alpha} + R'\frac{\partial N_0}{\partial \beta},$$

wo P, Q, R; P', Q', R' geeignete Funktionen von α und β sind.

Schliesslich ist:

$$(66)\quad \begin{cases} is\, U_s = \dfrac{\partial W_s}{\partial \alpha} + r M_s, \\ is\, V_s = \dfrac{\partial W_s}{\partial \beta} - r L_s, \\ is\, W_s = Z_s + z Y_s + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda + 2\mu}{\mu}(z^2 + r^2) X_s + P'' X_s \\ \qquad\qquad + Q''\dfrac{\partial X_s}{\partial \alpha} + R''\dfrac{\partial X_s}{\partial \beta}, \end{cases}$$

wo Z_s eine Funktion von derselben Natur wie X_s und Y_s und P'', Q'', R'' von derselben Natur wie P, Q, R sind.

Die allgemeine Lösung der Gleichungen des elastischen Gleichgewichts für einen homogenen und isotropen Körper ist damit ausgedrückt in Reihen, in die die unbekannten Funktionen X, Y, Z eingehen. In jedem speziellen Fall kann man sich nun dieser unbekannten Funktionen bedienen, um Oberflächenbedingungen zu genügen.

A. Wangerin hat diesen Ansatz für das Rotationsellipsoid, die von zwei exzentrischen Kugeln begrenzte Schale und den Kreisring unter der Annahme, dass an der Oberfläche die Spannungen gegeben sind, weiter verfolgt. Er zeigt jedoch nur an dem Beispiele des Kreisringes, dass die üblichen Methoden zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten ausreichen.

II. Lösungen für besondere Randbedingungen oder Singularitäten.

8. Einleitende Bemerkung. Ableitung partikulärer Lösungen überhaupt. Den wenigen Fällen gegenüber, in denen die Integration der Gleichungen des Gleichgewichts elastischer Körper bisher allgemein, d. h. unter den allgemeinsten Randbedingungen möglich, ist die Zahl der speziellen Lösungen für besondere Randbedingungen eine sehr große. Wie bereits in der Vorbemerkung angedeutet, giebt es solche spezielle Lösungen besonders in Fällen, in denen die Daten des Problems (Randbedingungen und Massenkräfte) in einfacher, natürlicher Beziehung zur Form des Körpers stehen. Dies bedingt, dass bei Einführung geeigneter Koordinaten und geeigneter Komponenten der Verschiebung die Lösungen in diesen Fällen durch verhältnismässig einfache Ausdrücke gegeben sind. Zugleich ist das ordnende Prinzip für die auf diesen Ansätzen beruhenden speziellen Lösungen häufig dadurch gegeben, dass bestimmte Voraussetzungen über die Abhängigkeit der gesuchten Funktionen von den einzelnen Koordinaten zu Hilfe genommen werden. So werden z. B. einzelne Verschiebungs-, Formänderungs- oder Spannungskomponenten als unabhängig von einer oder von zwei Koordinaten oder als verschwindend vorausgesetzt. Dabei ist aber zu beachten, dass derartige Voraussetzungen bezw. die daran geknüpften Folgerungen stets mit Hilfe der Kompatibilitätsbedingungen (vgl. IV 24, Nr. 7a, *O. Tedone*) kontrolliert werden müssen.

Die Ableitung partikulärer Lösungen des Problems des elastischen Gleichgewichts, die zunächst etwas verwickelt erscheint, da die unbekannten Funktionen u, v, w drei *simultanen* Differentialgleichungen genügen müssen, wird für den Fall der Isotropie, wie *J. Boussinesq*[30]) gezeigt hat, dadurch erleichtert, dass es gelingt, dies Gleichungssystem auf drei Gleichungen mit nur je einer unbekannten Funktion zurückzuführen. In der Tat werden die Gleichungen

$$(1'')\quad \begin{cases} \mu \Delta u + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + \varrho X = 0 \\ \mu \Delta v + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + \varrho Y = 0 \\ \mu \Delta w + (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + \varrho Z = 0 \end{cases}$$

durch den Ansatz

30) Appl. des potentiels, p. 281; vgl. auch *C. Somigliana,* Ann. di mat. (2) 17 (1889), p. 37; Nuovo Cim. (3) 36 (1894), p. 28.

$$(67)\qquad \begin{cases} u = (\lambda+2\mu)\Delta\mathfrak{U} - (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\mathfrak{D}}{\partial x}, \\ v = (\lambda+2\mu)\Delta\mathfrak{V} - (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\mathfrak{D}}{\partial y}, \\ w = (\lambda+2\mu)\Delta\mathfrak{W} - (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\mathfrak{D}}{\partial z} \end{cases}$$

befriedigt, wenn $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ Lösungen der Gleichungen

$$(68)\qquad \begin{cases} \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta\mathfrak{U} + \varrho X = 0, \\ \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta\mathfrak{V} + \varrho Y = 0, \\ \mu(\lambda+2\mu)\Delta\Delta\mathfrak{W} + \varrho Z = 0 \end{cases}$$

sind und

$$(68')\qquad \mathfrak{D} = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}$$

gilt.

9. Potentialdeformationen und dilatationsfreie Drillungsdeformationen. Eine wichtige spezielle Klasse von Deformationen stellen die von *G. Lamé*[31]) zuerst betrachteten *Potentialdeformationen* dar, bei denen die Verschiebung u, v, w ein Potential φ besitzt:

$$(69)\qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so dass

$$(70)\qquad \Theta = \Delta\varphi, \quad \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_3 = 0;$$

$$(71)\qquad \begin{cases} x_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad y_y = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad z_z = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \\ y_z = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \quad z_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}, \quad x_x = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \end{cases}$$

Für φ besteht eine Differentialgleichung 4. Ordnung; speziell wird bei isotropen Körpern im Falle verschwindender Massenkräfte, da hier $\Delta\Theta = 0$,

$$(72)\qquad \Delta\Delta\varphi = 0.$$

Die Gleichungen (1″) ferner zeigen, dass im Falle der Isotropie Potentialdeformationen nur möglich sind, wenn die Massenkräfte X, Y, Z ein Potential Φ besitzen, wo

$$\Phi = -\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\Delta\varphi + \text{const.}$$

Potentialdeformationen sind also stets *drillungsfrei*, d. h. sie besitzen verschwindende Komponenten der mittleren Rotation und sind, wenn Massenkräfte fehlen, mit konstanter Dilatation verknüpft.

31) *G. Lamé,* Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, Paris 1861. p. 290. Vgl. auch *W. Voigt,* Elementare Mechanik, Leipzig 1889; 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 502.

Das Gegenstück zu den Potentialdeformationen bilden die sogenannten *dilatationsfreien Drillungsdeformationen*[32]). Schreibt man die Gleichungen (1″) in der Form (vgl. IV 24, Nr. 2c, *O. Tedone*)

$$(1''')\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}-2\mu\left(\dfrac{\partial\varpi_3}{\partial y}-\dfrac{\partial\varpi_2}{\partial z}\right)+\varrho X=0,\\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}-2\mu\left(\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial z}-\dfrac{\partial\varpi_3}{\partial x}\right)+\varrho Y=0,\\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}-2\mu\left(\dfrac{\partial\varpi_2}{\partial x}-\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial y}\right)+\varrho Z=0,\end{cases}$$

so folgt für $\Theta = 0$ und verschwindende Massenkräfte:

$$(73)\qquad \varpi_1=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \varpi_2=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \varpi_3=\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Da $\dfrac{\partial\varpi_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\varpi_2}{\partial y}+\dfrac{\partial\varpi_3}{\partial z}=0$, so ergiebt sich

$$(74)\qquad \Delta\psi = 0.$$

Die Verschiebungskomponenten kann man ansetzen in der Form

$$(75)\qquad u=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\quad v=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\quad w=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y};$$

die Funktionen U, V, W sind dabei, falls sie noch der Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

unterworfen werden, Lösungen der Gleichungen

$$(76)\quad \begin{cases} \Delta U=-2\varpi_1=-2\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \Delta V=-2\varpi_2=-2\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\\ \Delta W=-2\varpi_3=-2\dfrac{\partial\psi}{\partial z}.\end{cases}$$

In der Tat werden dann die Glgn. (1″) von den Lösungen (75) befriedigt.

10. Eindimensionale Probleme.

Hierbei handelt es sich um Lösungen der Grundgleichungen des elastischen Gleichgewichts, die nur von einer Koordinate abhängen. Legt man *Cartesische Koordinaten* zu Grunde, so ergeben sich hier sofort die beiden Fälle der *einfachen Dehnung:*

$$(77)\qquad u=C\cdot x,\quad v=0,\quad w=0$$

und der *einfachen Schiebung:*

$$(78)\qquad u=0,\quad v=C\cdot x,\quad w=0,$$

32) *W. Voigt*, Elementare Mechanik, 2. Aufl., p. 517.

wobei die Lösungen für beliebige äolotrope Körper gelten. Wesentlich interessanter sind die eindimensionalen Probleme unter Zugrundelegung von *Zylinder-* und *Polarkoordinaten* (worüber in den beiden folgenden Nrn. berichtet ist), während die Gleichungen in *elliptischen Koordinaten* keine Lösungen zulassen, die nur von einer (oder auch zwei) Koordinaten abhängen.

10a. Isotroper Hohlzylinder unter normalem Druck. Thermische Deformation eines Zylinders. Bei Zugrundelegung von *Zylinderkoordinaten* (r, ψ, z) lauten die Hauptgleichungen für isotrope Körper, auf die *keine Massenkräfte* wirken[33]:

$$(79)\qquad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial r}+2\mu\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial\psi}\right)=0,\\ (\lambda+2\mu)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\psi}+2\mu\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial r}-\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial z}\right)=0,\\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}+\dfrac{2\mu}{r}\left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\psi}-\dfrac{\partial(r\mathfrak{T}_2)}{\partial r}\right)=0, \end{cases}$$

wo

$$(80)\qquad \begin{cases} \Theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\varkappa_1)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varkappa_2}{\partial\psi}+\dfrac{\partial\varkappa_3}{\partial z},\\ 2\mathfrak{T}_1=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varkappa_3}{\partial\psi}-\dfrac{\partial\varkappa_2}{\partial z},\qquad 2\mathfrak{T}_2=\dfrac{\partial\varkappa_1}{\partial z}-\dfrac{\partial\varkappa_3}{\partial r},\\ 2\mathfrak{T}_3=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(r\varkappa_2)}{\partial r}-\dfrac{\partial\varkappa_1}{\partial\psi}\right) \end{cases}$$

und im übrigen die Bezeichnungen bei krummlinigen Koordinaten in Übereinstimmung mit IV 24, Nr. **1** (*O. Tedone*) gewählt sind; $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ sind die Komponenten der mittleren Rotation, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Komponenten der Verschiebung.

Die Lösungen der Gleichungen (79), die nur von r abhängen, werden

$$(81)\qquad \varkappa_1=a_1 r+\frac{b_1}{r},\quad \varkappa_2=a_2 r+\frac{b_2}{r},\quad \varkappa_3=a_3\log r+b_3,$$

wo $a_1, b_1, \ldots b_3$ willkürliche Konstanten bedeuten. Setzt man $\varkappa_2=\varkappa_3=0$, so kann man unter Benutzung der Formel für die radiale Normalspannung:

$$-\varphi_1=(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varkappa_1}{\partial r}+\lambda\frac{\varkappa_1}{r}$$

a_1, b_1 so bestimmen, dass auf zwei Zylinderflächen $r=r_0$ und $r=r_1$ konstante Drucke p_0 und p_1 wirken. Die so erhaltenen Lösungen sind zuerst von *G. Lamé* und *E. Clapeyron*[34] abgeleitet und von

33) *G. Lamé,* Élasticité, p. 179.

34) J. f. Math. 7 (1831), p. 382.

A. G. Greenhill[35]) und *L. Boltzmann*[36]) auf die Theorie der Geschützkonstruktion[37]) angewendet worden. Um den in der z-Richtung resultierenden Zug zu entfernen, kann man eine einfache Dehnung $\varkappa_3 = cz$ überlagern, wo

$$(82) \qquad c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} \text{ [38])}.$$

Die Verallgemeinerung der Lösung auf den Fall zylindrisch-isotropen Materials[39]) hat *B. de Saint-Venant*[40]) gegeben. Die Form der Lösung ist hier dieselbe wie im Falle der Isotropie.

Wirkt auf den Körper eine *radiale Massenkraft* ϱF_1, so lautet die erste der Gleichungen (79), wenn Abhängigkeit von r allein vorausgesetzt wird,

$$(83) \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{d\Theta}{dr} + \varrho F_1 = 0.$$

Bei einem um seine Axe rotierenden Zylinder kann man für F_1 die Zentrifugalbeschleunigung $\omega^2 r$ einführen; man erhält dann[41]):

$$(84) \qquad \varkappa_1 = a_1 r + \frac{b_1}{r} - \frac{\omega^2 \varrho}{8(\lambda + 2\mu)} r^3.$$

Die Konstanten a_1 und b_1 kann man z. B. so wählen, dass auf zwei Zylinderflächen $r = r_0$ und $r = r_1$ der Druck verschwindet. Wieder kann man eine einfache Dehnung ($\varkappa_3 = cz$) so überlagern, dass der resultierende Längszug verschwindet.

Die *thermischen Deformationen* eines Zylinders, in dem die Temperatur τ nur eine Funktion des Radius ist, behandeln *F. Neumann*[42]), *Lord Rayleigh*[43]) und *A. V. Leon*[44]). Nach den in IV 24, Nr. 4

35) Nature 42 (1890), p. 4.

36) Wien Berichte 59 (1869), p. 679.

37) Es handelt sich um die Ermittlung der Selbstspannungen in Kanonen, die aus einer Reihe bei ungleicher Temperatur über einander geschobener Rohre bestehen. Wie sich zeigt, ist die bei der Explosion entstehende Beanspruchung des Materials in einem derartig konstruierten Geschütz geringer als in einem einzigen Rohr. Vgl. hierzu IV 28, Nr. **11** (*C. Cranz*).

38) *G. Lamé*, Élasticité, p. 190.

39) d. h. eines Materials, bei dem die von einem Punkte einer zur Axe normalen Geraden auslaufenden, zu ihr senkrechten Strahlen elastisch gleichwertig sind.

40) J. de math. (2) 10 (1865), p. 297.

41) *J. Hopkinson*, Mess. of math. (2) 2 (1871), p. 53 = Papers 2, p. 329; *C. Chree*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 7 (1892), p. 283.

42) Berlin Abh. 1841, 2. Teil.

43) Arch. néerl. (2) 5 (1900), p. 32 = Phil. Mag. (6) 1 (1901), p. 169 = Scient. papers 4, p. 502.

44) Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 174.

(*O. Tedone*) dargelegten Prinzipien ergeben sich die hier in Frage kommenden Gleichungen, indem man in die Gleichung (83) die Massenkraft

$$\varrho F_1 = -k(3\lambda + 2\mu)\frac{d\tau}{dr}$$

setzt und normale Oberflächendrucke von der Grösse $k(3\lambda+2\mu)\tau_0$ bezw. $k(3\lambda+2\mu)\tau_1$ einführt, unter τ_0, τ_1 die Temperaturen auf den Zylindermänteln $r = r_0$, $r = r_1$ verstanden. Die Lösung ist:

$$(85) \qquad r\varkappa_1 = \frac{k(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\int_{r_0}^{r_1}\tau r\, dr + \alpha r^2 + \beta,$$

wo α, β Konstanten, die sich durch τ_0, τ_1 bestimmen.

10b. Isotrope Hohlkugel unter normalem Druck. Thermische Deformation einer Kugel. Bei Zugrundelegung von *Polarkoordinaten* (r, φ, ψ), wo r der Radiusvektor, φ die „Breite" und ψ die „Länge", lauten die Hauptgleichungen für *massenkraftfreie* isotrope Körper[45]):

$$(86) \qquad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} + \dfrac{2\mu}{r\sin\varphi}\left[\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\psi} - \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\mathfrak{T}_3\sin\varphi)\right] = 0, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varphi} + 2\mu\left[\dfrac{\partial(r\mathfrak{T}_3)}{\partial r} - \dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\psi}\right] = 0, \\ \dfrac{\lambda+2\mu}{\sin\varphi}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\psi} + 2\mu\left[\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial(r\mathfrak{T}_2)}{\partial r}\right] = 0, \end{cases}$$

wo

$$(87) \qquad \begin{cases} \Theta = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\varkappa_1) + \dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\varkappa_2\sin\varphi) + \dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial\varkappa_3}{\partial\psi}, \\ 2\mathfrak{T}_1 = \dfrac{1}{r\sin\varphi}\left[\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\varkappa_3\sin\varphi) - \dfrac{\partial\varkappa_2}{\partial\psi}\right], \\ 2\mathfrak{T}_2 = \dfrac{1}{r\sin\varphi}\dfrac{\partial\varkappa_1}{\partial\psi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\varkappa_3), \\ 2\mathfrak{T}_3 = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r\varkappa_2) - \dfrac{\partial\varkappa_1}{\partial\varphi}\right]. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen Lösungen zu, die nur von r abhängen, sofern $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$. Für $\varkappa_1$ ergiebt sich:

$$(88) \qquad \varkappa_1 = ar + \frac{b}{r^2},$$

und die willkürlichen Konstanten a und b können unter Benutzung der Formel für die radiale Normalspannung:

$$-\varphi_1 = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\varkappa_1}{\partial r} + 2\lambda\frac{\varkappa_1}{r}$$

so bestimmt werden, dass auf zwei konzentrische Kugeln konstante

45) *G. Lamé*, Élasticité, p. 195.

Normaldrucke wirken[46]). Die Verallgemeinerung der Lösung auf den Fall kugelig-isotropen Materials[47]) hat *B. de Saint-Venant*[48]) gegeben.

Wirkt auf den Körper eine *radiale Massenkraft* ϱF_1, so geht die erste der Gleichungen (86), wenn Abhängigkeit von r allein vorausgesetzt wird, über in

(89) $$(\lambda + 2\mu)\frac{d\Theta}{dr} + \varrho F_1 = 0.$$

Handelt es sich z. B. um die gegenseitige Gravitation der Teilchen einer Kugel vom Radius r_0, so ist $F_1 = -g\frac{r}{r_0}$, wo g eine Konstante, und die Lösung von (89) ist

(90) $$\varkappa_1 = ar + \frac{b}{r^2} + \frac{g\varrho}{10(\lambda+2\mu)r_0}r^3.$$

Da die Verschiebung in $r = 0$ nicht unendlich werden darf, muss b verschwinden; a kann dann etwa so bestimmt werden, dass die Oberfläche $r = r_0$ spannungsfrei ist[49]).

Die *thermischen Deformationen* einer Kugel, in der die Temperatur τ nur eine Funktion des Radius ist, behandeln *Fr. Neumann*[42]), *C. W. Borchardt*[50]), *J. Hopkinson*[51])und *A. V. Leon*[52]). Die in Betracht kommenden Gleichungen erhält man, wenn man in (89) die Massenkraft

$$\varrho F_1 = -k(3\lambda + 2\mu)\frac{d\tau}{dr}$$

setzt und normale Oberflächendrucke von der Grösse $k(3\lambda + 2\mu)\tau_0$ bezw. $k(3\lambda + 2\mu)\tau_1$ einführt, unter τ_0, τ_1 die Temperaturen auf den Kugelflächen $r = r_0$ und $r = r_1$ verstanden. Die Lösung ist

(91) $$r^2\varkappa_1 = \frac{k(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\int_{r_0}^{r_1}\tau r^2 dr + \alpha r^3 + \beta,$$

wo α, β Konstanten, die sich durch τ_0, τ_1 bestimmen.

11. Zweidimensionale Probleme: Allgemeine Integrationstheorie.

11a. Ebene Deformation. Man spricht von einer *ebenen Deformation* parallel zur xy-Ebene, wenn die Verschiebung w verschwindet

46) *G. Lamé* und *E. Clapeyron*, J. de math. 7 (1831), p. 396.

47) d. h. eines Materials, bei dem die von einem Punkte eines Radiusvektors auslaufenden zu ihm senkrechten Strahlen elastisch gleichwertig sind.

48) J. de math. (2) 10 (1865), p. 297.

49) *C. Chree*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 14 (1889), p. 250.

50) *C. W. Borchardt*, Berlin Monatsber. 1873, p. 9 = Ges. Werke, p. 245.

51) Mess. of math. 8 (1879), p. 168 = Orig. papers 2, p. 357.

52) Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 174.

und die Verschiebungskomponenten u, v Funktionen von x, y allein sind. In diesem Falle ist $x_z = y_z = z_z = 0$, und die Spannungsgleichungen lauten, wenn keine Massenkräfte wirken:

(92)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen folgt die zuerst von *G. B. Airy*[53]) bemerkte Tatsache, dass die *Spannungskomponenten* X_x, Y_y, X_y sich in der Form:

(92')
$$X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

aus einer *Spannungsfunktion* χ ableiten, für die im Falle der Isotropie aus der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 x_y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2}$$

sich die Gleichung

(93)
$$\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta}\chi = 0$$ [54])

ergiebt, wo

$$\underset{xy}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

gesetzt ist (vgl. IV 23, Nr. 3b, *C. H. Müller-A. Timpe*).

Die Randbedingungen lassen sich nach *J. H. Michell*[55]) für einen zur z-Axe parallelen Zylinder, der längs seiner Erzeugenden gleichmässig und senkrecht zur z-Richtung beansprucht und dessen Länge konstant gehalten wird, folgendermassen in χ ausdrücken:

(94)
$$\begin{cases} \bar{\chi} = \displaystyle\int_0^s \left[\frac{dy}{ds}\int_0^s X_n ds - \frac{dx}{ds}\int_0^s Y_n ds\right] ds + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \dfrac{d\bar{\chi}}{dn} = \dfrac{dx}{ds}\displaystyle\int_0^s X_n ds + \dfrac{dy}{ds}\int_0^s Y_n ds - \alpha\frac{dy}{ds} + \beta\frac{dx}{ds}, \end{cases}$$

wo s die Bogenlänge der Randkurve und α, β, γ Konstanten[56]).

---

53) Brit. Assoc. Report 1862, p. 82; London Phil. Trans. 53 (1863), p. 49.

54) *J. Cl. Maxwell*, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 26 (1872) [1870], p. 1 = Scientific papers 2, p. 161; *M. Lévy*, Paris C. R. 26 (1898), p. 1236; *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100. Für anisotrope Körper wurde die entsprechende Differentialgleichung aufgestellt von *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. (3) 29 (1886), p. 604.

55) Lond. Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100.

56) Bei einfach zusammenhängenden Querschnittsgebieten können diese

Führt man die Beziehungen zwischen Spannung und Formänderung in die Gleichungen (92) ein, so nehmen diese die Gestalt an:

$$(95)\quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} - 2\mu \dfrac{\partial \varpi_3}{\partial y} = 0, \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + 2\mu \dfrac{\partial \varpi_3}{\partial x} = 0. \end{cases}$$ [57]

Es folgt hieraus, dass $(\lambda + 2\mu)\Theta + i2\mu\varpi_3$ eine Funktion von $x + iy$ ist. Setzt man

$$(96)\quad \xi + i\eta = \int \{(\lambda + 2\mu)\Theta + i2\mu\varpi_3\}\, d(x + iy)$$

und berücksichtigt, dass $\underset{xy}{\Delta}\chi = X_x + Y_y = -2(\lambda + \mu)\Theta$, so ergeben sich für die *Verschiebungen* die Formeln:

$$(97)\quad 2\mu u = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \xi, \quad 2\mu v = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \eta.$$

Dieselben bestimmen u und v, wenn χ bekannt ist.

Durch die Substitution

$$(98)\quad x' = k\frac{x}{r^2}, \quad y' = k\frac{y}{r^2}, \quad \chi' = \frac{\chi}{r^2},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2$ und k eine Konstante, geht die Differentialgleichung

$$\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta}\chi = 0,$$

wie *T. Levi-Civita* [58]) und *J. H. Michell* [59]) zeigen, in die Gleichung

$$\underset{x'y'}{\Delta}\underset{x'y'}{\Delta}\chi' = 0$$

über; die Funktion χ' definiert daher ebenso wie χ einen Zustand ebener Formänderung. Nach *Michell* [60]) ist der Zusammenhang zwischen den beiden, durch „Inversion" aus einander hervorgehenden Spannungsverteilungen einfach folgender: Auf korrespondierende Linienelemente ds und $ds' = \frac{ds}{r^2}$ wirkt die gleiche Spannung in korrespondierender Richtung, wenn von einer Normalspannung $2\left(\chi - r\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)$ auf ds' abgesehen wird. Spannungstrajektorien (d. h. Linien, auf die nur normale

---

beliebig gewählt werden, bei mehrfach zusammenhängenden sind die einzelnen Konstantentripel durch die Bedingungen verknüpft, die sich aus der Forderung der Eindeutigkeit der Verschiebungen ergeben.

57) *A. E. H. Love,* Elasticity, 1. Aufl. 1, p. 334. Vgl. *W. Thomson* u. *P. G. Tait,* Nat. Phil. 2, p. 297; *G. Lauricella,* Nuovo Cim. (4) 1 (1895), p. 87; *T. Boggio,* Torino Rend. 35 (1900), p. 3.

58) Sopra una trasform. in se stessa della equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$, Venezia 1898.

59) London Math. Soc. Proc. 34 (1901/02), p. 223.

60) loc. cit.

Spannungen wirken) gehen bei der Inversion in Spannungstrajektorien über; insbesondere geht ein durch gleichförmige Normalspannung beanspruchter Rand (z. B. ein spannungsfreier Rand) stets wieder in einen unter gleichförmiger Normalspannung stehenden Rand über.

11b. Ebener Spannungszustand. Man spricht von einem *ebenen Spannungszustand* im xy-Gebiete, wenn die Spannungskomponenten X_z, Y_z, Z_z verschwinden. *A. Clebsch*[61]) hat für diesen Fall die allgemeine Form der Lösung angegeben. Indem er die Relationen $X_z = Y_z = Z_z = 0$ in die Beziehungen zwischen den Spannungen und Formänderungen einführt, findet er mit Hilfe der Hauptgleichungen als allgemeinen Ausdruck für die Dilatation Θ:

$$\Theta = \Theta_0(x, y) + \alpha z - \beta \frac{z^2}{2},$$

wo α, β Konstanten und Θ_0 eine Lösung der Gleichung $\underset{xy}{\Delta} \Theta_0 = \beta$ ist. Für die Verschiebungen ergiebt sich dann:

$$(99) \quad \begin{cases} u = \mathfrak{u} - z\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\lambda + 2\mu}{4\mu}\alpha x\right) + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\dfrac{z^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right), \\ v = \mathfrak{v} - z\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\lambda + 2\mu}{4\mu}\alpha y\right) + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\dfrac{z^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right), \\ w = f(x, y) - \dfrac{\lambda + 2\mu}{4\mu}\alpha\dfrac{x^2 + y^2}{2} - \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right) - \dfrac{\lambda}{2\mu}\alpha\dfrac{z^2}{2}; \end{cases}$$

hierin müssen f, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ den Gleichungen genügen:

$$(100) \qquad \underset{xy}{\Delta} f = 0,$$

$$(101) \quad \begin{cases} (\lambda' + \mu)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right) + \mu \underset{xy}{\Delta} \mathfrak{u} = 0, \\ (\lambda' + \mu)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right) + \mu \underset{xy}{\Delta} \mathfrak{v} = 0. \end{cases} \qquad \lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Der Form (99) der Verschiebungen entsprechend müssen die Randbedingungen (z. B. für eine zur xy-Ebene parallele *Platte*) in spezieller Weise vorgeschrieben sein.

Besonders wichtig ist die von *J. H. Michell*[62]) gegebene Anwendung auf die *elastische Scheibe*, bei der die Glieder in z^2 als vernachlässigbar angesehen werden. Setzt man den Verschiebungszustand als symmetrisch zur Ebene $z = 0$ voraus, so müssen auch die von f und α abhängenden Terme verschwinden, und man erhält:

61) Elastizität, § 39.

62) London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100.

$u = \mathfrak{u}(x, y)$, $v = \mathfrak{v}(x, y)$. Die Gleichungen (101) werden daher wesentlich identisch mit den Spannungsgleichungen (92), die durch den Ansatz mit der *Airy*schen Spannungsfunktion $\chi(x, y)$ befriedigt werden. Kombiniert man diesen Ansatz mit den Gleichungen (101), so wird man wieder auf die Differentialgleichung (93) geführt, und das Problem reduziert sich auf das der ebenen Deformation.

Diese Reduktion gilt, wie *L. N. G. Filon*[63]) gezeigt hat, in gewissem Sinne auch für den sog. *verallgemeinerten ebenen Spannungszustand*, bei dem zwar Z_z im ganzen Körper null ist, X_z und Y_z aber nur für $z = \pm h$ verschwinden. In der Tat gelten hier für die zwischen $z = +h$ und $z = -h$ genommenen *Mittelwerte* der Spannungen und Verschiebungen Gleichungen, die in der Form genau mit (92) und (101) übereinstimmen.

Damit ist also ausser dem Problem des gleichmässig beanspruchten unendlichen Zylinders (Nr. **11** a) auch das der durch Randkräfte in ihrer Ebene beanspruchten elastischen Scheibe, mit gemeinsamem Namen kurzweg als *das ebene Problem* bezeichnet, auf die Integration der Differentialgleichung

$$\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta}\chi = 0$$

bei gegebenen Randwerten von χ und $\frac{d\chi}{dn}$ zurückgeführt. Diese Randwertaufgabe ist für eine ziemlich grosse Zahl von Gebieten gelöst: für die von einer Geraden begrenzte Halbebene[64]), für den von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifen[65]), den Kreis[66]), den Kreisring[67]), die durch Polynome[68]), allgemeiner durch rationale Funktionen[69]) auf den Kreis konform abbildbaren Gebiete und für die Ellipse[70]). Für den Kreisring z. B. hat χ die Form:

---

63) London Phil. Trans. (A) 201 (1903), p. 63.

64) *E. Almansi*, Torino Atti 31 (1895), p. 881; *G. Lauricella*, Torino Mem. (2) 46 (1896), p. 65.

65) *O. Venske*, Gött. Nachr. 1891, p. 27. Vgl. *A. Timpe*, Diss. Göttingen 1905 = Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 348.

66) *E. Almansi*, Torino Atti 31 (1895), p. 881; *G. Lauricella*, Torino Atti 31 (1895), p. 1010.

67) *O. Venske*, Gött. Nachr. 1891, p. 27; *E. Almansi*, Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 1; *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100. Die Diskussion des entsprechenden Spannungsproblems betreffend s. *A. Timpe*, Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 348.

68) *E. Almansi*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 9^1 (1900), p. 298; Palermo Rend. 13 (1899), p. 225.

69) *T. Boggio*, Veneto Ist. Atti 61^2 (1902), p. 619.

70) *T. Boggio*, Veneto Ist. Atti 60^2 (1901), p. 591. — Eine nicht auf die

$$(102)\quad \begin{cases} \chi = A_0 r^2 + B_0 r^2 (\lg r - 1) + C_0 \lg r + D_0 \psi \\ \quad + (A_1 r + B_1 r^{-1} + B_1' \psi r + C_1 r^3 + D_1 r \lg r) \cos \psi \\ \quad + (E_1 r + F_1 r^{-1} + F_1' \psi r + G_1 r^3 + H_1 r \lg r) \sin \psi \\ \quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2}) \cos n\psi \\ \quad + \sum_{n=2}^{\infty} (E_n r^n + F_n r^{-n} + G_n r^{n+2} + H_n r^{-n+2}) \sin n\psi. \end{cases}$$

Das Verfahren lässt sich verallgemeinern auf den Fall, dass Massenkräfte wirken, die ein Potential besitzen[71]), und auf den Fall der thermischen Deformationen[72]).

11c. Axensymmetrische Deformation. Wenn bei der Deformation eines Körpers die Verschiebung in den durch die z-Axe gelegten Ebenen stattfindet und in allen diesen Ebenen die gleiche ist, so lassen sich alle Grössen mit Hilfe einer einzigen Spannungsfunktion ausdrücken. Die Spannungsgleichungen, bezogen auf Zylinderkoordinaten unter Anwendung der Bezeichnungen: Θ_1, Θ_2, Θ_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3, für die Spannungskomponenten (vgl. IV 24, Nr. **1**, *O. Tedone*) lauten:

$$(103)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial r} + \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial z} + \dfrac{\Theta_1 - \Theta_2}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial r} + \dfrac{\partial \Theta_3}{\partial z} + \dfrac{\Omega_2}{r} = 0. \end{cases}$$

Um ihnen und den Kompatibilitätsbedingungen zu genügen, kann man, wie *A. E. H. Love*[73]) zeigt, den Ansatz machen:

$$(104)\quad \begin{cases} \Theta_1 = \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\eta \Delta \chi - \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}\right\}, \\ \Theta_2 = \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\eta \Delta \chi - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \chi}{\partial r}\right\}, \\ \Theta_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\eta) \Delta \chi - \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right\}, \\ \Omega_2 = -\eta \dfrac{\partial}{\partial r} \Delta \chi + \dfrac{\partial^3 \chi}{\partial r^3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \chi}{\partial r}, \end{cases}$$

wo η die *Poisson*sche Konstante (IV 24, Nr. **2** c, *O. Tedone*) und $\chi(r, z)$

Funktion χ gegründete Lösung des Spannungsproblems für die Ellipse giebt *O. Tedone*, Torino Atti 41 (1905), p. 86.

71) *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100.

72) *T. Boggio*, Torino Atti 40 (1905), p. 219. Das Problem der thermischen Deformationen einer Kreisschreibe war nach einem anderen Verfahren gelöst von *C. W. Borchardt*, Berlin Ber. 1873, p. 9 = Ges. Werke, p. 245.

73) Elasticity, 2. Aufl., p. 260; Elastizität, p. 314.

eine Lösung der Differentialgleichung

(105) $$\Delta\Delta\chi = 0.$$

Die Verschiebung drückt sich dann aus durch

(106) $$\begin{cases} \varkappa_1 = \frac{1+\eta}{E}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z}, \\ \varkappa_2 = 0, \\ \varkappa_3 = -\frac{1+\eta}{E}\left\{(1-2\eta)\Delta\chi + \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right\}, \end{cases}$$

wo E der *Young*sche Elastizitätsmodul ist.

Einen anderen Ansatz, bei dem ebenfalls alle Grössen auf eine Spannungsfunktion zurückgeführt werden, giebt *J. H. Michell*[74]).

12. Einfache Polynome als Lösungen der elastischen Gleichungen.

12a. Lösungen in zwei Dimensionen. Im Falle der ebenen Deformation (bezw. der ebenen Spannung in einer Scheibe) hat *A. Mesnager*[75]) die allgemeine Form der durch Polynome dargestellten Lösungen der elastischen Gleichungen angegeben. Setzt man als *Airy*sche Spannungsfunktion $\chi(x, y)$ ein Polynom beliebigen Grades an, so ergeben sich aus der Differentialgleichung $\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta}\chi = 0$ gewisse Beziehungen zwischen den Koeffizienten dieses Polynoms, und man erhält für die Spannungskomponenten die Ausdrücke:

(107) $$\begin{cases} X_x = \cdots + a_n x^n - (2a_n + a_n'')\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + - \cdots \\ \qquad + a_n' n x^{n-1}y - (2a_n' + a_n''')\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + - \cdots, \\ Y_y = \cdots + a_n'' x^n + a_n \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 \\ \qquad - (2a_n + a_n'')\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4 + - \cdots \\ \qquad + a_n''' n x^{n-1}y + a_n' \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 - + \cdots, \\ X_y = \cdots - a_n''' x^n - a_n' \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 \\ \qquad + (2a_n' + a_n''')\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4 + - \cdots \\ \qquad - a_n n x^{n-1}y + (2a_n + a_n'')\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 - + \cdots. \end{cases}$$

(Das Bildungsgesetz der einzelnen Ausdrücke betreffend ist zu bemerken, dass bei X_x vom ersten, bei Y_y, X_y vom zweiten Gliede

74) London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 144.

75) Paris C. R. 132 (1901), p. 1475.

jeder Gruppe ab das Vorzeichen alterniert, während der Klammerkoeffizient jedesmal um $a_n + a_n''$ bezw. $a_n' + a_n'''$ wächst.)

Die Lösungen (107) lassen sich anwenden auf das Problem der Deformation *des von zwei Ebenen* (bezw. Geraden) $y = \text{const.}$ *begrenzten ebenen Systems,* wenn die Belastungen als ganze algebraische Funktionen von x gegeben sind. Die Polynome vom Grade 0, 1, 2 entsprechen dem Fall des *einfachen Zugs,* der *Biegung durch Endmomente* und der *Biegung durch eine Querkraft*[76]), das Polynom 3. Grades liefert den Fall des *gleichförmig belasteten Streifens,* für den die Lösung, ausgedrückt in den Verschiebungen, lautet:

$$(108)\quad \begin{cases} u = \frac{k}{4\mu(\lambda+\mu)}\{xy[\lambda + 2\mu)(x^2 - 3a^2) - (3\lambda + 4\mu)y^2 + 3\lambda b^2] + 2\lambda b^3 x\}, \\ v = \frac{k}{4\mu(\lambda+\mu)}\Big\{(3\lambda + 2\mu)\frac{y^4}{3} - \frac{3}{2}y^2[(\lambda + 2\mu)b^2 + \lambda(x^2 - a^2)] \\ \quad - 2(\lambda + 2\mu)b^3 y + \frac{3}{2}x^2[(\lambda + 2\mu)a^2 + (3\lambda + 4\mu)b^2 - (\lambda + 2\mu)\frac{x^4}{4}\Big\}; \end{cases}$$

als Befestigungsbedingungen sind dabei $u = v = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ für $x = y = 0$ gewählt. Die Polynome 4. und 5. Grades entsprechen dem Fall der *linear* bezw. *quadratisch wachsenden Belastung* u. s. w.[77]).

12b. Lösungen in drei Dimensionen. *α*) Der einfachste Fall ist der der sog. *homogenen Deformationen*[78]), wo die Formänderungs- und Spannungskomponenten im ganzen Körper konstant sind, während die Massenkräfte verschwinden.

Ist z. B. $X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0$, $Z_z = -T$, so wird für isotrope Körper

$$(109)\quad \begin{aligned} x_x = y_y &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}T = -\frac{\eta}{E}T, \\ z_z = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}T &= \frac{1}{E}T, \quad y_z = z_x = x_y = 0, \end{aligned}$$

wo wieder E der *Young*sche Modul und η die *Poisson*sche Konstante; mithin

$$(110)\quad u = -\frac{\eta}{E}Tx, \quad v = -\frac{\eta}{E}Ty, \quad w = \frac{T}{E}z.$$

Besitzt das Material in jedem Punkt drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen, so kann man allgemeiner schreiben:

---

76) *B. de Saint-Venant* in *Clebsch-St. Venant*, Élasticité, Note du § 45.

77) Vgl. *A. Timpe*, Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 348. Daselbst sind auch diejenigen einfachen Lösungen untersucht, die sich durch Inversion (vgl. Nr. **11**a) aus den Polynomlösungen ergeben.

78) *G. Kirchhoff,* Mechanik, p. 395.

$$u = -\frac{\eta_1 T}{E} x, \quad v = -\frac{\eta_2 T}{E} y, \quad w = \frac{T}{E} z.$$

Die Lösungen (109) und (110) entsprechen einem durch *longitudinalen Zug T beanspruchten Stab.*

Hat man $X_x = Y_y = Z_z = p$, $Y_z = Z_x = X_y = 0$, so wird für isotrope Körper

$$(111) \quad \begin{cases} x_x = y_y = z_z = -p/(3\lambda + 2\mu) = -p/3k, \\ y_z = z_x = x_y = 0, \end{cases}$$

$$(112) \quad u = -\frac{p}{3k} x, \quad v = -\frac{p}{3k} y, \quad w = -\frac{p}{3k} z.$$

Diese Lösung entspricht dem Fall eines durch *allseitig gleichförmigen Druck p* komprimierten Körpers; die kubische Kompression ist p/k, wo $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ der *Kompressionsmodul.*

β) Der nächst einfache Fall ist der der *linear veränderlichen Spannung,* wo die Massenkräfte konstant sind und die Spannungs- oder Formänderungskomponenten als lineare Funktionen der Koordinaten angesetzt werden; für die Koeffizienten ergeben sich dabei aus den Hauptgleichungen drei lineare Beziehungen. Es handle sich etwa um einen *der Schwere unterworfenen Körper,* so dass $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$. Die Hauptgleichungen werden dann z. B., wie *C. Chree* [79]) bemerkt, befriedigt durch

$$(113) \quad \begin{cases} X_x = Y_y = p - g\varrho' z, \quad Z_z = p + g(\varrho' - \varrho)l - g\varrho z, \\ \qquad Y_z = Z_x = X_y = 0. \end{cases}$$

Diese Lösung lässt sich anwenden auf ein Prisma von der Dichte ϱ und der Länge $2l$, das in eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ' eingetaucht ist; p ist der Druck in Höhe $z = 0$. Wird das obere Ende $z = l$ festgehalten, so ist die Verschiebung im Falle isotropen Materials gegeben durch

$$(114) \quad \begin{cases} \frac{u}{x} = \frac{v}{y} = -\frac{1}{E}[(1-2\eta)p + \eta g(\varrho - \varrho')l + g\{\eta\varrho - (1-\eta)\varrho'\}z], \\ w = -\frac{z-l}{E}[(1-2\eta)p - g(\varrho - \varrho')l] + \frac{1}{2}g(\varrho - 2\eta\varrho')(z^2 - l^2) \\ \qquad + \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{E} \cdot g\{\eta\varrho - (1-\eta)\varrho'\}. \end{cases}$$

Ein anderer, sehr wichtiger Fall ist gegeben durch [80])

$$(115) \quad \begin{cases} X = Y = Z = 0, \\ X_x = Y_y = Y_z = Z_x = X_y = 0, \quad Z_z = \varkappa E x. \end{cases}$$

---

79) Phil. Mag. (6) 2 (1901), p. 532.

80) *B. de Saint-Venant,* Paris Mém. des sav. étr. 14 (1855), p. 233.

Das Material besitze in jedem Punkte drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen. Die Verschiebungen sind dann

$$(116)\qquad u = \frac{\varkappa}{2}(z^2 + \eta_1 x^2 - \eta_2 y^2), \quad v = \varkappa \eta_2 x y, \quad w = -\varkappa x z.$$

Angewendet auf ein zur z-Axe paralleles Prisma stellt diese Lösung den Fall einer *gleichförmigen Biegung*, nämlich der Biegung durch um die y-Axe wirkende Momente vom Betrage $\varkappa EI$ dar, wo I das auf die y-Axe bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts, vorausgesetzt, dass die z-Axe mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnitte, der sog. *Zentrallinie des Stabes*, und die x- und die y-Axe mit den Hauptträgheitsaxen derselben zusammenfallen. Die Zentrallinie geht durch die Biegung in die Kurve $u = \frac{\varkappa}{2} z^2$, also annähernd in einen Kreisbogen vom Radius $\frac{1}{\varkappa}$ über, die Querschnitte bleiben eben; die Ebenen $y =$ const. bleiben eben, erhalten aber eine Neigung gegen die xz-Ebene, die sog. Biegungsebene, während die Ebenen $x =$ const. eine negative Krümmung annehmen. Man bemerkt, dass das *Biegungsmoment* $\varkappa EI$ der Krümmung $\varkappa$ der Zentrallinie proportional ist.

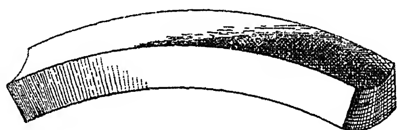


Fig. 1.

Eine systematische Untersuchung der durch *höhere Polynome* dargestellten Deformationen liegt nicht vor.

13. Balkentheorie im Besonderen.

13a. Historische Bemerkungen. Unter einem Balken versteht man einen Zylinder, dessen Querschnittsabmessungen klein sind gegen die Höhe (die „Balkenlänge"), aber immerhin gross gegen die bei irgend welcher in Betracht kommenden Deformation auftretenden Verschiebungen. Der Begründer der auf die Grundgleichungen der Elastizität gestützten Theorie der Torsion und Biegung solcher Prismen oder Zylinder ist *B. de St.-Venant*[81]).

81) *B. de Saint-Venant,* Paris Mém. prés. par. div. sav. 14 (1855), p. 233 (Torsion) und J. de math. (2) 1 (1856), p. 89 (Flexion). Das Problem der Torsion eines rechteckigen Prismas hat schon *A. L. Cauchy,* Exerc. de math. 4 (1829) = Oeuvres (2) 9 (1891), p. 61 mit Hilfe der allgemeinen Theorie zu behandeln versucht. Seine Lösung benutzt jedoch Entwickelungen nach den Querschnittskoordinaten, für die er nicht im einzelnen die Convergenz untersucht und die jedenfalls nicht in allen Punkten des Querschnitts Geltung haben. Vgl. *B. de Saint-Venant* in *Navier,* Leçons 2, Appendice 4, p. 621—626.

Die Schwierigkeiten, die sich der allgemeinen Lösung des Problems für beliebige Randbedingungen entgegenstellen, vermied er mit Hilfe seiner „*semi-inversen*" Methode, in dem er nämlich von vornherein gewisse den älteren Balkentheorieen (von *Coulomb, L. Euler, D. Bernoulli, L. Navier*) entlehnte Voraussetzungen über die Natur des Spannungszustandes im Balken einführte und die auf diese Weise vereinfachten Gleichungen für verschiedene *Typen* von Randbedingungen integrierte. Die Anwendung des nach ihm sog. *Saint-Venantschen Prinzips* (vgl. Nr. **15**b) ergab dann die Möglichkeit, die gewonnenen verhältnismässig speziellen Lösungen für eine grosse Klasse der in Praxis wichtigen Fälle heranzuziehen. Nach diesem Prinzip kommt es nämlich, sofern die Länge des Balkens gross ist gegen seine Querschnittsabmessungen, nicht darauf an, Lösungen zu erhalten, die an den Endquerschnitten die wirklich dort auftretenden Spannungen liefern, sondern nur mit ihnen statisch äquivalente, d. h. es müssen nur die Resultanten und resultierenden Momente der durch die Lösung gegebenen Spannungen und der wirklich dort auftretenden für die Endquerschnitte gleich sein. Eine knappere, einfachere Darstellung der *Saint-Venant*schen Theorie gab *A. Clebsch*[82]).

Die Grundannahme der semi-inversen Methode ist, dass auf die zur Balkenaxe parallelen Ebenen keine normalen Spannungen wirken, d. h., wenn die Balkenaxe mit der z-Axe zusammenfällt, dass

$$X_x = Y_y = X_y = 0. \tag{117}$$

Kombiniert mit den Grundgleichungen und den Kompatibilitätsbedingungen führt diese Annahme auf die Lösung folgender vier Probleme:

1. *Einfache Dehnung* des Balkens durch an den Enden angreifende *Zugkräfte.*

2. *Gleichförmige Biegung* durch an den Enden wirkende *Momente.*

3. *Torsion.*

4. *Biegung* des eingemauerten Balkens durch eine am freien Ende angreifende *Querkraft.*

Eine andere Problemstellung legen *W. Voigt*[83]) und *J. H. Michell*[84]) zu Grunde, indem sie eine Voraussetzung über die Abhängigkeit des Spannungszustandes von der z-Koordinate einführen. Sollen nur an den Enden Kräfte angreifen, so führt nach *Voigt* die Annahme

---

82) *A. Clebsch,* Elastizität, § 22 ff.

83) Göttingen Abh. 34 (1887), math. Kl., p. 53; vgl. Ann. Phys. Chem. (3) 16 (1882), p. 273.

84) Quart. J. of math. 32 (1901), . 28.

a) *eines von z unabhängigen Spannungszustandes* auf folgende Fälle:

1. einfacher longitudinaler Zug;
2. einfache Biegung durch Endmomente in der xz- bezw. in der yz-Ebene;
3. Torsion;

während die Annahme

b) *eines von z linear abhängigen Spannungszustandes* überdies den Fall

4. der Biegung durch eine am Ende angreifende Querkraft liefert.

Die Voraussetzung

c) *eines von z quadratisch abhängigen Spannungszustandes* ergiebt nach *J. H. Michell* den Fall

5. des gleichmässig belasteten Balkens.

In den folgenden Nrn. werden die wesentlichen Schritte der Integration für isotrope Körper für die genannten Einzelfälle gegeben.

13b. Von z unabhängiger Spannungszustand (Einfacher Zug, gleichförmige Biegung, Torsion). Sind die Spannungs- und Formänderungskomponenten von z unabhängig, so lauten die Hauptgleichungen bei verschwindender Massenkraft:

$$(118) \quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0;$$

die Randbedingungen auf der zylindrischen Begrenzung sind:

$$(119) \quad \begin{cases} X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) = 0, \\ X_y \cos(nx) + Y_y \cos(ny) = 0, \\ X_z \cos(nx) + Y_z \cos(ny) = 0, \end{cases}$$

und die Kompatibilitätsbedingungen gehen über in:

$$(120) \quad \frac{\partial^2 z_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z_z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(121) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y_z}{\partial x} - \frac{\partial z_x}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y_z}{\partial x} - \frac{\partial z_x}{\partial y}\right) = 0,$$

$$(122) \quad \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 x_y}{\partial x \partial y} = 0.$$

Gleichung (120) zeigt, dass z_z die Form haben muss:

$$(123) \quad z_z = \varepsilon - \varkappa x - \varkappa' y,$$

wo $\varepsilon, \varkappa, \varkappa'$ Konstanten. Kombiniert mit den Gleichungen (118), (119)

führt diese Formel, wie durch einen einfachen Prozess gezeigt wird[85]), zu dem Resultat, dass die Relationen (117) bestehen müssen und dass daher

(124) $$x_x = -\eta z_z, \quad y_y = -\eta z_z, \quad x_y = 0.$$

Gleichung (122) ist nun identisch erfüllt. Die Gleichungen (121) liefern schliesslich

(125) $$z_x = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \qquad y_z = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right),$$

wo τ eine Konstante und Φ eine Funktion von x und y, die, der dritten der Gleichungen (118) und (119) zufolge, überall im Querschnitt der Gleichung

(126) $$\underset{xy}{\Delta} \Phi = 0$$

und auf dem Rande der Bedingung

(127) $$\frac{d\Phi}{dn} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y)$$

genügen muss. Aus (123), (124), (125) bestimmen sich die Verschiebungen.

1. Setzt man $\varkappa = \varkappa' = \tau = 0$, so ergiebt sich:

(128) $$z_z = \varepsilon, \quad x_x = y_y = -\eta\varepsilon, \quad y_z = z_x = x_y = 0;$$

diese Formeln entsprechen dem Fall des mit der Dehnung ε verbundenen *einfachen Zugs in der z-Richtung* (vgl. Nr. **12** b, α)).

2. Setzt man $\varepsilon = \varkappa' = \tau = 0$, so ergiebt sich:

(129) $$z_z = -\varkappa x, \quad x_x = y_y = \varkappa\eta x, \quad y_z = z_x = x_y = 0,$$

und diese Formeln stellen den in Nr. **12** b, β) diskutierten Fall der *gleichförmigen Biegung in der xz-Ebene* dar, wobei $\varkappa$ die Krümmung der Zentrallinie ($x = y = 0$) bedeutet. Entsprechend erhält man für $\varepsilon = \varkappa = \tau = 0$ den Fall der Biegung in der yz-Ebene.

3. Setzt man $\varepsilon = \varkappa = \varkappa' = 0$, so erhält man:

(130) $$z_x = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \quad y_z = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right), \quad x_x = y_y = z_z = x_y = 0,$$

wo Φ der Gleichung (126) und der Randbedingung (127) genügen muss; die entsprechende Verschiebung lautet:

(131) $$u = -\tau y z, \quad v = \tau z x, \quad w = \tau \Phi.$$

Die Lösung entspricht dem Fall der *Torsion*, da sämtliche über

85) Für äolotrope Körper hat *J. Boussinesq*, J. de math. (2) 16 (1871), p. 125, den entsprechenden Beweis unter der Voraussetzung geliefert, dass die xy-Ebene eine Symmetrieebene darstellt.

einen Querschnitt genommenen Resultanten und resultierenden Momente, ausser dem Moment um die z-Axe, verschwinden. Das letztere, das sog. „*Drillungsmoment*", hat den Betrag $C\tau$, wo

$$(132)\qquad C = \mu \iint \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \Phi}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dx\, dy;$$

man bezeichnet C als die *Drillungssteifigkeit*, τ als den *Drall* des Balkens.

Die Querschnitte bleiben im allgemeinen nicht eben, ihre Verwölbung w ist durch die Funktion Φ, die sog. „Torsionsfunktion", gegeben.

Die Aufgabe, die Funktion Φ der Gleichung (126) und der Randbedingung (127) gemäss zu bestimmen, hat *B. de Saint-Venant*[86]) für eine Reihe von Querschnittsformen, u. a. für die Ellipse, das Rechteck und das gleichseitige Dreieck, gelöst und die Lösungen sind von ihm eingehend diskutiert und graphisch erläutert worden. Nur beim Kreiszylinder bleiben die Querschnitte eben. In einspringenden Ecken wird die Schubspannung unendlich, in vorspringenden Ecken verschwindet sie; erstere sind daher schädlich, letztere wertlos. Weitere Lösungen gaben *A. G. Greenhill*[87]) (für den Kreissektor und das von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzte Gebiet) und *A. E. H. Love*[88]) (für den Ringsektor). Für die Bestimmung von Φ und die Diskussion der Lösung erweist sich die Einführung der zu Φ konjugierten harmonischen Funktion Ψ und die Betrachtung gewisser Analogien aus der Hydrodynamik[89]) als zweckmässig. Da die Randbedingung übergeht in

$$(133)\qquad \Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.},$$

so kann man z. B.[90]) die Funktion $\Psi' = \Psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ als Strömungsfunktion der Bewegung einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit in einem Zylinder von der vorgegebenen Querschnittsform interpretieren. Die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit stimmt nach Grösse und Richtung in jedem Punkte mit der auf den Querschnitt wirkenden Tangentialspannung überein, so dass die Strömungslinien

86) Paris Mém. sav. étr. 14 (1855), p. 233.

87) Mess. of math. 8 (1877), p. 89; 10 (1880), p. 83; Quart. J. of math. 16 (1879), p. 227.

88) Elasticity, 2. Aufl., p. 307 f.; Elastizität, p. 371 f.

89) Vgl. *A. G. Greenhill,* Encycl. Brit., 9. Aufl., Art. „Hydromechanics"; *Thomson-Tait,* Nat. Phil. 2, p. 242; *J. Boussinesq,* J. de math. (2) 16 (1871), p. 125.

90) Siehe *A. G. Greenhill,* loc. cit.

mit den „Schubspannungslinien“ zusammenfallen. Aus dieser Beziehung geht beispielsweise, wie *J. Larmor*[91]) gezeigt hat, hervor, dass die Spannung in der Nähe einer zur z-Axe parallelen zylindrischen Durchbohrung annähernd den doppelten Betrag haben kann wie an entfernteren Stellen. *L. Prandtl*[92]) bemerkt, dass die Fläche $z = \Psi'$ sich durch eine gleichmässig gespannte Membran, die den Querschnittsumriss zur Randkurve hat und auf die eine bestimmte zur Querschnittsebene senkrechte Spannung wirkt, realisieren lässt und so die wirkliche Messung der bei dem Torsionsproblem auftretenden Daten ermöglicht ist. In der Tat geben die Höhenlinien dieser Membran den Verlauf der Schubspannungslinien, das Gefäll liefert die Grösse der Spannung, und überdies stellt das von der Membran und der Randebene eingeschlossene Volumen die Drillungssteifigkeit C des Balkens dar.

Die Theorie der Torsion ist von *W. Voigt*[93]) auf *Prismen aus äolotropem Material* ausgedehnt worden, für die der Querschnitt Struktursymmetrieebene ist; die verallgemeinerte Theorie wurde von ihm zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten der in Frage kommenden Krystalle herangezogen. In dem schon von *B. de Saint-Venant*[94]) erörterten Fall, dass das Material drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen besitzt, von denen eine mit der Querschnittsebene zusammenfällt, gestalten sich die Formeln ähnlich wie im Falle der Isotropie, und die Differentialgleichung sowie die Randbedingung, die die hier in Betracht kommende Torsionsfunktion bestimmen, lassen sich auf die in jenem Fall geltende Form zurückführen.

13c. Von z linear abhängiger Spannungszustand. (Biegung durch Querkraft.) Die x- und die y-Axe seien die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen des Querschnitts. Setzt man alle Spannungs- und Formänderungskomponenten in der Gestalt an:

$$(134)\qquad \begin{cases} X_x = X_x^{(1)} z + X_x^{(0)}, \quad x_x = x_x^{(1)} z + x_x^{(0)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

so spalten sich die Grundgleichungen und die Kompatibilitätsbedingungen in Relationen zwischen den mit z proportionalen Gliedern und solche zwischen den von z unabhängigen Gliedern. Die ersteren stimmen, bis auf den sich heraushebenden Faktor z, mit den Formeln (118)—(122) überein und haben daher eine Lösung von der Form:

91) Phil. Mag. (5) 33 (1892), p. 70.
92) Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 758.
93) Ann. Phys. Chem. (3) 16 (1882), p. 294; (3) 29 (1886), p. 604.
94) Paris, Mém. prés. par div. sav. (1855).

$$(135)\quad \begin{cases} z_z^{(1)} = \varepsilon_1 - \varkappa_1 x - \varkappa_1' y, \\ x_x^{(1)} = y_y^{(1)} = -\eta z_z^{(1)}, \quad x_y^{(1)} = 0, \\ z_x^{(1)} = \tau_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \quad y_z^{(1)} = \tau_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right), \end{cases}$$

wo $\varepsilon_1, \varkappa_1, \varkappa_1', \tau_1$ Konstanten und Φ die Torsionsfunktion. Da aber aus statischen Gründen der in der z-Richtung resultierende Druck und das Moment um die z-Axe nicht mit z variieren dürfen, so müssen ε_1 und τ_1 verschwinden. Die Relationen zwischen den von z unabhängigen Gliedern ergeben dann: $X_x^{(0)} = Y_y^{(0)} = X_y^{(0)} = 0$, so dass wiederum die *Saint-Venant*sche Voraussetzung (117) gilt, und die Lösung drückt sich, wenn von den früher erledigten Fällen des einfachen Zugs und der einfachen Biegung abgesehen wird, folgendermassen aus:

$$(136)\quad \begin{cases} x_x^{(0)} = y_y^{(0)} = z_z^{(0)} = x_y^{(0)} = 0, \\ z_x^{(0)} = \varkappa_1 \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) y^2 \right\} \\ \qquad\qquad + \varkappa_1' \left\{ \frac{\partial \chi'}{\partial x} + (2+\eta) x y \right\} + \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \\ y_z^{(0)} = \varkappa_1 \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x} + (2+\eta) x y \right\} \\ \qquad\qquad + \varkappa_1' \left\{ \frac{\partial \chi'}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta y^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) x^2 \right\} + \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right); \end{cases}$$

hierin sind $\varkappa_1, \varkappa_1'$ Konstanten, Φ die Torsionsfunktion und χ, χ' Funktionen von x, y, die in jedem Punkte des Querschnitts der Gleichung

$$(137)\quad \underset{xy}{\Delta} \chi = 0 \quad \text{bezw.} \quad \underset{xy}{\Delta} \chi' = 0$$

und auf dem Rande beziehungsweise der Bedingung

$$(138)\quad \begin{cases} \frac{d\chi}{dn} = -\left\{ \frac{1}{2}\eta x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) y^2 \right\} \cos(x,n) - (2+\eta) x y \cos(y,n), \\ \frac{d\chi'}{dn} = -(2+\eta) x y \cos(x,n) - \left\{ \frac{1}{2}\eta y^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) x^2 \right\} \cos(y,n) \end{cases}$$

genügen.

Aus den Spannungen, die den mit τ multiplizierten Gliedern entsprechen, resultiert über den Querschnitt ein Moment um die z-Axe, und man kann τ so wählen, dass dies Moment gerade dasjenige Kräftepaar kompensiert, das aus den den übrigen Termen entsprechenden Spannungen resultiert. Setzt man $\varkappa_1' = 0$, so liefern die Spannungen für einen bestimmten Querschnitt eine in die Richtung der x-Axe fallende Resultante $W = EI \cdot \varkappa_1$, wo I das auf die y-Achse bezogene

Trägheitsmoment des Querschnitts, und ein Moment um die y-Axe vom Betrage $M = W(l - z)$, wo l eine Konstante. Es ergiebt sich also, dass die erhaltene Lösung dem Falle des *durch eine Querkraft W in der xz-Ebene gebogenen Balkens* von der Länge l entspricht[95]). Die Verschiebungen werden

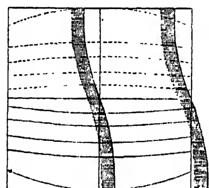
$$(139)\quad \begin{cases} u = \dfrac{W}{EI}\left[\dfrac{1}{2}(l-z)\eta(x^2-y^2) + \dfrac{1}{2}lz^2 - \dfrac{1}{6}z^3\right] - \tau yz + a_1 + p_2 z - p_3 y, \\ v = \dfrac{W}{EI}\eta(l-z)xy + \tau zx + a_2 + p_3 x - p_1 z, \\ w = -\dfrac{W}{EI}\left[x\left(lz - \dfrac{1}{2}z^2\right) + xy^2 + \chi\right] + \tau\Phi + a_3 + p_1 y - p_2 x, \end{cases}$$

wo a_1, a_2, a_3; p_1, p_2, p_3 Integrationskonstanten, die durch die „Befestigungsbedingungen" bestimmt werden. Wenn z. B. der Koordinatenanfang O, das von ihm in der y-Richtung auslaufende Linienelement und das ihn enthaltene Element der Ebene $z = 0$ festgehalten werden, so verschwinden a_1, a_2, a_3, p_1, p_3 (vorausgesetzt, dass man Φ und χ der Bedingung unterwirft, in O zu verschwinden), und p_2 bestimmt sich durch die Bedingung $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ für $x = y = z = 0$.

Die Querschnitte bleiben nicht eben und nicht senkrecht zur Zentrallinie. Ihre Gestalt im deformierten Zustand hängt ab von den Funktionen Φ und χ; ihre Neigung gegen die Zentrallinie ist durch

$$\frac{1}{2}\pi + \frac{W}{EI}\cdot\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_{x=y=0}$$

gegeben.


Fig. 2.

Die durch (137) und (138) definierte Funktion χ, die sog. *Biegungsfunktion,* hat *B. de Saint-Venant*[96]) für eine Reihe von Querschnittsformen, u. a. für den Kreis, die Ellipse und das Rechteck, bestimmt, und die Resultate sind von ihm wieder näher diskutiert und graphisch erläutert worden. Für das quadratische Prisma z. B. findet er die in Fig. 2 durch eine Reihe von Höhenlinien und zwei Vertikalschnitte dargestellte Form des deformierten Querschnitts. Für andere Gebiete haben *F. Grashof*[97]), *A. E. H. Love*[98]) die Biegungsfunktion bestimmt.

---

95) Analog würden die mit $\varkappa_1'$ multiplizierten Glieder den Fall der Biegung in der yz-Ebene repräsentieren, so dass die allgemeine Lösung (135), (136) der Biegung durch eine in beliebiger (nicht zu einer Hauptträgheitsaxe parallelen) Richtung angreifenden Last entspricht.

96) J. de math. (2) 1 (1856), p. 89.

97) *F. Grashof,* Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, p. 246.

98) *A. E. H. Love,* Elasticity, 2. Aufl., p. 322; Elastizität, p. 386.

Die Zentrallinie des Balkens geht durch die Biegung in die Kurve

$$u = \frac{W}{EI}\left(\frac{l}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3\right) + p_2 z, \quad v = 0 \tag{140}$$

über, ihre Krümmung ist

$$\frac{W}{EI}(l - z)$$

und daher dem Moment M, dem sog. *Biegungsmoment*, proportional, genau wie im Falle der gleichförmigen Biegung (Nr. **12** b, β)). Die zur Zentrallinie parallelen Fasern der Ebene $x = 0$ bleiben ungedehnt, man bezeichnet diese daher als die *neutrale Ebene*. Dieselbe geht durch die Biegung in eine negativ gekrümmte (antiklastische) Fläche über (vgl. Nr. **12** b, β)[99]). Zu beachten ist, dass der Balken auch einen gewissen Drall erfährt, wie das Auftreten der mit τ multiplizierten Glieder in (139) zeigt.

Die Theorie der Biegung eines Prismas durch transversale Endlast lässt sich auch auf den Fall ausdehnen, dass das Material *äolotrop* ist, falls nur die den Hauptträgheitsaxen parallelen Ebenen Struktursymmetrieebenen darstellen[100]).

13 d. **Von z quadratisch abhängiger Spannungszustand (gleichmässig belasteter Balken).** Setzt man alle Spannungs- und Formänderungskomponenten in der Gestalt an

$$\left\{\begin{array}{ll} X_x = X_x^{(2)} z^2 + X_x^{(1)} z + X_x^{(0)}, & x_x = x_x^{(2)} z^2 + x_x^{(1)} z + x_x^{(0)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{array}\right. \tag{141}$$

so spalten sich die Grundgleichungen und die Kompatibilitätsbedingungen in Relationen zwischen den mit z^2 proportionalen Gliedern, solche zwischen den in z linearen Gliedern und solche zwischen den von z unabhängigen Termen. Indem man mit diesen Relationen in ähnlicher Weise operiert wie mit den analogen Gleichungen unter Nr. **13** a und **13** b, gelangt man zu folgendem Resultat[101]): Die Formänderungskomponenten z_z, z_x, y_z sind gegeben durch

---

99) Auch in dem Falle, wo die Last in beliebiger Richtung angreift, geht die Zentrallinie, wie *Saint-Venant* (loc. cit.) gezeigt hat, in eine ebene Kurve über, deren Ebene zur neutralen Ebene senkrecht steht. Die Spuren der Lastebene und der neutralen Ebene auf dem Querschnitt sind konjugierte Durchmesser der zum Schwerpunkt gehörenden Trägheitsellipse des Querschnitts.

100) Vgl. *A. E. H. Love*, Elasticity, 2. Aufl., p. 330; Elastizität, p. 397.

101) *J. H. Michell*, Quart. J. of math. 32 (1901), p. 28.

$$
(142)\begin{cases}
z_z = \varepsilon_0 - (\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2)x - (\varkappa_0' + \varkappa_1' z + \varkappa_2' z^2)y \\
\qquad + 2\varkappa_2(\chi + xy^2) + 2\varkappa_2'(\chi' + x^2 y) + \tau_1 \Phi, \\
z_x = (\tau_0 + \tau_1 z)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) + (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z)\left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) y^2\right\} \\
\qquad + (\varkappa_1' + 2\varkappa_2' z)\left\{\frac{\partial \chi'}{\partial x} + (2+\eta)xy\right\}, \\
y_z = (\tau_0 + \tau_1 z)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) + (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z)\left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} + (2+\eta)xy\right\} \\
\qquad + (\varkappa_1' + 2\varkappa_2' z)\left\{\frac{\partial \chi'}{\partial y} + \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)x^2 + \frac{1}{2}\eta y^2\right\},
\end{cases}
$$

wo Φ die Torsionsfunktion und χ, χ' die der Biegung in der xz-Ebene bezw. in der yz-Ebene entsprechenden Biegungsfunktionen des Querschnitts; ferner ist

$$
(143)\qquad \begin{cases}
x_x^{(2)} = y_y^{(2)} = -\eta z_z^{(2)}; \quad x_y^{(2)} = 0, \\
x_x^{(1)} = y_y^{(1)} = -\eta z_z^{(1)}; \quad x_y^{(1)} = 0.
\end{cases}
$$

Andererseits bestimmen sich die Grössen $X_x^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$, $X_y^{(0)}$ durch Lösung eines Problems ebener Deformation. Setzt man nämlich

$$
X_x^{(0)} = -\lambda z_z^{(0)} + X_x', \quad Y_y^{(0)} = -\lambda z_z^{(0)} + Y_y',
$$

so sind X_x', Y_y', $X_y^{(0)}$ den Hauptgleichungen

$$
(144)\qquad \begin{cases}
\frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y} + \left[X_z^{(1)} - \lambda \frac{\partial z_z^{(0)}}{\partial x}\right] = 0, \\
\frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y} + \left[Y_z^{(1)} - \lambda \frac{\partial z_z^{(0)}}{\partial y}\right] = 0,
\end{cases}
$$

den Randbedingungen

$$
(145)\qquad \begin{cases}
X_x' \cos(x,n) + X_y^{(0)} \cos(y,n) = [X_n + \lambda z_z^{(0)} \cos(x,n)], \\
X_y^{(0)} \cos(x,n) + Y_y' \cos(y,n) = [Y_n + \lambda z_z^{(0)} \cos(y,n)]
\end{cases}
$$

und den Beziehungen

$$
(146)\qquad \begin{cases}
X_x' = -(\lambda + 2\mu)x_x^{(0)} - \lambda y_y^{(0)}, \\
Y_y' = -\lambda x_x^{(0)} - (\lambda + 2\mu) y_y^{(0)}, \\
X_y^{(0)} = -\mu x_y^{(0)};
\end{cases}
$$

$$
(147)\qquad \frac{\partial^2 x_x^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y^{(0)}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x_y^{(0)}}{\partial x \partial y}
$$

zu unterwerfen; die Grössen $X_z^{(1)}$, $Y_z^{(1)}$, $z_z^{(0)}$ dabei sind als bekannte. aus (142) zu entnehmende Grössen anzusehen.

Sind Φ, χ, χ' bestimmt und ist das Problem der ebenen Deformation gelöst, so geben obige Formeln die Lösung des Problems der *Biegung eines Balkens durch eine beliebige von z unabhängige Belastung.*

die keine Komponente in der z-Richtung besitzt. Sind W, W' die zur x- und zur y-Axe parallelen Komponenten der auf die Längeneinheit entfallenden resultierenden Last, so gilt

(148) $$\varkappa_2 = \frac{W}{2EI}, \quad \varkappa_2' = \frac{W'}{2EI'},$$

wo I, I' das auf die y-Axe bezw. auf die x-Axe bezogene Trägheitsmoment des Querschnitts. Der Drall des Balkens wird definiert durch die Grösse $\tau_0 + \tau_1 z$; liefern die am Mantel angreifenden äusseren Kräfte kein resultierendes Moment, so verschwindet τ_1.

Die Dehnung der Zentrallinie ist gleich ε_0; sie verschwindet nicht, wenn der resultierende longitudinale Druck verschwindet, die neutrale Fläche enthält daher die Zentrallinie nicht. Die Krümmung der Zentrallinie in der xz-Ebene ist gegeben durch $\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2$, diejenige in der yz-Ebene durch $\varkappa_0' + \varkappa_1' z + \varkappa_2' z^2$.

Das Biegungsmoment in der xz-Ebene drückt sich aus durch

(149) $$M = EI(\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2) + k,$$

wo k eine von den Bedingungen an den Enden abhängende Konstante; analog dasjenige in der yz-Ebene. Es zeigt sich also, dass das Biegungsmoment der Krümmung nicht mehr streng proportional ist, ein Resultat, das zuerst von *K. Pearson*[102]) vermerkt wurde und das für die Bewertung der üblichen Näherungstheorie für dünne Stäbe (Nr. **17**, sowie IV 27, *H. Reissner*) von Bedeutung ist.

Das Problem der *Biegung eines der Schwere unterworfenen Balkens* durch eine von z unabhängige beliebige Belastung wurde von *K. Pearson*[102]) mit Hilfe der semi-inversen Methode behandelt und für eine Reihe von Querschnittsformen, u. a. für den Kreis, die Ellipse und das Rechteck, vollständig gelöst. *E. Almansi*[103]) hat dasselbe Problem, jedoch ohne Berücksichtigung von Massenkräften, von den *Beltrami*schen Gleichungen (IV 24, Nr. 7a, *O. Tedone*) aus in Angriff genommen und die Lösung auf die Integration der Gleichung

$$\mathop{\Delta}_{xy}\mathop{\Delta}_{xy} \Phi = 0$$

bei gegebenen Randwerten von Φ und $\frac{d\Phi}{dn}$ zurückgeführt. Er verallgemeinert[104]) die Lösung auf den Fall, dass die auf den Mantel wirkenden Spannungen sich durch Polynome von folgender Form ausdrücken:

102) Quart. Journ. of math. 24 (1889), p. 63.
103) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 10^1 (1901), p. 400.
104) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 10^1 (1901), p. 333.

(150) $$X_n = \Sigma\, g_m z^m, \quad Y_n = \Sigma\, h_m z^m, \quad Z_m = \Sigma\, l_m z^m,$$

wo g_m, h_m, l_m beliebige Funktionen von x, y. Stellen nämlich u', v', w' eine den Randspannungen gz^m, hz^m, lz^m entsprechende Lösung der Gleichgewichtsgleichungen dar, so liefern

$$\begin{cases} u = (n+1)\left[\int\limits_0^z u'dz + u_1 - u_0\right], \\ v = (n+1)\left[\int\limits_0^z v'dz + v_1 - v_0\right], \\ w = (n+1)\left[\int\limits_0^z w'dz + w_2 - w_0\right] \end{cases}$$

eine den Randspannungen gz^{m+1}, hz^{m+1}, lz^{m+1} entsprechende Lösung; dabei bedeuten u_0, v_0, w_0 die von einer gewissen von z unabhängigen Belastung herrührenden Verschiebungen und u_1, v_1, w_1 beliebige partikuläre Lösungen der Gleichungen

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu \underset{xy}{\Delta} u_1 = -f_1, \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu \underset{xy}{\Delta} v_1 = -f_2, \\ \mu \underset{xy}{\Delta} w_1 = -f_3, \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 folgende, von z unabhängige Ausdrücke

$$\begin{cases} f_1 = (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \int\limits_0^z u'dz}{\partial x} + \frac{\partial \int\limits_0^z v'dz}{\partial y} + \frac{\partial \int\limits_0^z w'dz}{\partial z}\right\} + \mu\Delta \int\limits_0^z u'dz, \\ f_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sind. Da für $m = 0$ die Lösung bekannt ist, so kann man nach einander die Lösungen für $m = 1$, $m = 2, \ldots$ konstruieren und durch Superposition zur allgemeinen Lösung gelangen. Die Bedingungen an den Endflächen sind hinterher durch Überlagerung mit einer der in Nr. **13** b, c besprochenen Lösungen zu befriedigen.

14. Plattentheorie im Besonderen.

14a. Historische Bemerkungen. Unter einer Platte versteht man einen von zwei parallelen Ebenen $z = \pm h$ begrenzten zylin-

drischen Körper, dessen Höhe $2h$ (die „Plattendicke") klein ist gegen die Querschnittsabmessungen, aber immerhin groß gegen die bei irgendwelcher Deformation auftretenden Verschiebungen. Die Theorie dieser „dicken" Platten bildet daher in gewissem Sinne das Gegenstück zur Balkentheorie. Historisch ist jedoch ein wesentlicher Unterschied zu bemerken, insofern nämlich die Ableitung strenger Lösungen für Platten viel später datiert als diejenige für Balken und man deshalb lange auf Plattentheorien angewiesen war, die sich auf mehr oder minder anfechtbare Hypothesen gründeten.

Die erste Behandlung des Plattenproblems gab Mdlle. *S. Germain* (vgl. IV 23, Nr. **1**, *Müller-Timpe*) in den Arbeiten, die sie in den Jahren 1811, 1813, 1815 dem Pariser Institut zur Erlangung eines von diesem ausgesetzten Preises einreichte. Die Resultate der Arbeit vom Jahre 1811 waren falsch; aus der von ihr zugrunde gelegten Hypothese leitete aber *J. L. Lagrange*[106]), der zu den für die Prüfung der Arbeit ernannten Berichterstattern gehörte, noch in demselben Jahre die Differentialgleichung für die Durchbiegung w_0 der Mittelebene ($z = 0$) der Platte in der Form ab, wie sie die heute allgemein acceptierte *Näherungstheorie* liefert:

$$\underset{xy}{\Delta}\,\underset{xy}{\Delta}\, w_0 = f(xy). \tag{151}$$

In den Arbeiten von 1813 und 1815 gelangte dann *S. Germain* zu derselben Gleichung und ausserdem zu den Randbedingungen[107]). Den Ausgangspunkt ihrer Theorie bildet die von *G. Kirchhoff*[108]) als unrichtig erwiesene Annahme, dass der von der Biegung hervorgerufene elastische Widerstand an jeder Stelle der Summe der Hauptkrümmungen proportional sei; die Gleichgewichtsbedingung wird dann mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit ausgedrückt[109]).

Der erste, der mit Hilfe der Grundgleichungen der Elastizität das Problem der Platten behandelte, war *S. D. Poisson*[110]). Er nahm an, dass die Verschiebungen und die Spannungskomponenten sich nach Potenzen des Abstandes von der Mittelebene entwickeln lassen. Für den Fall, dass auf die Seiten $z = \pm h$ der Platte keine Kräfte wirken, fand er

---

106) Ann. chim. phys. 39 (1828), p. 149, 207.

107) Diese Untersuchungen hat die Verfasserin veröffentlicht in der Schrift „Recherches sur la théorie des surfaces élastiques", Paris 1821.

108) J. f. Math. 40 (1850), p. 51.

109) Eine ähnliche Plattentheorie gab *L. Navier*, Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 95.

110) Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 357. Eine auf spezielle Annahmen gegründete Ableitung der Gleichung der verbogenen Platte hatte *Poisson* bereits 1814 gegeben, Paris Mém. de l'Institut, 1812, 2. partie, p. 167.

als Näherungsresultat, dass die Verschiebungen der Punkte der Mittelebene in ihrer Ebene und senkrecht zu ihr sich gesondert behandeln lassen: für erstere gelten dieselben Gleichungen wie beim Problem der elastischen Scheibe (vgl. Nr. **11**b), für letztere ergiebt sich die *Lagrange*sche Gleichung (151)[111]). Was die Randbedingungen anbetrifft, so gelangte *Poisson* zu fünf mit folgenden Bedingungen äquivalenten Relationen:

$$(152)\quad \left\{\begin{array}{l} T=\int\limits_{-h}^{h} X_{x'}' dz, \quad S=\int\limits_{-h}^{h} Y_{x'}' dz, \quad N=\int\limits_{-h}^{h} Z_{x'} dz, \\ G=\int\limits_{-h}^{h} z X_{x'}' dz, \quad H=\int\limits_{-h}^{h} - z Y_{x'}' dz; \end{array}\right.$$

dieselben drücken aus, dass die zur Normale x' und zur Tangente y' der Randkurve und zur z-Richtung parallelen Komponenten T, S, N der am Rande angreifenden äußeren Kräfte und die um die Tangente und um die Normale wirkenden Kräftepaare G, H übereinstimmen mit den entsprechenden, aus den Spannungskomponenten $X_{x'}'$, $Y_{x'}'$, $Z_{x'}$ resultierenden Grössen. Diese Randbedingungen sind später von *G. Kirchhoff*[112]) als im allgemeinen nicht gleichzeitig erfüllbar angefochten und durch folgende vier ersetzt worden:

$$(153)\quad \left\{\begin{array}{l} T=\int\limits_{-h}^{h} X_{x'}' dz, \quad S=\int\limits_{-h}^{h} Y_{x'}' dz, \quad G=\int\limits_{-h}^{h} z X_{x'}' dz, \\ N-\frac{dH}{ds}=\int\limits_{-h}^{h} Z_{x'}' dz+\frac{d}{ds}\int\limits_{-h}^{h} z Y_{x'}' dz. \end{array}\right.$$

14b. Die Kirchhoffsche Näherungstheorie. Die *Kirchhoff*sche Theorie[112]) gründet sich auf folgende beiden, als Ergebnisse des Experiments angesehenen Voraussetzungen: 1. Jede gerade Linie der Platte, welche ursprünglich senkrecht auf der Mittelebene war, bleibt bei der Formänderung gerade und senkrecht auf den ursprünglich zur Mittelebene parallelen Ebenen; 2. die Elemente der Mittelebene erleiden bei der Formänderung keine Dehnung. Aus diesen beiden Annahmen gewinnt *Kirchhoff* einen von den Krümmungen der Mittelfläche abhängenden Ausdruck für die potentielle Energie der Platte und daraus unter Anwendung des *Hamilton*schen Prinzipes die (mit

111) Eine ähnliche Plattentheorie (unter Anwendung von *zwei* elastischen Konstanten) wurde von *A. L. Cauchy,* Exerc. de math. 3 (1828), p. 330 = Oeuvres (2) 8, p. 381, entwickelt.

112) J. f. Math. 40 (1850), p. 51.

der *Lagrange*schen Gleichung übereinstimmende) Differentialgleichung der verbogenen Mittelfläche und die Randbedingungen. Die Diskrepanz zwischen den *Poisson*schen und den *Kirchhoff*schen Randbedingungen hat in Frankreich zu einer umfangreichen Diskussion Anlass gegeben, bis *J. Boussinesq* dort die Streitfrage zugunsten *Kirchhoffs* entschied[113]). Das Gleiche hatten aber schon früher *W. Thomson* und *P. G. Tait*[114]) ausgeführt, indem sie zeigten, dass aus dem *Saint-Venant*schen Prinzip (Nr. **15**b) die Verschmelzung der beiden *Poisson*schen Bedingungen

$$N = \int_{-h}^{h} Z_{x'}\,dz, \quad H = \int_{-h}^{h} - z\,Y'_{x'}\,dz$$

zu der einen *Kirchhoff*schen Bedingung

$$N - \frac{dH}{ds} = \int_{-h}^{h} Z_{x'}\,dz + \frac{d}{ds}\int_{-h}^{h} z\,Y'_{x'}\,dz$$

folgt, da man eine Verteilung von Kräftepaaren H längs dem Rande geben kann, ohne dass damit nach innen eine merkliche Wirkung ausgeübt wird.

Die konsequente Anwendung der „Spannungsresultanten" und „Spannungsmomente", d. h. der für irgend einen Normalschnitt aus den Spannungen über die Plattendicke resultierenden Kräfte und Kräftepaare [vgl. (152)], rührt von *A. Clebsch*[115]) her. Beziehen sich T_1, S_1, N_1; G_1, H_1 auf einen zur x-Axe parallelen Schnitt, T_2, S_2, N_2; G_2, H_2 auf einen zur y-Axe parallelen Schnitt, so drücken sich die Gleichgewichtsbedingungen, da $S_2 = - S_1$, $H_2 = - H_1$ folgendermassen aus:

$$(154) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial x} + \dfrac{\partial S_1}{\partial y} + X' = 0, \\ \dfrac{\partial S_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_2}{\partial y} + Y' = 0, \end{cases}$$

113) *J. Boussinesq*, J. de math. (2) 16 (1871), p. 125; Paris C. R. 72 (1871), p. 407, 449 (die Arbeiten enthalten eine neue Ableitung der Lagrangeschen Differentialgleichung und der Kirchhoffschen Grenzbedingungen); *M. Lévy*, J. de math. (3) 3 (1877), p. 219; Paris C. R. 84 (1877), p. 596, 948; *G. Kirchhoff*, Paris C. R. 84 (1877), p. 740; *M. Lévy*, Paris C. R. 84 (1877), p. 942; *J. Boussinesq*, Paris C. R. 85 (1877), p. 1157; *M. Lévy*, Paris C. R. 85 (1877), p. 1277; *J. Boussinesq*, Paris C. R. 86 (1878), p. 108; *M. Lévy*, Paris C. R. 86 (1878), p. 304; *J. Boussinesq*, Paris C. R. 86 (1878), p. 461.

114) *W. Thomson-P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy 1867. Vgl. Nat. Phil. 2. Aufl. 2, Art. 645 ff.

115) Elastizität, § 69 ff.

$$(155)\qquad \frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+Z'=0,$$

$$(156)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial x}-\dfrac{\partial G_2}{\partial y}+N_2+L'=0,\\[2mm] \dfrac{\partial G_1}{\partial x}-\dfrac{\partial H_1}{\partial y}-N_1+M'=0,\end{cases}$$

wo X', Y', Z', L', M' die Komponenten der auf die Plattenelemente wirkenden, auf die Flächeneinheit der Mittelebene bezogenen äusseren Kräfte und Kräftepaare [116]). Die Gleichungen (154) kommen für die *Reckung* der Platte in ihrer Ebene, die Gleichungen (155) und (156) für die *Biegung* in Frage. Acceptiert man aus der *Kirchhoff*schen Theorie die Beziehungen zwischen den Krümmungen der Mittelebene und den Spannungsmomenten:

$$(157)\qquad \begin{cases} G_1=-D\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\eta\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right),\\[2mm] G_2=-D\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\eta\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right),\\[2mm] H_1=D(1-\eta)\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y},\end{cases}$$

wo

$$D=\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\eta^2}$$

die sogenannte „Biegungssteifigkeit“ der Platte, so ergibt die Kombination mit (155) und (156) folgende Gleichung für die Durchbiegung w_0 der Mittelebene:

$$(158)\qquad \mathop{\Delta\Delta}_{xy\,xy} w_0=\frac{1}{D}\left(Z'+\frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\partial L'}{\partial y}\right)\ {}^{117)}.$$

Es ist dies die präzise Form der *Lagrange*schen Gleichung. *W. Thomson* und *P. G. Tait* [118]) haben darauf hingewiesen, dass die Formeln (157) für den Fall der gleichförmigen Biegung sich aus der *Saint-Venant*schen Balkentheorie ableiten lassen. Ihre Rechtfertigung durch die strenge Theorie betreffend siehe weiter unten.

Das allgemeine Integral der Gleichung (158) wurde von *S. D. Poisson* [119]) angegeben; er leitete auch [120]) eine Reihe spezieller Lösungen

---

116) Die um die z-Axe wirkende Komponente N' des Kräftepaares muss verschwinden.

117) Siehe z. B. *W. Thomson-P. G. Tait,* Nat. Phil. 2, Art. 644, wo auch die erweiterte Gleichung für den Fall ungleicher Biegsamkeit.

118) Nat. Phil. 2, Art. 719.

119) Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 357. Vgl. *Thomson-Tait,* Nat. Phil. 2, Art. 649.

120) loc. cit.; vgl. *G. Kirchhoff,* J. f. Math. 40 (1850), p. 51.

(für verschiedene Belastungen und Auflagerbedingungen) für die Kreisscheibe ab. Weitere Lösungen gaben *C. H. L. Navier*[121]) (für das Rechteck), *E. Mathieu*[122]) (für den Kreis und die Ellipse), *B. de Saint-Venant*[123]) (für den Kreis), *M. Lévy*[124]) (für das Rechteck), *E. Estanave*[125]) (für das Rechteck), *J. Hadamard*[126]) (für den Kreis). Da eine partikuläre Lösung von (158) leicht angegeben werden kann, reduziert sich das Problem auf die Integration der Differentialgleichung $\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta} w_0 = 0$, zu der bereits in Nr. **11**b weitere Notizen gegeben sind. Zu bemerken ist noch, dass auch das Verfahren der Inversion, wie *J. H. Michell*[127]) gezeigt hat, im vorliegenden Fall anwendbar ist und die Ableitung neuer Lösungen gestattet.

14c. Die genauere Theorie. Die strenge Theorie der dicken Platten ist in ihren Grundzügen von *J. H. Michell*[128]) ausgebildet und im einzelnen von *A. E. H. Love*[129]) weiter ausgeführt worden. Dieselbe ruht im wesentlichen auf den mit den Spannungsgleichungen kombinierten *Beltrami*schen Gleichungen (IV 24, Nr. 7a, *O. Tedone*). Betrachtet man zunächst die Platte als unendlich ausgedehnt, so kann man eine die Randbedingungen auf $z = \pm h$ streng befriedigende Lösung finden (vgl. Nr. **1**). Giebt man dann der Platte die gewollte zylindrische Begrenzung, so hat man noch eine Lösung zu überlagern, die zusammen mit jener überall am Rande die vorgeschriebenen Spannungsresultanten und resultierenden Spannungsmomente liefert und für sich genommen die Plattenseiten spannungsfrei lässt. Eine solche Lösung kann stets durch einen verallgemeinerten ebenen Spannungszustand (vgl. Nr. **11**b) realisiert werden, wie nachstehend genauer auseinandergesetzt werden möge. Diese Behandlung des Plattenproblems entspricht damit genau dem *Saint-Venant*schen Problem in der Balkentheorie (vgl. Nr. **13**).

α) Es handle sich zunächst um die Lösung, die der *Reckung der Platte* in ihrer Ebene durch beliebige Randkräfte T, S entspricht. Diese Lösung wird stets durch einen ebenen Spannungszustand (Nr. **11**b) geliefert, wie zuerst von *A. Clebsch*[130]) gezeigt wurde. An-

121) Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 95.
122) J. de math. (2) 14 (1869), p. 378.
123) *Clebsch-Saint-Venant,* Elasticité, Note du § 45.
124) Paris C. R. 129 (1899), p. 535.
125) Ann. éc. norm. (3) 17 (1900), p. 295.
126) Ann. éc. norm. (3) 18 (1900), p. 313.
127) London Math. Soc. Proc. 34 (1902), p. 223.
128) London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100.
129) Elasticity, 2. Aufl., § 299 ff.
130) Elastizität, § 43.

knüpfend an *Clebsch* und abweichend von der allgemeinen Theorie *Michells* führt *T. Boggio*[131]) das Integrationssystem in folgender Weise auf das der ebenen Deformation zurück. Die Formeln (99) gehen bei Annahme eines zur Ebene $z = 0$ symmetrischen Spannungszustandes über in

$$(159)\quad \begin{cases} u = \mathfrak{u} + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\dfrac{z^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right), \\ v = \mathfrak{v} + \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\dfrac{z^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right), \\ w = \quad - \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z \left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(160)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = -\lambda'\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right) - 2\mu\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \\ \mathfrak{Y}_y = -\lambda'\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}\right) - 2\mu\dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}, \\ \mathfrak{X}_y = -\mu\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right), \end{cases}$$

so lassen sich die Gleichungen (101) schreiben:

$$(161)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{X}_y}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_y}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

so dass

$$(162)\quad \mathfrak{X}_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \mathfrak{Y}_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \mathfrak{X}_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

gesetzt werden kann. Mittels (160) ergibt sich

$$(163)\quad \underset{xyxy}{\Delta\Delta}\chi = 0.$$

Die Randbedingungen drücken sich aus durch

$$(164)\quad \begin{cases} \left(\mathfrak{X}_x + b\dfrac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\mathfrak{X}_y + b\dfrac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right)\dfrac{dy}{dn} = \dfrac{\lambda + 2\mu}{8h\mu}A, \\ \left(\mathfrak{X}_y + b\dfrac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\mathfrak{Y}_y + b\dfrac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)\dfrac{dy}{dn} = \dfrac{\lambda + 2\mu}{8h\mu}B, \end{cases}$$

wo $D = \mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y$, $b = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}h^2$ und A, B die zur x-Axe und y-Axe parallelen Komponenten der Randkraft. Führt man die Funktion

$$(165)\quad \chi' = \chi - bD$$

ein, so geht (163) über in

$$(166)\quad \underset{xyxy}{\Delta\Delta}\chi' = 0$$

und (164) in

---

131) Roma Acc. Linc. Rend. (5) 13^2 (1904), p. 419.

$$(167)\quad \begin{cases} \overline{\chi'} = \dfrac{\lambda+2\mu}{4h\mu}\displaystyle\int_0^s\left[\dfrac{dy}{ds}\int_0^s A\,ds - \dfrac{dx}{ds}\int_0^s B\,ds\right]ds + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}, \\[2ex] \overline{\dfrac{d\chi'}{dn}} = \dfrac{\lambda+2\mu}{4h\mu}\left[\dfrac{dx}{ds}\displaystyle\int_0^s A\,ds + \dfrac{dy}{ds}\int_0^s B\,ds\right] - \mathfrak{a}\dfrac{dy}{ds} + \mathfrak{b}\dfrac{dx}{ds}, \end{cases}$$

wo s die Bogenlänge der Randkurve und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Konstanten (vgl. die Gleichungen (94)). Durch (166) und (167) ist χ' bestimmt. Hieraus ergiebt sich χ vermöge (165), da $D = \underset{xy}{\Delta}\chi = \underset{xy}{\Delta}\chi'$. Mittels (162) und (160) findet man dann $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{Y}_y$, $\mathfrak{X}_y$ und daraus $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ durch Quadraturen.

Man verifiziert leicht, dass die Relationen (157) und die Gleichung (158) im vorliegenden Falle erfüllt sind.

β) Es handle sich jetzt um die Lösung, die der *Biegung der Platte* durch beliebige Randkräfte N und Randkräftepaare G, H entspricht. Diese Lösung wird, wie *A. E. H. Love*[132]) zeigt, durch einen zur z-Ebene antisymmetrischen verallgemeinerten ebenen Spannungszustand geliefert. Die dritte der Spannungsgleichungen

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

und die drei *Beltrami*schen Gleichungen, die ΔX_z, ΔY_z, ΔZ_z ausdrücken, werden durch den Ansatz befriedigt:

$$(168)\quad \begin{cases} Z_z = 0, \\ X_z = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+\eta}\,(h^2 - z^2)\,\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial x}, \\ Y_z = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+\eta}\,(h^2 - z^2)\,\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial y}, \end{cases}$$

wo Θ_1 gegeben ist durch

$$(169)\quad z\Theta_1 = X_x + Y_y.$$

Wegen der beiden übrigen Spannungsgleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{z}{1+\eta}\,\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{z}{1+\eta}\,\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = 0$$

drücken sich dann X_x, Y_y, X_y in der Form aus:

$$(170)\quad \begin{cases} X_x = \dfrac{z}{1+\eta}\,\Theta_1 + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial y^2}, \\ Y_y = \dfrac{z}{1+\eta}\,\Theta_1 + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \\ X_y = -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}, \end{cases}$$

132) Elasticity, 2. Aufl., §§ 303, 304.

wo χ eine Funktion von x, y, z, die wegen (169) der Gleichung

(171) $$\underset{xy}{\Delta}\chi = -\frac{1-\eta}{1+\eta} z\Theta_1$$

genügt. Die drei *Beltrami*schen Gleichungen, die sich auf ΔX_x, ΔY_y, ΔX_y beziehen, zeigen schließlich, dass χ die Form haben muss

(172) $$\chi = z\chi_1 + \frac{2-\eta}{6(1+\eta)} z^3\Theta_1;$$

dabei gilt

(173) $$\underset{xy}{\Delta}\chi_1 = -\frac{1-\eta}{1+\eta}\Theta_1,$$

sodass $\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta}\chi_1 = 0$.

Die Verschiebung der Mittelebene wird:

(174) $$w_0 = -\frac{1}{E}\{h^2\Theta_1 + (1+\eta)\chi_1\};$$

sie erfüllt offenbar die Gleichung

(175) $$\underset{xy}{\Delta}\underset{xy}{\Delta} w_0 = 0.$$

Da

$$\Theta_1 = \frac{E}{1-\eta}\underset{xy}{\Delta} w_0, \quad \chi_1 = -\frac{E}{1+\eta} w_0 - \frac{Eh^2}{1-\eta^2}\underset{xy}{\Delta} w_0,$$

so kann man sämtliche Grössen durch w_0 ausdrücken.

Für die Spannungsmomente G_1, G_2, H_1 ergeben sich Beziehungen, von denen die Relationen (157) eine erste Annäherung darstellen, insofern auf der rechten Seite noch ein mit h^2 proportionales Glied hinzutritt. Für eine beliebige Randkurve S mit der Normale n drücken sich die Werte $\bar{T}$, $\bar{S}$, $\bar{N}$, $\bar{G}$, $\bar{H}$ der Spannungsresultanten und Spannungsmomente folgendermassen aus:

(176) $$\begin{cases} \bar{T} = \bar{S} = 0, \quad \bar{N} = D\frac{d}{dn}\left(\underset{xy}{\Delta} w_0\right), \\ \bar{G} = +D\underset{xy}{\Delta} w_0 - \\ \qquad D(1-\eta)\left(\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{d}{dn}\right)\left(w_0 + \frac{1}{10}\frac{8+\eta}{1-\eta}h^2\underset{xy}{\Delta} w_0\right), \\ \bar{H} = -D(1-\eta)\frac{d}{dn}\left\{\frac{d}{ds}\left(w_0 + \frac{1}{10}\frac{8+\eta}{1-\eta}h^2\underset{xy}{\Delta} w_0\right)\right\}, \end{cases}$$

wo ϱ' der Krümmungsradius der Kurve und w_0 Lösung von (175). Diese Werte sind in der Tat allgemein genug, um die Befriedigung der beiden *Kirchhoff*schen Randbedingungen

$$\bar{G} = G, \quad \bar{N} - \frac{d\bar{H}}{ds} = N - \frac{dH}{ds}$$

für beliebig gegebene Werte von N, G, H zuzulassen.

c) Die Anwendung der unter a) und b) entwickelten Theorie auf *spezielle Fälle* ist verschiedentlich gegeben worden. *J. H. Michell* behandelt, Massenkräfte in seine Theorie einbeziehend (vgl. Nr. **11** b), das Problem der rotierenden Platte[133]). *A. E. H. Love*[134]) behandelt den Fall, dass die Oberseite $z = h$ eine gleichförmige oder linear veränderliche Last trägt; für den Kreis und die Ellipse[135]) ist die Integration bei verschiedenen Randbedingungen durchgeführt. Einzelne strenge Lösungen sind unabhängig von der allgemeinen Theorie abgeleitet worden. So hat *A. Clebsch*[136]) die den antisymmetrischen Termen des ebenen Spannungszustandes entsprechenden speziellen Arten der Biegung einer unbelasteten Platte (z. B. den Fall der sphärischen d. h. gleichförmigen Biegung) untersucht. *B. de Saint-Venant*[137]) behandelte den Fall der zylindrischen Biegung und gab Lösungen für die mit konzentrierten Kräften belastete Kreisplatte. *H. Lamb*[137a]) bemerkte, dass die durch

$$(177) \qquad u = -\tau y z, \quad v = -\tau z x, \quad w = \tau x y$$

dargestellte Lösung dem Fall einer rechteckigen Platte entspricht, die durch konstante Drillungsmomente H_1 bzw. H_2 vom Betrage $\pm D(1-\eta)\tau$ oder auch durch vier in den Ecken in abwechselndem Richtungssinn angreifende Kräfte tordiert wird. Eine eingehende Untersuchung der existierenden Lösungen gab *J. Dougall*[138]). Die in der Näherungstheorie angewendeten Formeln (157), (158) finden sich, jedenfalls in den praktisch wichtigen Fällen, genau oder annähernd bestätigt.

15. Singularitäten in zwei und drei Dimensionen[138a]).

15 a. Singularitäten in zwei Dimensionen. Einfache Punktsingularitäten bei ebener Deformation (bzw. ebener Spannung dünner

133) London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 124. Der spezielle Fall der rotierenden Kreisplatte war bereits auf andere Weise von *C. Chree*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 7 (1891), p. 201 gelöst worden. Lösungen für die rotierende Kreis„scheibe" gaben *J. Cl. Maxwell,* Edinb. Roy. Soc. Trans. 20 (1883) [1856], p. 87 = Scientific papers 1, p. 30 und *M. Grübler,* Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure 41 (1897), p. 860; vgl. übrigens Nr. **10** a.

134) Elasticity, 2. Aufl., p. 454 ff.; Elastizität, p. 545 ff.

135) Die Resultate für die Ellipse schreibt Love *G. H. Bryan* zu.

136) Elastizität, §§ 45, 46.

137) *Clebsch-Saint-Venant,* Note du § 45.

137a) London Math. Soc. Proc. 21 (1891), p. 70.

138) Edinburgh R. Soc. Trans. 41 (1904), p. 129.

138a) Wegen der Bedeutung, die die in dieser Nummer zu besprechenden Lösungen für die allgemeine Integrationstheorie (Aufstellung der *Somigliana*schen und *Betti*schen Formeln, Konstruktion *Green*scher Funktionen) besitzen, verweisen wir auf IV 24, Nr. **10** b—g (*O. Tedone*).

Platten oder Scheiben) ergeben sich im Falle der Isotropie, wenn als *Airy*'sche Funktionen zugrunde gelegt werden:

$$r^{-m}\cos m\psi, \qquad r^{-m}\sin m\psi \qquad \text{für } m = 1, 2, 3, \ldots;$$
$$r^{-m+2}\cos m\psi, \quad r^{-m+2}\sin m\psi \quad \text{für } m = 2, 3, 4, \ldots,$$

ausserdem $\lg r$, $r^2 \lg r$, ψ, $r^2\psi$; $r \lg r \cos\psi$, $r \lg r \sin\psi$, $r\psi\cos\psi$, $r\psi\sin\psi$ [139]). Handelt es sich um ein die singuläre Stelle umschliessendes Gebiet, so sind von letzteren Funktionen im allgemeinen nur solche Kombinationen zulässig, die einwertige Verschiebungen liefern[140]).

Von besonderem Interesse ist die von *J. H. Michell* untersuchte, durch

$$\chi = Ar\left[\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\lg r\right)\cos\psi + \psi\sin\psi\right] \tag{178}$$

definierte Spannungsverteilung, die dem Fall entspricht, dass die Funktion

$$(\lambda + 2\mu)\Theta + i2\mu\overline{\omega}_3$$

(Nr. **11**a) an der Stelle $x = y = 0$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Die Spannungen sind hier, den Formeln (92') gemäss, durch

$$\left\{\begin{aligned} X_x &= A\frac{x}{r^2}\left(\frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}\frac{y^2}{r^2}\right),\\ Y_y &= A\frac{x}{r^2}\left(-\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}\frac{y^2}{r^2}\right),\\ X_y &= A\frac{y}{r^2}\left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}\frac{x^2}{r^2}\right), \end{aligned}\right. \tag{179}$$

und die Verschiebungen, den Formeln (97) gemäss, durch

$$\left\{\begin{aligned} u &= -A\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\lg r - rA\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{y^2}{r^2},\\ v &= +A\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{xy}{r^2} \end{aligned}\right. \tag{180}$$

gegeben. Sondert man den Koordinatenanfang durch einen kleinen Kreis aus, so ist die Resultante der auf die Höhlung wirkenden Spannungen gleich $2A\pi$, ihre Richtung die der x-Axe (Fig. 3).

*Airy*sche Funktionen, die auf mehrwertige Verschiebungen führen, können zugrunde gelegt werden, wenn die singuläre Stelle auf dem Rande angenommen wird. Ein Beispiel liefert die von *J. H. Michell*[141]) untersuchte „einfache radiale Verteilung", die durch die Spannungsfunktion

---

139) *J. H. Michell,* London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 100.

140) Mehrwertige Verschiebungen würden, wie in IV 24, Nr. 8 (*O. Tedone*) gezeigt, eine Verrenkung des Systems und daraus entspringende (künstliche) Selbstspannungen bedingen. Die Selbstspannungen in einem Kreisring behandelt *A. Timpe,* Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 348.

141) London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 35.

$$\chi = \frac{F}{\pi} r \psi \sin \psi \tag{181}$$

definiert wird. Die zugehörigen Verschiebungen in Richtung des Radius und senkrecht dazu lauten:

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\frac{F}{\pi}\left\{\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\psi \sin\psi + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \lg r \cos\psi\right\}, \\ \varkappa_2 &= -\frac{F}{\pi}\left\{\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\psi \cos\psi - \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \lg r \sin\psi - \frac{1}{2\mu}\sin\psi\right\}, \end{aligned}\right. \tag{182}$$

während die Polarkomponenten der Spannung gegeben sind durch

$$\Theta_1 = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\psi}{r}, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0.$$

Die Schnitte $\psi = \text{const.}$ sind spannungsfrei. Die Spannungen auf einem den Randpunkt $r = 0$ aussondernden beliebig kleinen Kreis haben eine endliche Resultante. Die Lösung ist daher anwendbar auf einen *Keil*, in dessen Spitze eine Einzelkraft angreift. Bei einfacher geradliniger Begrenzung (d. h. im Falle der Halbebene) hat diese Resultante den Betrag F und fällt in die Richtung $\psi = 0$. Durch Inversion ergiebt sich aus dieser Lösung diejenige für einen *Kreis*, an dem zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte in den Enden einer Sehne angreifen[142]). Spannungstrajektorien werden die (aus dem System der Radienvektoren und konzentrischen Kreise hervorgehenden) beiden Kreisbüschel, die die Enden der Sehne zu Grundpunkten haben. Durch Synthese leitet *Michell* hieraus die Lösung[143]) für einen Kreis ab, an dessen Peripherie eine beliebige Zahl von Einzelkräften angreift, die sich das Gleichgewicht halten.

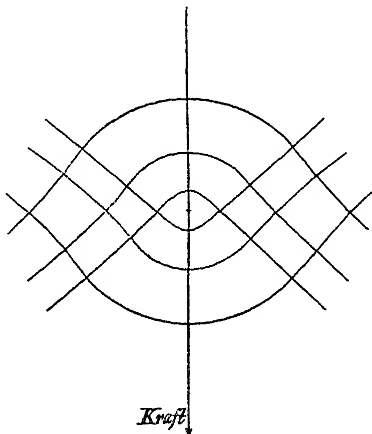


Fig. 3.

Mit Hilfe der angeführten *Airy*schen Funktionen findet er ferner die Spannungsverteilung in einer durch zwei tangentiale Randkräfte und ein Kräftepaar im Mittelpunkt gehaltenen *Kreisscheibe*, sowie in einer auf ebenem Boden ruhenden schweren Kreisscheibe[144]) und löst

142) *J. H. Michell*, loc. cit., erhält diesen Fall direkt durch Überlagerung zweier einfacher radialer Verteilungen.

143) Dieselbe war auf anderem Wege abgeleitet von *H. Hertz*, Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), p. 125 = Ges. Werke 1, p. 283.

144) London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 35.

ausserdem das Problem der durch eine Horizontale begrenzten Halbebene, die längs einer endlichen Strecke eine normale Last trägt[145]).

Aus den betrachteten Singularitäten lassen sich, wie *A. E. H. Love*[146]) zeigt, durch ein Kombinations- und Grenzübergangsverfahren (indem man z. B. zwei Punkte, in denen eine Einzelkraft angreift, zusammenfallen lässt) neue Typen singulärer Stellen ableiten, z. B. der Druckpunkt, bei dem die Verschiebung, bezogen auf ebene Polarkoordinaten, durch

(183) $$\varkappa_1 = \frac{\text{const.}}{r}, \quad \varkappa_2 = 0$$

gegeben ist (vgl. **10**a).

15b. Singularitäten in drei Dimensionen. Um *einfache Punktsingularitäten* in drei Dimensionen abzuleiten, greift man im Falle der Isotropie am besten auf die Formeln (67) (68), (68′) in Nr. 8 zurück.

Setzt man $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = 0$, $\mathfrak{W} = \frac{A_1}{2\mu^2} r$, so erhält man die Verschiebungen[147])

(184) $$\begin{cases} u = + \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu^2} A_1 \dfrac{xz}{r^3}, \\ v = + \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu^2} A_1 \dfrac{yz}{r^3}, \\ w = + \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu^2} A_1 \dfrac{z^2}{r^3} + \dfrac{\lambda+3\mu}{2\mu^2} A_1 \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

und die Spannungen

(185) $$\begin{cases} X_x = A_1 \left(3 \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \dfrac{x^2 z}{r^5} - \dfrac{z}{r^3}\right), & Y_z = A_1 \left(3 \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \dfrac{y z^2}{r^5} + \dfrac{y}{r^3}\right), \\ Y_y = A_1 \left(3 \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \dfrac{y^2 z}{r^5} - \dfrac{z}{r^3}\right), & Z_x = A_1 \left(3 \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \dfrac{x z^2}{r^5} + \dfrac{x}{r^3}\right), \\ Z_z = A_1 \left(3 \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \dfrac{z^3}{r^5} + \dfrac{z}{r^3}\right), & X_y = A_1 \cdot 3 \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \dfrac{xyz}{r^5}. \end{cases}$$

Diese Formeln, von *J. Boussinesq*[148]) als *„erster Typus einfacher Lösungen"* bezeichnet, rühren her von *W. Thomson*[149]) und stimmen überein mit den *Somigliana*schen „Grundlösungen" der Hauptgleichungen

145) London Math. Soc. Proc. 34 (1901/02), p. 223. Auch die durch Inversion sich ergebende interessante Lösung ist hier geschildert.

146) Elasticity, 2. Aufl., p. 209; Elastizität, p. 252.

147) Lösungen, die auf mehrwertige Verschiebungen führen, also dem Falle künstlicher Selbstspannungen entsprechen, sollen im Folgenden ausser Betracht bleiben. Verschiedene Beispiele behandelt *V. Volterra,* Roma Acc. Linc. Rend. (4) 14^1 (1905), p. 431, 651; (5) 14^2 (1905), p. 329.

148) Application des potentiels, p. 81.

149) *W. Thomson,* Cambr. and Dubl. math. J. 3 (1848), p. 87 = Math. and phys. papers 1, p. 97.

für elastische isotrope Körper (IV 24, Nr. **10**b, *O. Tedone*). Die Resultante der Spannungen, die auf eine den Koordinatenanfang aussondernde Kugel wirken, fällt in die Richtung der z-Axe und hat den Betrag

$$\frac{4\pi(\lambda+2\mu)}{\mu}A_1.$$

Die Lösung stellt also den Verschiebungs- und Spannungszustand in einem *unendlich ausgedehnten Körper dar, der durch eine an einem Punkt im Innern angreifende, in Richtung der positiven z-Axe fallende, Einzelkraft* beansprucht wird. Von hier aus gelangt man durch Synthese zu einer partikulären Lösung für den Fall, dass auf die Elemente eines Körpers Massenkräfte X, Y, Z wirken[150]); sie lautet:

$$u=\iiint\left\{\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}(x-x')\frac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{r^3}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{X'}{r}\right\}\varrho\,dx'\,dy'\,dz',$$

entsprechend v und w.

Der *„zweite Typus einfacher Lösungen"* von *J. Boussinesq*[151]) ergiebt sich, wenn man für $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ drei harmonische Funktionen von der Beschaffenheit ansetzt, dass $\mathfrak{D}=\frac{A_2}{2\mu(\lambda+\mu)}(z+r)$. Die entsprechenden Verschiebungen sind

$$(186)\quad \begin{cases} u=-\frac{A_2}{2\mu}\frac{\partial \lg(z+r)}{\partial x}=-\frac{A_2}{2\mu}\frac{x}{r(z+r)},\\ v=-\frac{A_2}{2\mu}\frac{\partial \lg(z+r)}{\partial y}=-\frac{A_2}{2\mu}\frac{y}{r(z+r)},\\ w=-\frac{A_2}{2\mu}\frac{\partial \lg(z+r)}{\partial z}=-\frac{A_2}{2\mu}\frac{1}{r}, \end{cases}$$

und die Spannungskomponenten lauten

$$(187)\quad \begin{cases} X_x=A_2\left(\frac{1}{r(z+r)}-\frac{(z+2r)x^2}{r^3(z+r)^2}\right), & Y_z=-A_2\frac{y}{r^3},\\ Y_y=A_2\left(\frac{1}{r(z+r)}-\frac{(z+2r)y^2}{r^3(z+r)^2}\right), & Z_x=-A_2\frac{x}{r^3},\\ Z_z=-A_2\cdot\frac{z}{r^3}, & X_y=-A_2xy\frac{z+2r}{r^3(z+r)^2}. \end{cases}$$

Setzt man

$$A_1=A_2=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{W}{2\pi}$$

und addiert die Lösungen (185) und (187), so erhält man

150) *W. Thomson-P. G. Tait*, Nat. Phil. 2. p. 274 ff.
151) Application des potentiels, p. 92.

$$(188)\quad \begin{cases} X_x = \frac{W}{2\pi}\left\{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{r(z+r)} - \frac{(z+2r)x^2}{r^3(z+r)^2} - \frac{z}{r^3}\right) + \frac{3x^2z}{r^5}\right\}, \\ Y_y = \frac{W}{2\pi}\left\{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{r(z+r)} - \frac{(z+2r)y^2}{r^3(z+r)^2} - \frac{z}{r^3}\right) + \frac{3y^2z}{r^5}\right\}, \\ Z_z = \frac{W}{2\pi}\frac{3z^3}{r^5}, \\ Y_z = \frac{W}{2\pi}\frac{3yz^2}{r^5}, \\ Z_x = \frac{W}{2\pi}\frac{3xz^2}{r^5}, \\ X_y = \frac{W}{2\pi}\left\{-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{xy(z+2r)}{r^3(z+r)^2} + \frac{3xyz}{r^5}\right\}. \end{cases}$$

Dies ist die von *J. Boussinesq* herrührende Lösung für das Problem des *von einer Horizontalebene begrenzten Körpers, auf den in einem Punkt der Grenzebene eine Vertikalkraft W wirkt.* In der Tat verschwinden die Spannungskomponenten Y_z, Z_x in allen Punkten von $z = 0$; Z_z verschwindet in allen Punkten derselben Ebene ausser in $x = y = 0$, und die Resultante der Spannungen, die auf eine den Punkt $x = y = 0$ aussondernde Halbkugel wirken, fällt in die Richtung der z-Axe und hat den Betrag W. Auf die durch die z-Axe gelegten Ebenen wirkt normale Spannung, und in allen diesen Ebenen herrscht der gleiche Spannungszustand.

Durch Integration kann man aus (188) die Lösung für den Fall herleiten, dass auf die begrenzende Ebene ein über ein endliches Flächenstück a verteilter Druck P wirkt. *H. Hertz*[152]) wendet dieselbe auf das Problem zweier gegen einander gepresster und infolgedessen in einem endlichen Flächenstück ω sich berührender Körper an. Führt man in ω den ursprünglichen Berührungspunkt als Anfangspunkt eines xy-Systems ein, so kann man die (in der Druckrichtung gemessene) relative Verschiebung der zur Berührung gelangenden Punkte der beiden Körper in erster Annäherung einer bekannten homogenen quadratischen Funktion, $Ax^2 + By^2$, der x, y proportional setzen. Andererseits zeigt die in Rede stehende Lösung, dass die betreffenden Verschiebungen selbst dem Potential einer auf ω verteilten Flächenbelegung von der Dichte P' proportional sind, wo P' der auf die Flächeneinheit bezogene Druck. Nun weiss man, dass das Potential eines homogenen Ellipsoides im Innern desselben eine quadratische Funktion der Koordinaten ist. So kommt man dazu, ω mit seiner Flächenbelegung als eine Ellipse anzunehmen, die aus einem homogenen Ellipsoid von der Gesamtmasse P durch unbe-

152) *H. Hertz*, J. f. Math. 92 (1882), p. 156 = Ges. Werke 3, p. 155.

grenzte Abplattung hervorgegangen ist. Diese Annahme erfüllt alle Bedingungen des Problems und führt auf die Beziehung;

$$P' = \frac{3P}{2\pi ab}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

wo a, b die Halbaxen der Ellipse, die sich durch A und B bestimmen. Alsdann kann man in jedem Körper die von der Druckverteilung P' herrührenden Spannungen und Formänderungen ermitteln.

Bezogen auf räumliche Polarkoordinaten (r, φ, ψ) drücken sich die Lösungen (185) und (187), wie *J. H. Michell*[153]) findet, folgendermassen aus:

$$(185')\quad \begin{cases} \Theta_1 = \frac{3\lambda + 4\mu}{\mu} A_1 \frac{\sin\varphi}{r^2}, & \Omega_1 = 0, \\ \Theta_2 = -A_1 \frac{\sin\varphi}{r^2}, & \Omega_2 = 0, \\ \Theta_3 = -A_1 \frac{\sin\varphi}{r^2}, & \Omega_3 = -A_1 \frac{\cos\varphi}{r^2}, \end{cases}$$

und

$$(187')\quad \begin{cases} \Theta_1 = -A_2 \frac{1}{r^2}, & \Omega_1 = 0, \\ \Theta_2 = +A_2 \frac{\sin\varphi}{2r^2\cos^2\frac{90^0-\varphi}{2}}, & \Omega_2 = 0, \\ \Theta_3 = +A_2 \frac{1}{2r^2\cos^2\frac{90^0-\varphi}{2}}, & \Omega_3 = -A_1 \frac{\operatorname{tg}\frac{90^0-\varphi}{2}}{r^2}, \end{cases}$$

wo $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ die Polarspannungskomponenten bezeichnen.

Setzt man

$$A_1 = \frac{A_2}{2\cos^2\frac{90^0-\varphi_0}{2}}$$

und addiert die Lösungen (185′) und (187′), so folgt die Lösung für den *Kegel* $\varphi = \varphi_0$, *dessen Mantelfläche spannungsfrei ist, während in der Spitze eine in die Richtung der Kegelaxe fallende Einzelkraft angreift.*

Aus den betrachteten Singularitäten lassen sich, wie *J. Dougall*[154]) und *A. E. H. Love*[155]) zeigen, durch ein Kombinations- und Grenzübergangsverfahren neue Singularitätentypen ableiten. Beispielsweise rufen zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, die in den Punkten $(0, 0, 0)$ und $(0, 0, h)$ in der z-Richtung angreifen, ein Ver-

153) London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 35.
154) Edinburgh Math. Soc. Proc. 16 (1898).
155) Elasticity, 2. Aufl., p. 183; Elastizität, p. 220.

schiebungssystem hervor, das für verschwindendes h aus (184) durch Differentiation nach z hervorgeht[155a]).

Auf die Tatsache, dass in einem unendlichen Raum die von einer Einzelkraft hervorgerufenen Verschiebungen mit der ersten Potenz der Entfernung von ihrem Angriffspunkt abnehmen, während die von zwei im Gleichgewicht stehenden Kräften hervorgerufenen Verschiebungen mit dem Quadrat der Entfernung von ihrem gemeinsamen Angriffspunkt abnehmen, stützt *J. Boussinesq*[156]) das von *B. de Saint-Venant*[157]) aufgestellte „Prinzip von der elastischen Gleichwertigkeit statisch gleichwirkender Lastensysteme" (*Saint-Venantsches Prinzip*), das sich folgendermassen aussprechen lässt: „Zwei Systeme von Kräften, deren Angriffspunkte über ein kleines Stück ω eines Körpers verteilt sind und die dieselbe Resultante besitzen, rufen in ihm, von *lokalen Störungen* in der Nähe von ω abgesehen, merklich den gleichen Spannungszustand hervor."

III. Körper mit einer oder zwei unendlich kleinen Dimensionen.

16. Allgemeine Prinzipien. Die elastischen Körper, bei denen eine oder zwei Dimensionen unendlich klein sind, können Deformationen erleiden, die mit *endlichen* Verschiebungen verknüpft sind, ohne dass deshalb die relativen Verschiebungen d. h. die Deformationsgrössen aufhören, unendlich klein zu sein. Die allgemeine Theorie der Körper mit einer oder zwei unendlich kleinen Dimensionen rührt fast ausschliesslich von *G. Kirchhoff* her[158]). Dieselbe stützt sich auf die folgenden allgemeinen Prinzipien:

1. Die Grundgleichungen und Randbedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung d. h. also die Balken- und Plattentheorie sind nicht auf den ganzen Körper anzuwenden, sondern immer nur auf Teilchen, deren Abmessungen alle von derselben Grössenordnung sind.

2. Sind die auf die Masseneinheit bezogenen Massenkräfte und

155a) Durch Vereinigung dreier derartiger Doppelkräfte, die in den drei Koordinatenrichtungen wirken, erhält man den Fall eines „Dilatationszentrums", und die hierfür geltenden Formeln decken sich mit der von *E. Betti* bei Ableitung seiner allgemeinen Formel für die Dilatation (IV 24, Nr. **10**d) benutzten partikulären Lösung.

156) Application des potentiels, p. 296.

157) Paris Mém. prés. par. div. sav. 14 (1855).

158) J. f. Math. 56 (1859), p. 293 = Ges. Abhandlungen, p. 295; Mechanik, p. 406. Siehe auch *A. Clebsch*, Elastizität, p. 190; *Clebsch-St.-Venant*, Élasticité, p. 407; *A. E. H. Love*, Elasticity, 2. Aufl., p. 365; Elastizität, p. 339. Bezüglich verschiedener Bemerkungen zur *Kirchhoff*schen Theorie siehe *E. Mathieu*, Théorie de l'élasticité des corps solides 1, p. 135.

Trägheitskräfte und die auf die Flächeneinheit bezogenen Oberflächenspannungen alle von derselben Grössenordnung, so ist derjenige Teil der Deformation eines solchen Teilchens, der von den Massen- und Trägheitskräften herrührt, zu vernachlässigen gegenüber demjenigen Teil, der von den Oberflächenspannungen herrührt.

3. Die Verteilung der Spannungen über einen kleinen Teil des Körpers kann beliebig abgeändert werden, wenn nur die resultierenden Komponenten und Momente bezüglich dreier zueinander senkrechter Achsen ungeändert bleiben (*Saint-Venant*sches Prinzip, Nr. **15** b).

17. Anfänglich gerade unendlich dünne Stäbe. Ein unendlich dünner, im natürlichen Zustand gerader Stab ist ein zylindrischer elastischer Körper, dessen Querdimensionen so klein sind, dass sie gegen die als endlich vorausgesetzten Längsdimensionen vernachlässigt werden können. Die Querschnitte dieses Zylinders, die zu den Erzeugenden des Mantels senkrecht stehen, heissen *Normalschnitte*; die zu diesen Erzeugenden parallele Gerade, die den Ort der Schwerpunkte der Normalschnitte bildet, heisst die *Axe* oder *Zentrallinie* des Stabes.

Nach der Deformation nimmt die Axe des Stabes im allgemeinen die Gestalt einer krummen Linie, der sogenannten *elastischen Linie*, an. Ein Punkt P dieser Axe wird im natürlichen Zustand durch den Wert seines Abstandes s von einem festen Punkte der Axe festgelegt. Um nun die Deformation des den Punkt P umgebenden Teilchens des Stabes zu untersuchen, führt man ein Koordinatensystem (x, y, z) ein, dessen Ursprung der Ort des Punktes P *nach* der Deformation ist; die z-Axe berühre die Kurve, die von der Stabachse nach der Formänderung gebildet wird, und die x-Axe berühre die Kurve, die vor der Deformation mit einer der Hauptträgheitsaxen des durch den Punkt P gehenden Normalschnitts zusammenfiel. Seien nun x, y, z die Koordinaten eines Punktes des betrachteten Teilchens *vor* der Deformation in dem mit dem (x, y, z)-System kongruenten Axensystem, das aus der Stabaxe und den Hauptträgheitsaxen des durch den Punkt P gehenden Normalschnitts gebildet wird. Ferner seien $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Koordinaten desselben Punktes *nach* der Deformation im (x, y, z)-System. Dann werden u, v, w Funktionen von x, y, z und s sein. Bezeichnet man nun mit Q einen anderen Punkt der Stabaxe im Abstand ds von P, so wird man die Koordinaten eines Punktes des Teilchens, zu dem Q gehört, in dem Axensystem, das zu Q genau so orientiert ist wie das (x, y, z)-System zu P, dadurch erhalten können, dass man in den

Ausdrücken von $x + u$, $y + v$, $z + w$ an Stelle von s und z bezüglich $s + ds$ und $z - ds$ einsetzt. Dieselben Koordinaten aber kann man auch durch die Überlegung erhalten, dass das neue Axensystem im Punkte Q aus dem (x, y, z)-System hervorgeht durch eine Verschiebung vom Betrage ds' längs der z-Axe und eine unendlich kleine Drehung mit den Komponenten pds', qds', rds' bezüglich der (x, y, z)-Axen, wo ds' das Bogenelement der von der Stabachse gebildeten Kurve ist. Setzt man die beiden Ausdrücke für die Koordinaten des Punktes des Teilchens um Q, die sich auf diese Weisen ergeben, einander gleich, so gelangt man zu folgender Identität:

$$(189)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial s} - [r(y+v) - q(z+w)]\,(1+\varepsilon), \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial s} - [p(z+w) - r(x+u)]\,(1+\varepsilon), \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial s} - [q(x+u) - p(y+v)]\,(1+\varepsilon) + \varepsilon, \end{cases}$$

wo ε den Koeffizienten der linearen Dilatation $\dfrac{ds'}{ds} - 1$ des Stabes bedeutet; rds heisst die *Torsion* oder der *Drall* des dem Element ds entsprechenden Stabstücks und p und q sind die reziproken Werte der Krümmungsradien der Projektionen des Elements ds auf die Ebenen yz und xz. Die Gleichungen (189) führen den Namen *Kontinuitätsbedingungen*. Den angegebenen Beweis verdankt man *J. Boussinesq*[159]).

Vernachlässigt man nunmehr in den Gleichungen (189) Glieder höherer Ordnung, so erhält man die Gleichungen:

$$(190)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -ry + qz, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = -pz + rx, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = -qx + py + \varepsilon, \end{cases}$$

woraus durch Integration:

$$(191)\qquad \begin{cases} u = u_0 - ryz + \tfrac{1}{2} q z^2, \\ v = v_0 - \tfrac{1}{2} p z^2 + rxz, \\ w = w_0 - qxz + pyz + \varepsilon z \end{cases}$$

folgt, unter u_0, v_0, w_0 unbestimmte Funktionen von x und y allein verstanden.

Die Gleichungen (191) enthalten für die Deformation des Stabstücks bereits gewisse Beschränkungen; aus ihnen folgt nämlich:

159) J. de math. (2) 16 (1871), p. 125; Paris C. R. 72 (1871), p. 407.

$$(192)\qquad \begin{cases} x_x = \dfrac{\partial u_0}{\partial x}, & y_z = \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + rx, \\ y_y = \dfrac{\partial v_0}{\partial y}, & z_x = \dfrac{\partial w_0}{\partial x} - ry, \\ z_z = -qx + py + \varepsilon, & x_y = \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Grössen X_x, Y_y, ... X_y von z unabhängig sind, die *Grundgleichungen* des Gleichgewichts reduzieren sich deshalb, weil noch nach Nr. **16**, 2 die Massenkräfte zu vernachlässigen sind, auf:

$$(193)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Wenn am Mantel des Stabes äussere Spannungen nicht angreifen bezw. solche zu vernachlässigen sind, so bleiben für jedes Stabelement die Darlegungen von Nr. **13**b bestehen. Die Grössen X_x, Y_y, X_y verschwinden und X_z, Y_z, Z_z sind durch

$$(194)\qquad \begin{cases} X_z = -\mu\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x} - ry\right) \\ Y_z = -\mu\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y} + rx\right) \\ Z_z = -E(-qx + py + \varepsilon) \end{cases}$$

gegeben, wo w_0 mit der Torsionsfunktion Φ des Stabquerschnittes übereinstimmt. Mit anderen Worten: in erster Annäherung verhält sich jedes einzelne Stabelement wie ein Prisma, das eine gewisse Dehnung, Torsion und einfache Biegung erfährt.

Nach Nr. **12**b und **13**b ergeben sich daher für isotropes Material folgende Beziehungen zwischen der Dehnung ε, den Krümmungen p, q und dem Drall r einerseits und der (in die z-Richtung fallenden) Zugbeanspruchung $-Z$, den Biegungsmomenten $-M_x$, $-M_y$ und dem Drillungsmoment $-M_z$ andererseits:

$$(195)\qquad -Z = E\sigma\varepsilon;$$

$$(196)\qquad -M_x = EI_1 p, \quad -M_y = EI_2 q, \quad -M_z = Cr,$$

wo σ der Querschnittinhalt, I_1, I_2 die auf der x-Axe bzw. die y-Axe bezogenen Trägheitsmomente der Querschnitts und C die Drillungssteifigkeit; EI_1 und EI_2 nennt man die *Biegungssteifigkeiten* des Stabes. Ferner erhält man für die potentielle Energie des Stabes

pro Längeneinheit die Formel:

$$(197) \qquad F = -\tfrac{1}{2}[E(I_1 p^2 + I_2 q^2) + Cr^2 + E\sigma\varepsilon^2].$$

Danach ist $2F$ homogen vom zweiten Grade in p, q, r; ε mit Koeffizienten, die von den elastischen Konstanten und denen des Querschnitts abhängen; ein Resultat, das übrigens von der elastischen Natur des Balkenmaterials unabhängig ist.

Die Gleichung (197) bzw. die Gleichungen (195) und (196) reichen, wie in der folgenden Nummer ausgeführt wird, zusammen mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen hin, um p, q, r als Funktionen der Bogenlänge s und damit die Form der elastischen Linie zu bestimmen. Gewissermassen eine Verallgemeinerung der *Bernoulli-Euler*schen Theorie (vgl. IV 23, Nr. **1**, *C. H. Müller-A. Timpe*), wurden die Formeln (196) zum erstenmal von *B. de Saint-Venant*[159a]) aufgestellt. Die hier gegebene Herleitung aus der *Saint-Venant*schen Balkentheorie geht auf *A. Clebsch* zurück[159b]). *W. Thomson* und *P. G. Tait*[159c]) gewinnen den Ausdruck (197) für die potentielle Energie durch eine allgemeine, auf das Energieprinzip gestützte Überlegung.

In der üblichen Näherungstheorie für *dünne* Stäbe werden die Formeln (196) ganz allgemein auch dann an die Spitze gestellt, wenn auf der zylindrischen Begrenzung beliebige Kräfte angreifen. In Wirklichkeit gelten sie, wie schon in Nr. **13**d betont wurde, in solchen Fällen höchstens angenähert, so dass die mit dieser Theorie erhaltenen Resultate zuweilen ziemlich unzuverlässig sind.

18. Gerade Stäbe, bei denen nur an den Enden Spannungen angreifen. Kinetische Analogie[160]). a) Es werde vorausgesetzt, dass die Kräfte, die an den Stabelementen angreifen, sich auf Spannungssysteme reduzieren, die auf die Grundflächen wirken. Alsdann erfordert es das Gleichgewicht des elastischen Stabes, dass die Resultante und das Moment der Spannungen, die der auf der einen Seite eines Normalschnitts liegende Teil des Stabes auf den anderen Teil ausübt, nach Grösse und Richtung konstant sind. Führt man ein anderes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, das im Raume fest und mit dem Axensystem (x, y, z) kongruent ist, derart, dass die Resultante Γ der oben genannten Spannungen zur ζ-Axe parallel und

159a) *B. de Saint-Venant,* Paris C. R. 17 (1843), p. 924, 1020; 19 (1844), p. 36, 181.

159b) *A. Clebsch,* Elastizität, § 48.

159c) *W. Thomson-P. G. Tait,* Nat. Phil. 2, p. 133.

160) *G. Kirchhoff,* J. f. Math. 56 (1858), p. 285 = Ges. Abh., p. 285; Mechanik, p. 418 ff.

negativ oder null ist; bezeichnet man ferner mit M_x, M_y, M_z (wie in Nr. **17**) die Komponenten des Moments dieser Spannungen um die (x, y, z)-Axen, mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ die Kosinus der Winkel, die die (ξ, η, ζ)-Axen bezüglich mit den (x, y, z)-Achsen einschliessen, so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen durch folgende Relationen ausdrücken:

(198) $$\Gamma = \text{const.}$$

(199) $$\begin{cases} \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z + \eta\Gamma = \text{const.}, \\ \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z - \xi\Gamma = \text{const.}, \\ \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z \qquad = \text{const.} \end{cases}$$

Differentiiert man diese Relationen nach s, addiert nach Multiplikation bzw. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ oder $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und berücksichtigt die Relationen zwischen den p, q, r und den neun Kosinus (*Poisson*sche Formeln), so lassen sich die Gl. (199) schreiben:

(200) $$\begin{cases} \dfrac{dM_x}{ds} = rM_y - qM_z + \gamma_2\Gamma, \\ \dfrac{dM_y}{ds} = pM_z - rM_y - \gamma_1\Gamma, \\ \dfrac{dM_z}{ds} = qM_x - pM_y. \end{cases}$$

Setzt man wieder

$$Z = \int Z_z\,dx\,dy,$$

so kann man, wie Formel (197) zeigt, schreiben:

$$M_x = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad M_y = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad M_z = \frac{\partial F}{\partial r}; \quad Z = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon},$$

welche Formeln wieder wie (197) auch allgemein gelten. Eliminiert man nun ε aus dem Ausdruck für F mittels der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = Z = \gamma_3\Gamma,$$

so wird F homogen zweiten Grades in $p, q, r; \gamma_3\Gamma$. Wie leicht einzusehen ist, lassen sich, wenn Γ nicht unendlich gross gegenüber M_x, M_y, M_z ist, die Glieder, die in diesem neuen Ausdruck von F die Grösse Γ enthalten, gegen die anderen vernachlässigen[161]), so dass man alsdann sagen kann, ε ist aus F mittels der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = 0$$

eliminiert. Bezeichnet man den so erhaltenen Ausdruck von F mit G, so ergiebt sich:

161) *G. Kirchhoff*, Mechanik, p. 470.

$$M_x = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad M_y = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad M_z = \frac{\partial G}{\partial r},$$

und die Gleichungen (200) lassen sich schreiben:

$$(201) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial G}{\partial p} = r\dfrac{\partial G}{\partial q} - q\dfrac{\partial G}{\partial r} + \gamma_2 \Gamma, \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial G}{\partial q} = p\dfrac{\partial G}{\partial r} - r\dfrac{\partial G}{\partial p} - \gamma_1 \Gamma, \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial G}{\partial r} = q\dfrac{\partial G}{\partial p} - p\dfrac{\partial G}{\partial q}, \end{cases}$$

wo nun G eine homogene Funktion zweiten Grades in p, q, r allein ist. Zusammen mit den Relationen zwischen den neun Kosinus und den p, q, r dienen dieselben zur Bestimmung von p, q, r und der neun Richtungskosinus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$. Die Koordinaten ξ, η, ζ der elastischen Linie werden durch folgende Gleichungen bestimmt sein:

$$(202) \qquad \xi = \int \alpha_3 ds, \quad \eta = \int \beta_3 ds, \quad \zeta = \int \gamma_3 ds.$$

b) An die Gleichungen (201) knüpft nun die *kinetische Analogie* zwischen der Deformation eines anfänglich geraden, unendlich dünnen elastischen Stabes und der Bewegung eines schweren Kreisels um einen festen Punkt an, wie sie zuerst von *G. Kirchhoff* entwickelt wurde. In der Tat stimmen die Gleichungen (201) vollkommen überein mit denjenigen, die beim Problem der Bewegung eines starren Körpers, an dem im Punkte P eine konstante Kraft angreift und der in einem festen Punkte O unterstützt ist, auftreten, sofern man die Variable s der Zeit, Γ der konstanten Kraft und G der lebendigen Kraft des starren Systems entsprechen läßt. Dabei zeigt, wenn man sich den Unterstützungspunkt des Kreisels mit der Geschwindigkeit 1 längs der elastischen Linie fortbewegt denkt, die Gerade OP in jedem Augenblick in die Richtung der Tangente dieser Kurve.

Von hier aus ist es nun leicht, die Elemente der Kreiselbewegung auf die entsprechenden, bei der Deformation des Stabes auftretenden zu beziehen, wodurch wegen der Anschaulichkeit der Kreiselbewegung auch der Vorgang bei der Deformation — wenn zunächst auch nur qualitativ — dem Verständnis näher gebracht wird. Ein weiterer Schritt ist es dann, die Analogie auch für die tatsächliche Lösung des Problems nutzbar zu machen, indem man diejenigen Fälle überträgt, in denen das Kreiselproblem eine vollkommene Lösung bisher erfahren hat.

Die einfachsten Fälle, in denen das Problem der Bewegung eines in einem festen Punkte unterstützten starren Körpers sich lösen lässt, sind der *Euler*sche Fall, bei dem der starre Körper einfach seiner

Trägheit überlassen ist, und der *Lagrange*sche Fall, bei dem zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich sind und der Unterstützungspunkt auf der anderen Trägheitsaxe liegt, während der Körper einer konstanten Kraft, z. B. der Schwere, unterworfen ist.

Der erstere Fall entspricht der Deformation eines Stabes durch an den Enden wirkende Kräftepaare. Dies Problem ist von *W. Hess*[162]) im einzelnen untersucht worden; bei symmetrischem Querschnitt $(I_1 = I_2 = I)$ ergiebt sich als Lösung:

$$p^2 + q^2 = \text{const.}, \quad r = \text{const.}, \quad \frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg}\frac{p}{q}\right) = \frac{EI - C}{EI} r;$$

der Stab nimmt also die Form einer gewöhnlichen Schraubenlinie an. Die Form der Funktion G, die als bekannt vorausgesetzt wird, ist z. B. für einen isotropen Stab von kreisförmigem Querschnitt gegeben durch

$$G = -I\left[\frac{E}{2}(p^2 + q^2) + \mu r^2\right], \tag{203}$$

wie aus dem Ausdruck (197) für F hervorgeht.

Der andere Fall führt, wie das Studium der Bewegungsformen eines symmetrischen schweren Kreisels[163]) lehrt, auf Stabformen, die am besten durch ihre Orientierung gegen eine bestimmte Schraubenlinie verstanden werden; diese letztere selbst stellt die der regulären Präzession $(\gamma_3 = \text{const.})$ entsprechende Stabform dar. Um einen geraden Stab in eine Schraubenlinie von gegebener Steigung und gegebener Torsion r überzuführen, muss man eine bestimmte Dyname, d. h. eine bestimmte Kraft und ein bestimmtes Kräftepaar anwenden.

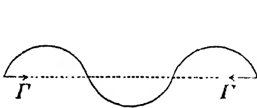


Fig. 4.

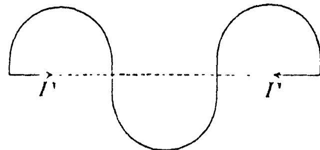


Fig. 5.

Der ebenen Pendelbewegung entsprechen die zuerst von *L. Euler*[164]) aufgefundenen verschiedenen Formen der *ebenen elastischen Linie*, die in Fig. 4—12 dargestellt sind. Ist EI die in Frage kommende

162) Math. Ann. 23 (1884), p. 181. Vgl. auch *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques 2, Paris 1888, chap. 5 und *A. G. Greenhill*, Verh. des 3. intern. Mathematikerkongresses, Leipzig 1905.

163) Vgl. *F. Klein-A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels 2, Leipzig 1898, p. 279.

164) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. 744. Additamentum I: De curvis elasticis (p. 245).

Biegungssteifigkeit, so ist die Gleichung derselben, je nachdem Wendepunkte vorhanden sind (Fig. 4—11) oder nicht (Fig. 12), gegeben durch

$$(204)\quad \begin{cases} \xi = -2k\sqrt{\dfrac{EI}{\Gamma}}\,\mathrm{cn}\,(u+K), \\ \zeta = \sqrt{\dfrac{EI}{\Gamma}}\left[-u + 2\int\limits_0^u \mathrm{dn}^2(u+k)\,du\right] \end{cases}$$

bezw. durch

$$(204')\quad \begin{cases} \xi = -\dfrac{2}{k}\sqrt{\dfrac{EI}{\Gamma}}\,\mathrm{dn}\,u, \\ \zeta = k\sqrt{\dfrac{EI}{\Gamma}}\left[\left(1-\dfrac{2}{k^2}\right)u + \dfrac{2}{k^2}\int\limits_0^u \mathrm{dn}^2 u\,du\right]; \end{cases}$$

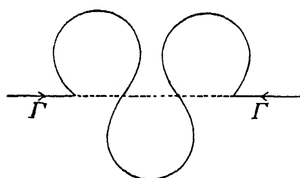


Fig. 6.

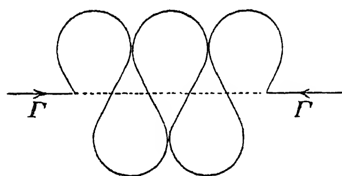


Fig. 7.

hierin ist $u = s\sqrt{\Gamma/EI}$ und k, der Modul der elliptischen Funktionen, im ersten Falle gleich dem Sinus des halben Neigungswinkels der Tangente

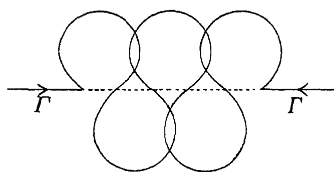


Fig. 8.

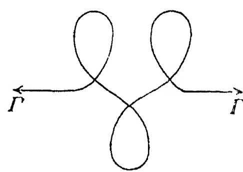


Fig. 9.

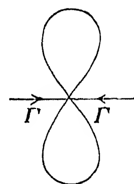


Fig. 10.

der elastischen Linie im Wendepunkt gegen die ξ-Axe, und K ein willkürlicher Parameter. Die auf die kinetische Analogie mit der Pendel-

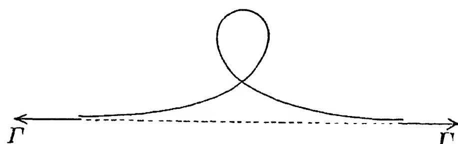


Fig. 11.

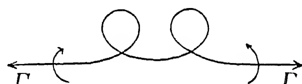


Fig. 12.

bewegung gegründete Diskussion des Problems der elastischen Linie verfolgte *W. Hess*[165]). Spezielle Fälle behandelte *L. Saalschütz*[166]).

165) Math. Ann. 25 (1885), p. 1.

166) Der belastete Stab, Leipzig 1880.

19. Anfänglich krumme unendlich dünne Stäbe. a) Die *allgemeine Theorie* unendlich dünner elastischer Stäbe, die im natürlichen Zustand irgendwie gekrümmt sind und deren Normalschnitt überall dieselbe Form hat, baut sich auf denselben allgemeinen Prinzipien auf wie die Theorie der Stäbe, die im natürlichen Zustand geradlinig sind[167]). Man kann wiederum die Kontinuitätsbedingungen aufstellen und die Formänderung des zwischen zwei unendlich benachbarten Normalschnitten eingeschlossenen Stabstücks bestimmen. Von da aus kann man zu den Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung übergehen. Jedoch lässt sich derselbe Zweck einfacher auf folgende Weise erreichen[168]). Man bezeichne mit p', q', r' die den p, q, r der Nr. **17** und **18** analogen Grössen für den Anfangszustand der Zentrallinie des krummen Stabes und mit p, q, r die entsprechenden Grössen für den deformierten Zustand derselben. Ferner bezeichne man mit G' die mit den Grössen p', q', r' gebildete, zu G analoge Funktion; bringt man dann an jedem Normalschnitt im Sinne wachsender Bogenlänge s Spannungen von der Beschaffenheit an, dass die Komponenten des resultierenden Moments gleich

$$-\frac{\partial G'}{\partial p'}, \qquad -\frac{\partial G'}{\partial q'}, \qquad -\frac{\partial G'}{\partial r'}$$

sind, so wird der Stab offenbar geradlinige und zylindrische Gestalt annehmen. Unter Berücksichtigung dieser Spannungen lässt sich also das Problem der Formänderung des ursprünglich krummen Stabes auf die Untersuchung der Deformation eines anfänglich geraden zylindrischen Stabes zurückführen.

b) Greifen an dem ursprünglich krummen Stabe *nur Spannungen an den Enden* an, so lauten die Gleichungen des Gleichgewichts genau so wie die früheren (201), wenn in (120) gesetzt wird:

$$M_x = \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial G'}{\partial p'}, \quad M_y = \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial G'}{\partial q'}, \quad M_z = \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\partial G'}{\partial r'}.$$

Wiederum besteht eine kinetische Analogie, indem die entstehenden Gleichungen sich auch deuten lassen als die Bewegung eines Systems, an dem eine konstante Kraft angreift, das in einem festen Punkte unterstützt ist und in dem Bewegungen auftreten, die die Verteilung

167) Auf der in Fussn. 160 zitierten Arbeit von *G. Kirchhoff* fussend ist dieselbe von *A. Clebsch*, Elastizität, § 55, ausgearbeitet worden. *A. B. Basset*, der sie in verschiedenen Punkten bemängelt, hat ein anderes Verfahren entwickelt, das zu denselben Resultaten führt, Lond. Math. Soc. Proc. 23 (1892), p. 105, und Amer. J. of math. 17 (1895), p. 281.

168) *G. Kirchhoff*, Mechanik, p. 413 und p. 426; *A. Clebsch*, Elastizität, p. 229; *Clebsch-Saint-Venant*, Élasticité, p. 454.

der Massen bezüglich des Schwerpunktes nicht ändern. Ist insbesondere $\Gamma = 0$ und G' konstant, d. h. p', q', r' konstant, die ursprüngliche Form der Zentrallinie also eine Schraubenlinie, so haben wir den Fall der Bewegung eines starren Körpers, in welchem stationäre Bewegungen auftreten, die von *J. Larmor*[169]) und allgemeiner von *V. Volterra*[170]) untersucht sind. Die Gleichungen des Gleichgewichts des Stabes lassen sich auch deuten als die Gleichungen der Bewegung eines schweren festen Körpers, der in einem festen Punkte unterstützt ist und an dem ein Schwungrad befestigt ist, das sich frei um eine im Körper feste Axe drehen kann.

Die Theorie der Spiralfedern von symmetrischem Querschnitt ist von *W. Thomson-P. G. Tait*[171]) entwickelt worden; es zeigt sich, dass dieselben durch an den Enden angreifende Kräfte und Kräftepaare wiederum zu Schraubenlinien von gegebenem Steigungswinkel und Radius deformiert werden können. Den Fall, dass nur axial wirkende Kräfte angreifen, hatte schon *B. de Saint-Venant*[172]) behandelt.

c) Für Stäbe, die *ihrer ganzen Länge nach von Kräften beansprucht* werden, existieren nur wenig Lösungen[173]). Den Fall, dass der Stab durch gleichförmigen normalen Druck X in einer Ebene gebogen wird, behandelt *M. Lévy*[174]). Die Zentrallinie eines anfänglich geraden oder kreisförmigen Stabes geht in eine Kurve von der Krümmung

$$(205) \qquad \frac{1}{\varrho'} = \frac{X}{2\,EI}\, r^2 + \text{const.}$$

über, wo r der Abstand des Kurvenpunktes von einem festen Punkt der Ebene. Die Gleichung (205) ist von *G. H. Halphen*[175]) mittels elliptischer Funktionen integriert worden; eine Reihe von speziellen Lösungen hat *A. G. Greenhill*[176]) ausgearbeitet.

Für den Fall, dass die *Verschiebungen klein* sind, treten bedeutende Vereinfachungen in der *Kirchhoff*'schen Theorie ein. Allgemeinere Untersuchungen, die sich auf diesen Fall beziehen, sind angestellt von *B. de Saint-Venant*[177]) und *J. H. Michell*[178]). Spezielle

169) Lond. Math. Soc. Proc. 15 (1884), p. 178.

170) Torino Atti 30 (1895), p. 372; Acta math. 22 (1898), p. 201.

171) Nat. Phil. 2, p. 139.

172) Paris C. R. 17 (1843), p. 1020.

173) Siehe z. B. *W. Thomson-P. G. Tait,* Nat. Phil. 2, p. 166.

174) Paris C. R. 97 (1883), p. 694; J. de math. (3) 10 (1884), p. 1.

175) Paris C. R. 98 (1884), p. 422; J. éc. pol. 54 (1884), p. 183; Traité des fonctions elliptiques 2, Paris 1888, chap. 5.

176) Math. Ann. 52 (1899), p. 465.

177) Paris C. R. 17 (1843), p. 942, 1020.

Probleme, insbesondere solche, die einen Stab von der Form eines Ringsektors betreffen, sind behandelt von *M. Bresse*[179]), *E. Winkler*[180]), *H. Lamb*[181]), *J. H. Michell*[182]) und *H. Weitbrecht*[183]).

20. Unendlich dünne Platten[184]) **und Schalen**[185]). Eine unendlich dünne elastische *Platte* ist ein Körper, der im natürlichen Zustand von einer zylindrischen Fläche und zwei Normalschnitten derselben begrenzt wird, die einander so nahe sind, dass ihr Abstand gegenüber den anderen Abmessungen des Körpers als unendlich klein angesehen werden kann. Die bei Deformation auftretenden Verschiebungen können mit den endlichen Abmessungen der Platte vergleichbar sein. Die beiden Normalschnitte heissen die beiden *Seiten* der Platte; der Normalschnitt, der in gleicher Entfernung von den beiden Seiten liegt, heisst die *Mittelfläche.*

Eine *Schale* andererseits ist ein elastischer Körper, der ausser von einer Randfläche von zwei beliebigen parallelen Flächen begrenzt ist, so dass die Entfernung dieser beiden Flächen wiederum gegenüber den anderen Abmessungen des Körpers als unendlich klein angesehen werden kann. Wie vorhin heissen die beiden parallelen Flächen die Seiten der Schale, und die parallele Fläche, die in gleicher Entfernung von den Seiten liegt, heisst Mittelfläche.

Sowohl die Theorie der Platten wie die der Schalen gründet sich auf dieselben Prinzipien (vgl. Nr. **16**), auf denen sich die Theorie der unendlich dünnen Stäbe aufbaut, und wir beschränken uns darauf, nur die der Platten zu behandeln.

Die Punkte der Mittelfläche der Platte mögen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen werden, s_1 und s_2 seien die

---

178) Mess. of math. 19 (1890), p. 68.

179) Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes, Paris 1854.

180) Zivilingenieur 4 (1858), p. 232; vgl. den kritischen Bericht von *Todhunter* und *Pearson,* History of the theory of elasticity 2, p. 422.

181) London Math. Soc. Proc. 19 (1888), p. 365.

182) London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 130.

183) Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 383.

184) *F. Gehring,* De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae cristallinae definiuntur, Diss. Berlin 1860; *G. Kirchhoff,* Mechanik, p. 449; *A. Clebsch,* Elastizität, p. 264; Élasticité, p. 632.

185) *H. Aron,* J. f. Math. 78 (1874), p. 136; *Lord Rayleigh,* London Math. Soc. Proc. 13 (1882), p. 4; *E. Mathieu,* J. éc. pol. 51 (1883), p. 177; *A. E. H. Love,* London Phil. Trans. (A) 179 (1888), p. 491; Elasticity, 2. Aufl., p. 488; Elastizität, p. 586; *Lord Rayleigh,* London Math. Soc. Proc. 20 (1889), p. 372; *A. B. Basset,* London Phil. Trans. (A) 181 (1890), p. 433.

Koordinaten eines ihrer Punkte, P. Ferner mögen diejenigen Punkte der Platte, die P unendlich benachbart sind, im natürlichen Zustand auf ein rechtwinkliges Axensystem (1, 2, 3) mit dem Ursprung in P bezogen werden, so zwar, dass die Axe 1 der Axe s_1, die Axe 2 der Axe s_2 parallel ist, und die Axe 3 auf der Ebene $s_1 s_2$ senkrecht steht; x, y, z seien die Koordinaten eines jener Punkte bezüglich dieser Axen. Im deformierten Zustand wird die Mittelfläche der Platte im allgemeinen die Form einer krummen Fläche angenommen haben, und in dieser neuen Konfiguration der Platte seien die Punkte in unendlicher Nähe von P auf ein neues Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, das mit dem System (1, 2, 3) kongruent ist und seinen Ursprung in der neuen Lage von P hat; die x-Axe berühre die Kurve, in die die Axe 1 übergegangen ist, während die xy-Ebene die Fläche, die aus der Mittelfläche hervorgegangen ist, berührt. Bezüglich dieses Axensystems seien $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Koordinaten des Punktes, der im natürlichen Zustand die Koordinaten x, y, z bezüglich des Systems (1, 2, 3) hatte. Dann sind u, v, w unendlich klein und Funktionen von x, y, z; s_1, s_2, die den Befestigungsbedingungen genügen müssen.

Die *Kontinuitätsgleichungen* ergeben sich wie in der Theorie der Stäbe (vgl. Nr. **17**). Bezeichnen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ die Dehnungen der Elemente 1, 2; τ den unendlich kleinen Winkel, um den sich der von den beiden Elementen 1, 2 nach der Deformation eingeschlossene Winkel von einem Rechten unterscheidet, und p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2 die Komponenten der Drehung der Axen (x, y, z) bezüglich eben dieser Axen (x, y, z) beim Übergang von einem Punkte P zu einem anderen Punkte Q mit den Koordinaten $s_1 + ds_1$, s_2 bezw. s_1, $s_2 + ds_2$, so erhält man ohne weiteres die Identitäten:

$$(206)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s_1} + q_1(z + w) - r_1(y + v) + \varepsilon_1, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial s_1} + r_1(x + u) - p_1(z + w), \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial s_1} + p_1(y + v) - q_1(x + u); \end{cases}$$

$$(207)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s_2} + q_2(z + w) - r_2(y + v) + \tau(1 + \varepsilon_2), \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial s_2} + r_2(x + u) - p_2(z + w) + \varepsilon_2, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial s_1} + p_2(y + v) - q_2(x + u). \end{cases}$$

Diese Formeln gehen, wenn man Glieder höherer Ordnung ver-

nachlässigt und bedenkt, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \ldots,$$

über in die folgenden:

$$(208)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = q_1 z + \varepsilon_1, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -p_1 z + \tau, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -p_1 z, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -p_2 z + \varepsilon_2, \qquad r_1 = r_2 = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = p_1 y - q_1 x, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = p_2 y + p_1 x. \qquad p_1 + q_2 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn u_0, v_0, w_0 die Werte von u, v, w für $x = y = 0$ bezeichnen:

$$(209)\quad \begin{cases} x_x = q_1 z + \varepsilon_1, & y_z = \dfrac{d v_0}{d z}, \\ y_y = -p_2 z + \varepsilon_2, & z_x = \dfrac{d u_0}{d z}, \\ z_z = \dfrac{d w_0}{d z}, & x_y = -2 p_1 z + \tau. \end{cases}$$

Alle diese Grössen sind von x und y unabhängig, und derselben Bedingung genügen auch die Grössen $X_x, Y_y, \ldots X_y$. Daher lauten die *Gleichungen des Gleichgewichts eines Elements* der Platte:

$$(210)\qquad \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

und auf den beiden Grundflächen dieses Elements, die in den beiden Plattenseiten liegen, müssen die Bedingungen befriedigt sein:

$$(211)\qquad X_z = 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_z = 0,$$

vorausgesetzt, dass auf die Plattenseiten selbst äussere Spannungen nicht wirken bezw. solche zu vernachlässigen sind. Daraus folgt, dass die Bedingungen $X_z = Y_z = Z_z = 0$ im ganzen Elemente identisch befriedigt sein müssen.

Damit ergiebt sich nach den Entwicklungen von Nr. **11** b für jedes einzelne Plattenelement ein ebener Spannungszustand, für dessen Anwendung auf die Platten hier auf die Nr. **14** verwiesen sei. Man findet, dass die Gleichungen (210) und (211) zusammen mit den Befestigungsbedingungen zur Bestimmung von u_0, v_0, w_0 ausreichen. Sind u_0, v_0, w_0 als Funktionen der p, q, r bekannt, also die Formänderung des Plattenelements vollständig bestimmt, so kann man aus den sich damit ergebenden Spannungen Ausdrücke für die Resultanten und resultierenden Momente bilden. Von hier aus kann man schliesslich in gewohnter Weise zu den Gleichungen des Gleichgewichts und

der Bewegung der Platte übergehen, deren Lösung alsdann die Form der Mittelfläche im deformierten Zustande liefert.

21. Stabilität des Gleichgewichts. Die Fragen der Stabilität des Gleichgewichts in der Elastizitätstheorie besitzen eine ausserordentliche praktische Bedeutung; trotzdem mögen hier nur einige Andeutungen Platz finden, da es bisher an allgemeinen Resultaten auf diesem Gebiete mangelt.

a) Die *allgemeinen Prinzipien*, auf die sich diese Untersuchungen stützen, sind dieselben, die man bei allen derartigen Fragen zu Hülfe nimmt. Die Gleichgewichtszustände eines elastischen Systems, das gegebenen Kräften unterworfen ist, entsprechen denjenigen Konfigurationen des Systems, in denen die erste Variation der potentiellen Energie null ist; und die Zustände *stabilen* Gleichgewichts entsprechen jenen Konfigurationen, in denen die potentielle Energie ein absolutes Minimum besitzt. So kommt es, dass alle diejenigen Systeme, deren potentielle Energie stets positiv ist und die eine einzige Gleichgewichtslage zulassen, in dieser Lage sich im stabilen Gleichgewicht befinden. Eben dies trifft für einen elastischen Körper zu, dessen Abmessungen alle von derselben Grössenordnung sind. In dem Falle jedoch, wo eine oder zwei der Abmessungen eines elastischen Körpers unendlich klein gegenüber den anderen sind, gilt das Theorem der Eindeutigkeit der Gleichgewichtskonfiguration nicht mehr, wie man an Beispielen seit *L. Euler* und *D. Bernoulli* weiss und wie dies allgemein *G. H. Bryan*[186]) gezeigt hat.

b) Die älteste Behandlung eines Problems elastischer Stabilität ist die *Euler*sche Untersuchung der *Stabilität einer belasteten Säule*[186a]). Für einen durch axiale Kräfte an den Enden beanspruchten Stab kommen ausser der der einfachen Kompression entsprechenden geradlinigen Form auch die in Nr. 18 erwähnten Formen der elastischen Linie in Frage. Wenn der Winkel α, den die Tangente der elastischen Linie im Wendepunkt mit der Anfangslage der Zentrallinie einschliesst, klein ist, so lassen sich die Gleichungen (204) in erster Annäherung folgendermassen schreiben:

$$(212) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha \sqrt{\frac{EI}{\Gamma}} \sin\left(\zeta \sqrt{\frac{\Gamma}{EI}}\right), \\ \zeta = s, \end{cases}$$

so dass die elastische Linie angenähert durch eine Sinuskurve von kleiner Amplitude dargestellt wird. Da der Abstand zweier Wende-

186) *G. H. Bryan*, Cambridge Phil. Soc. Proc. 6 (1888), p. 199.

186a) *L. Euler*, Berlin Hist. de l'Acad. 13 (1757), p. 252.

punkte gleich $\pi\sqrt{\frac{EI}{\Gamma}}$ ist, so ergiebt sich, dass der Fall der Biegung eintreten kann, falls

(213) $$l^2\Gamma > \pi^2 EI,$$

wo l die Stablänge. Ist der Stab in $\zeta = 0$ eingespannt (so dass dort $\frac{d\zeta}{d\xi} = 0$), so ist Biegung möglich, falls

(214) $$l^2\Gamma > \tfrac{1}{4}\pi^2 EI;$$

sind beide Enden eingespannt, so lautet die Bedingung

(215) $$l^2\Gamma > 4\pi^2 EI.$$

So lange l kleiner ist als die kritische Länge, ist diese einfache Kompression der einzig mögliche Fall, und die geradlinige Form ist daher stabil. Sobald aber jene überschritten ist, wird sie instabil, da die potentielle Energie für die verbogene Form, wie sich zeigt[187]), kleiner ist als für die geradlinige Form: der Stab *knickt* zur Seite. Die Formel (213) bezeichnet man als die *Euler*sche *Knickungsformel*[188]). Die Stabilität der durch ihr Eigengewicht deformierten Säule haben *A. G. Greenhill*[189]) und *C. Chree*[190]) untersucht.

c) *A. G. Greenhill*[191]) hat für den *an den Enden beanspruchten geraden Stab* von symmetrischem Querschnitt die Stabilitätsbedingung aufgestellt. Wirken speziell nur Kräftepaare M an den Enden, so kommt für die Zentrallinie des deformierten Stabes ausser der geradlinigen Form die einer Schraubenlinie in Frage (vgl. Nr. **18**). Ist R der Radius, ϑ der Steigungswinkel der Schraubenlinie, so hat man:

$$M = EI\frac{\cos\vartheta}{R}, \quad 2\mu I r = M\sin\vartheta.$$

Der kritische Betrag von M, für den die Möglichkeit der Biegung zu einer Schraubenlinie eintritt, ist

(216) $$M = \frac{2\pi EI}{l},$$

187) Vgl. *A. E. H. Love*, Elasticity, 2. Aufl., p. 389. Ebendort (p. 392) wird auch gezeigt, dass die höheren Formen der elastischen Linie (mit Wendepunkten zwischen den Stabenden) sämtlich instabil sind. Im übrigen vgl. auch *M. Born*, Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, Preisschrift Göttingen 1906.

188) Die Knickungsformel ist neuerdings Gegenstand einer umfangreichen Diskussion zwischen *J. Kübler*, *C. J. Kriemler*, *L. Pilgrim* und *L. Prandtl* gewesen, Zeitschr. d. V. deutscher Ing. 44 (1900) und Zeitschr Math. Phys. 45—47 (1900—1902).

189) Cambridge Phil. Soc. Proc. 4 (1883) [1881], p. 65.

190) Cambridge Phil. Soc. Proc. 7 (1892), p. 283.

191) Proc. Inst. Mech. Engineers 1883, p. 182.

wo l die Stablänge; er entspricht dem Fall, dass R sehr klein, ϑ nahezu gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist und der Stab gerade einen Umlauf der Schraubenlinie bildet, so dass $\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{2\pi}{l}$. Die potentielle Energie des gebogenen Stabes ist z. B. bei kreisförmigen Querschnitt durch (203) gegeben, mithin, da $r = \frac{M}{\mu\varkappa}\sin\vartheta$, durch

(217) $$\frac{M^2}{4\mu I}\left[\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right].$$

Die potentielle Energie der geradlinigen Form hat dagegen den Wert

(218) $$\frac{M^2}{4\mu I},$$

ist also grösser als jene. Mithin ist die geradlinige Form für Werte von M, die über dem kritischen Betrage (216) liegen, instabil.

Die Stabilität eines *ringförmigen Stabes,* der durch gleichmässigen normalen Druck beansprucht wird, ist von *M. Lévy*[192]), die des seiner ganzen Länge nach auf elastischem Lager ruhenden geraden Stabes von *H. Zimmermann*[193]) untersucht worden. Die Kipperscheinungen bei einer *schmalen hochkant liegenden Schiene,* an deren Ende eine in ihrer Ebene wirkende Kraft angreift, sind von *A. G. M. Michell*[194]), *L. Prandtl*[195]) und *H. Reissner*[196]) behandelt; wenn die Last einen bestimmten Betrag überschreitet, ergiebt die Biegung in der Ebene der Schiene eine instabile Gleichgewichtslage, die Zentrallinie wird aus dieser Ebene herausgebogen und es tritt Torsion ein. Die analogen Erscheinungen bei einem I-Träger hat *S. Timoschenko*[197]) untersucht.

d) Für *Platten und Schalen* sind nur wenige Probleme elastischer Stabilität behandelt. Greifen an einer *Platte* Druckkräfte in ihrer Ebene an, so wird sie sich einfach kontrahieren, falls die Kräfte bezw. die Abmessungen der Platte nicht zu gross sind; anderenfalls wird Ausbiegung eintreten. Für den Fall der rechteckigen Platte, auf deren Kanten $x = \pm a$, $y = \pm b$ konstante Drucke P_1 bezw. P_2 pro Längeneinheit wirken, hat *G. H. Bryan* die Stabilitätsbedingung aufgestellt[198]). Die Gleichung für die Durchbiegung w_0 der Mittelebene

192) Paris C. R. 97 (1883), p. 694. Vgl. *A. E. H. Love,* Elasticity, 2. Aufl., p. 405.

193) Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Berlin 1906.

194) Phil. Mag. (5) 48 (1899), p. 298.

195) Kipperscheinungen, Diss. München 1899.

196) Berlin math. Ges. Sitzungsber. 3 (1904), p. 53.

197) Diss. Göttingen 1906.

198) *G. W. Bryan,* London Math. Soc. Proc. 22 (1891), p. 54; London Math. Soc. Proc. 25 (1894), p. 141.

lautet hier in zweiter Annäherung[199]):

$$D \underset{xy}{\Delta} \underset{xy}{\Delta} w_0 + P_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + P_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \tag{219}$$

wo

$$D = \frac{2}{3} \frac{E h^2}{1 - \eta^2}.$$

Ist die Platte an den Kanten einfach gestützt, so kann man Lösungen von folgender Form ansetzen:

$$w_0 = A \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin \frac{n\pi(x+b)}{2b}, \tag{220}$$

wo A eine (kleine) Konstante und m und n ganze Zahlen, die der Bedingung genügen

$$\frac{1}{4} D \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = P_1 \frac{m^2}{a^2} + P_2 \frac{n^2}{b^2}. \tag{221}$$

Die potentielle Energie der gebogenen Platte ist, wie die Rechnung zeigt, kleiner als die der in ihrer Ebene deformierten Platte. Soll also letztere stabil sein, so müssen P_1, P_2 so klein sein, dass Gleichung (221) durch irgend welche ganzzahlige Werte von m und n nicht befriedigt werden kann. Das Resultat ist von gewisser praktischer Bedeutung wegen seiner Anwendung auf Baukonstruktionen (Mauern, Schiffsplanken, Walzwerkprofile u. s. w.).

Die Frage der Stabilität einer *sehr langen zylindrischen Schale*, die unter konstantem äusserem Druck p steht, lässt sich in ähnlicher Weise erledigen[200]). Es ergiebt sich, dass der Querschnitt des Zylinders eine von der Kreisform abweichende (lemniskatische) Form annehmen kann, wenn $p > 3D/a^3$, wo a der Zylinderradius. Der Kreiszylinder wird dann instabil und klappt zusammen. Das Resultat lässt sich anwenden auf die Flammröhren der Dampfkessel, die, von der Feuerung auslaufend, zur Erzielung einer grösseren Heizfläche durch das Innere der Kessel hindurchgeführt werden und hier dem Kesseldampfdruck ausgesetzt sind.

---

199) Auf die die in Nr. **14**c entwickelte Theorie ergänzende zweite Annäherung, die in Nr. **20** zu besprechen gewesen wäre, ist im vorliegenden Referat nicht weiter eingegangen; vgl. die dort genannte Litteratur.

200) *G. H. Bryan,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 6 (1888), p. 287. Vgl. *A. B. Basset,* Phil. Mag. (5) 34 (1892), p. 221; *A. E. H. Love,* London Math. Soc. Proc. 24 (1893), p. 208.

(Abgeschlossen im Juli 1906.)

IV 26. SCHWINGUNGEN ELASTISCHER SYSTEME, INSBESONDERE AKUSTIK.

Von

H. LAMB

IN MANCHESTER.

Inhaltsübersicht.

c) Normalschwingungen begrenzter Luftmassen. Mitteilung von Schwingungen.
d) Theorie der Orgelpfeifen und der Resonatoren.
e) Störende Einflüsse.

8. Schwingungen elastischer fester Körper.
a) Wellen in einem unbegrenzten elastischen Medium.
b) Wellen in einem teilweise begrenzten festen Körper. Reflexion.
c) Normalschwingungen eines endlichen festen Körpers. Schwingungen einer Kugel.
d) Theorie des physikalischen Stosses.

Litteratur.

Lehrbücher.

A. Clebsch, Theorie der *Elastizität* fester Körper, Leipzig 1862.

— Théorie de *l'élasticité* des corps solides, avec des notes étendues de *B. de Saint-Venant,* Paris 1883.

W. F. Donkin, Acoustics, Oxford 1870.

P. Duhem, Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique, 2 Bde., Paris 1891.

H. Helmholtz, Lehre von den *Tonempfindungen,* Braunschweig 1862; 3. Aufl. Braunschweig 1870.

— Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. 3 (Die mathematischen Prinzipien der Akustik, herausgegeben von *A. König* und *C. Runge*), Leipzig 1898.

G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, *Mechanik,* 4. Aufl., Leipzig 1897.

H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1876; 3. Aufl. Cambridge 1906; deutsch von *Joh. Friedel,* Leipzig 1907.

J. L. de Lagrange, Mécanique analytique, Paris 1788; 2. éd. ebd. 1811/1813 = Oeuvres 11, 12, Paris 1888, 1889.

G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de *l'élasticité* des corps solides, Paris 1852; 2. Aufl. Paris 1866.

A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of *Elasticity,* 2 Bde., Cambridge 1892, 1893; 2. Aufl. (1. Bd.) Cambridge 1906; deutsch von *A. Timpe,* Leipzig 1907.

F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Mit einem Vorwort von *F. Klein.* Leipzig 1891. („$\Delta u + k^2 u = 0$".)

H. Poincaré, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1892.

S. D. Poisson, Traité de mécanique, 2. Aufl. Paris 1833.

Lord Rayleigh, Theory of *Sound,* 2 Bde., London 1877, 1878; deutsch von *F. Neesen,* Braunschweig 1880; 2. Aufl. London 1894, 1896.

B. Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, Braunschweig 1869.

B. Riemann-H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2 Bde., 4. Aufl. Braunschweig 1900, 1901 (zitiert als *Part. Diffgl.*).

E. J. Routh, Treatise on the *Stability* of a given state of motion, London 1877.

— Dynamics of a system of rigid bodies, Part 2, 5. Aufl. London 1892 (zitiert als „*Adv. rig. dyn.*"); deutsch von *A. Schepp,* Leipzig 1898.

Sir W. Thomson und *P. G. Tait,* Treatise on Natural Philosophy, Oxford 1869, 2. Aufl. Cambridge 1879—83. (Zitiert als „*Thomson-Tait*".)

E. T. Whittaker, Analytical *dynamics*, Cambridge 1904.

Monographien.

D. Bernoulli, Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes, Berlin Mém. de l'Acad. 1753.

H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. 10 (1901ff.), bisher 5 Hefte.

C. Chree, The equations of an isotropic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application, Cambridge Phil. Soc. Trans. 14 (1887), p. 250.

— Forced vibrations in isotropic elastic solid spheres and spherical shells, Cambridge Phil. Soc. Trans. 16 (1896), p. 14.

A. Clebsch, Über die Reflexion an einer Kugelfläche, J. f. Math. 61 (1863), p. 195.

J. M. C. Duhamel, Mémoire sur les vibrations des gaz dans des tuyaux cylindriques, coniques etc., J. de math. 14 (1849), p. 49.

S. Earnshaw, On the mathematical theory of sound, London Phil. Trans. 150 (1860) p. 133.

L. Euler, De la propagation du son, Berlin Hist. de l'Acad. 1759.

G. Green, On the reflexion and refraction of sound, Cambridge Phil. Soc. Trans. 6 (1837), p. 403 = Papers, p. 231.

— On the propagation of light in crystallized media, Cambridge Phil. Soc. Trans. 7 (1839), p. 121 = Papers, p. 291.

H. Helmholtz, Bericht über die die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten vom Jahre 1848 und 1849, Fortschr. d. Phys. 4 (1852), p. 101; 5 (1853), p. 93.

— Über Combinationstöne, Berlin Ber. 1856, p. 279.

— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, J. f. Math. 57 (1860), p. 1.

J. F. W. Herschel, Art. „Sound" in der Encyclopaedia Metropolitana, 1845.

P. Jaerisch, Über die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel, J. f. Math. 88 (1880), p. 131.

G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J. f. Math. 40 (1850), p. 51.

— Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt, Berlin Ber. 1879, p. 815.

— Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung, Ann. Phys. Chem. 134 (1868), p. 177.

J. L. de Lagrange, Recherches sur la nature et la propagation du son, Misc. Taur. 1 (1759) = Oeuvres 1, p. 37.

— Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son, Misc. Taur. 2 1760/61) = Oeuvres 1, p. 151.

H. Lamb, On the vibrations of an elastic sphere, London Math. Soc. Proc. 13 (1882), p. 189.

— On the vibrations of a spherical shell, London Math. Soc. Proc. 14 (1883), p. 50.

— On wave-propagation in two dimensions, London Math. Soc. Proc. 35 (1902), p. 141.

— On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, London Phil. Trans. 203 A (1903), p. 1.

J. Larmor, On the mathematical expression of the principle of Huygens, London Math. Soc. Proc. (2) 1 (1903), p. 1.

A. E. H. Love, Wave-motion with discontinuities at wave-fronts, London Math. Soc. Proc. (2) 1 (1903), p. 37.

— The propagation of wave-motion in an isotropic elastic medium, London Math. Soc. Proc. (2) 1 (1903), p. 291.

— Some illustrations of the mode of decay of vibratory motions, London Math. Soc. Proc. (2) 2 (1904), p. 88.

L. Pochhammer, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder, J. f. Math. 81 (1876), p. 324.

S. D. Poisson, Mémoire sur la théorie du son, J. éc. pol. 7 (1808), p. 319.

— Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, Paris Mém. de l'Acad. 3 (1818), p. 121.

— Mémoires sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 357; Addition, p. 623.

W. J. M. Rankine, On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance, London Phil. Trans. 160 (1870), p. 277 = Miscellaneons scientific papers, London 1881, p. 530.

B. Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gött. Abh. 8 (1859), p. 43 = Ges. math. Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, p. 157.

G. G. Stokes, On the dynamical theory of diffraction, Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1849), p. 1 = Papers 2, p. 243.

— An examination of the possible effect of radiation of heat on the propagation of sound, Phil. Mag. (4) (1851), p. 305 = Papers 3, p. 142.

— On the communication of vibrations from a vibrating body to a surrounding gas, London Phil. Trans. 158 (1868), p. 447 = Papers 4, p. 299.

J. W. Strutt (Lord *Rayleigh*), On the theory of resonance, London Phil. Trans. 161 (1870), p. 79 = Papers 1, p. 33.

— On the vibrations of a gas contained within a rigid spherical envelope, London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 93.

— Investigation of the disturbance produced by a spherical obstacle on the waves of sound, London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 253.

— Some general theorems relating to vibrations, London Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357 = Papers 1, p. 170.

— On the vibrations of approximately simple systems, Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 357; (4) 48 (1874), p. 258.

— On waves propagated along the plane surface of an elastic solid, London Math. Soc. Proc. (1) 17 (1885), p. 4 = Papers 2, p. 441.

— On the passage of waves through apertures in plane screens, and allied problems, Phil. Mag. (5) 43 (1897), p. 259 = Papers 4, p. 283.

— On the incidence of aerial and electric waves upon small obstacles in the form of ellipsoids or elliptic cylinders, Phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 28 = Papers 4 p. 305.

Gesammelte Werke.

Folgende werden häufiger zitiert:

G. Green, Mathematical papers, Cambridge 1871.

H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, 3 Bde., Leipzig 1882—1895.

G. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, 2 Bde., Leipzig 1882—1891.
Lord Rayleigh, Scientific papers, 4 vols., Cambridge 1899—1903.
G. G. Stokes, Mathematical and physical papers, 5 vols., Cambridge 1883—1905.

Vorbemerkung. Das vorliegende Referat läuft mit dem vorhergehenden (IV 25, *O. Tedone-A. Timpe*), das die Spezialausführungen zur Statik elastischer Körper behandelt, parallel. Es beschäftigt sich, nachdem die allgemeine Integrationstheorie der mathematischen Elastizitätslehre in IV 24 (*O. Tedone*) ihre Darstellung gefunden hat, mit der Lösung der *Probleme der elastischen Bewegung im einzelnen* unter fortwährender Bezugnahme auf die Ergebnisse des akustischen Experiments und unter Berücksichtigung der dabei auftretenden störenden Einflüsse. Dabei kommen als Grenzfälle auch die unelastischen Saiten und Membranen in bekannter Weise in Betracht, die nach ihrer statischen Seite billigerweise nicht in IV 25 (*O. Tedone-A. Timpe*), sondern bereits in IV 6 (*P. Stäckel*) ihre Berücksichtigung fanden[1].

Die Schwingungen der zu betrachtenden elastischen Systeme unterscheiden sich in den Einzelheiten sehr erheblich; doch befolgen sie gewisse allgemeine Gesetze, deren Bedeutung und deren Begründung bei Systemen von endlichem Freiheitsgrade — wie sie in der klassischen Dynamik betrachtet werden — sich äusserst leicht ergibt. In der Tat bestehen die Fortschritte der modernen Akustik zum grossen Teil in der Erkenntnis und Ausbildung derartiger allgemeiner Prinzipien und Analogien. Aus diesem Grunde steht ein Überblick über die Theorie der Schwingungen eines endlichen Systems voran, die im übrigen auch in IV 6, Nr. 9 und 20 (*P. Stäckel*) ihre Behandlung findet. Die Übertragung der hier erhaltenen Resultate auf Systeme mit unendlichem Freiheitsgrade beruht auf einer Art physikalischer Induktion. Der mathematische Beweis für die Zulässigkeit dieses Verfahrens und die Ermittelung der etwa in Betracht zu ziehenden Bedingungen erfordern besondere Untersuchungen, die neuerdings in der „Theorie der Integralgleichungen“ (vgl. II A 11, *S. Pincherle*) entwickelt werden. Im vorliegenden Referat wird hierauf systematisch nicht

1) Die ältere — für die im vorliegenden Referate behandelten Probleme ziemlich umfangreiche — Litteratur, insbesondere des 18. Jahrhunderts, hat hier keine systematische Berücksichtigung gefunden, um so weniger, als in dem Berichte von *H. Burkhardt* über Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen hierüber ein vollständiges Referat vorliegt. Nur gelegentlich ist darauf hingewiesen, bei welchem Autor und in welcher Form ein bestimmtes Problem zuerst auftritt, wobei dem Referenten einige Bemerkungen von Herrn *Burkhardt*, die dieser ihm mitzuteilen die Freundlichkeit hatte, besonders wertvoll waren.

eingegangen. Vgl. im übrigen auch II A 7a (*M. Bôcher*) und II A 7c (*A. Sommerfeld*).

Als im vorliegenden Referate durchgehends gebrauchte *Bezeichnungen* seien folgende gleich hier erwähnt: Es bezeichnen

λ und μ die *Lamé*schen Elastizitätskonstanten, E den *Young*schen Modul, η die *Poisson*sche Konstante.

Handelt es sich um eine „einfache Schwingung", so bezeichnet

$\frac{2\pi}{\sigma}$ die Periode, $\frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge.

1. Schwingungen eines Systems von endlichem Freiheitsgrade.

1a. Freie Schwingungen. α) Die Differentialgleichung, welche die Bewegung eines Massespunktes oder irgend eines dynamischen *Systems von einem Freiheitsgrade* in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage beherrscht, hat die Form

$$a\ddot{q} + cq = Q. \tag{1}$$

Bei einer *„freien"* Schwingung ist $Q = 0$ und

$$q = C\cos(\sigma t + \varepsilon), \tag{2}$$

wo $\sigma = (c/a)^{\frac{1}{2}}$, während C, ε willkürliche Konstanten (IV 6, Nr. 9, *P. Stäckel*). Die Gleichung (2) stellt eine *„einfache"* [2]) *Schwingung* dar, deren „Periode" $2\pi/\sigma$ nur von der Beschaffenheit des Systems abhängt, während die *„Amplitude"* C und die *„Phasenkonstante"* ε durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Der reziproke Wert $(\sigma/2\pi)$ der Periode heisst die *„Frequenz"* oder *„Schwingungszahl"* [3]).

β) Es handle sich nun um ein *System von n Freiheitsgraden* [4]). Werden die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots q_n$ so gewählt, dass sie in der Gleichgewichtslage verschwinden, so lassen sich die Ausdrücke für

---

2) *H. Helmholtz*, Ann. Phys. Chem. 99 (1856), p. 501 = Ges. Abh. 1, p. 267. *W. Thomson*, Edinb. Roy. Soc. Trans. 22 (1861), p. 401 = Math. and phys. papers 3, p. 261 schlägt die Bezeichnung „simple harmonic" vor, die von den meisten englischen Autoren übernommen ist. *A. Schuster*, Phil. Mag. (5) 37 (1894), p. 512, spricht sich für die Benennung „simple" aus. Nach einem in der physiologischen Akustik allgemein angenommenen Prinzip (*Ohms* Prinzip) ruft eine einfache Schwingung die Empfindung eines reinen Tons hervor.

3) Eine eigene Bezeichnung für σ würde sehr erwünscht sein. *Lord Kelvin* und *G. H. Darwin* haben in ihren Untersuchungen über die Gezeiten den Namen „speed" vorgeschlagen.

4) Die allgemeine Theorie nimmt ihren Ausgang von *Lagrange*, Méc. anal.; weiter ausgebildet ist sie von *Thomson-Tait, Lord Rayleigh* und *E. J. Routh*. Neuere systematische Darstellungen sind gegeben von *F. Pockels*, „$\Delta u + k^2 u = 0$", und *H. Helmholtz*, Vorl. 3; *E. T. Whittaker*, Dynamics, chap. 7. Vgl. im übrigen IV 6, Nr. 9 (*P. Stäckel*).

die kinetische und die potentielle Energie im Falle genügend kleiner (sog. unendlich kleiner) Verschiebungen folgendermassen schreiben:

$$(3)\qquad T = \tfrac{1}{2}\sum a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \qquad V = \tfrac{1}{2}\sum c_{rs}q_r q_s$$

$$(a_{rs} = a_{sr}, \quad c_{rs} = c_{sr}; \quad r, s = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Die Funktion T und, wenn die Gleichgewichtslage, wie angenommen wurde, durchaus stabil ist, auch V sind wesentlich positiv. Die Koeffizienten a_{rs} heissen die *„Trägheitskoeffizienten"* (engl. *„coefficients of inertia"*)[5]) und c_{rs} die *„Stabilitätskoeffizienten"* (engl. *„coefficients of stability"*)[6]). Die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen (IV 6, Nr. 9, *P. Stäckel*) haben dann die Form

$$(4)\quad a_{1r}\ddot{q}_1 + a_{2r}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{nr}\ddot{q}_n + c_{1r}q_1 + c_{2r}q_2 + \cdots + c_{nr}q_n = Q_r,$$

wo Q_r eine verallgemeinerte äussere Kraftkomponente. Bei einer *freien* Schwingung hat man $Q_1, Q_2, \ldots Q_n = 0$; der Ansatz

$$q_r = A_r e^{i\sigma t}$$

führt zu n Gleichungen vom Typus

$$(5)\quad (c_{1r} - \sigma^2 a_{1r})A_1 + (c_{2r} - \sigma^2 a_{2r})A_2 + \cdots + (c_{nr} - \sigma^2 a_{nr})A_n = 0.$$

Die zulässigen Werte von σ^2, n an der Zahl, sind gegeben durch die Determinantengleichung

$$(6)\qquad |c_{rs} - \sigma^2 a_{rs}| = 0.$$

In Folge des wesentlich positiven Charakters von T und V sind sie reell und positiv[7]). Zu einem bestimmten Wurzelwert bestimmen die Gleichungen (5) die zugehörigen Werte der Verhältnisse der Konstanten $A_1, A_2, \ldots A_n$. Kombiniert man die Lösungen, die zwei gleichen Werten von σ entgegengesetzten Vorzeichens entsprechen, so erhält man die reelle Lösungsform

$$(7)\qquad q_r = C\alpha_r \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (r = 1, 2, 3, \ldots n),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ein bestimmtes System von Größen, deren Verhältnisse die oben bezeichneten Werte besitzen, während C und ε zwei willkürliche Konstante sind. Diese Lösung für sich stellt eine Bewegung dar, bei der jedes Teilchen des Systems eine einfache Schwingung von der Periode $2\pi/\sigma$ ausführt. Die Amplituden der verschiedenen Teilchen stehen in festem Verhältnis zu einander, und

---

5) *J. C. Maxwell*, Electricity and magnetism, 1. Aufl., Oxford 1873, § 565, nennt a_{rr} ein „Trägheitsmoment" und a_{rs} ein „Trägheitsprodukt".

6) *H. Poincaré*, Acta math. 7 (1885), p. 271.

7) Vgl. z. B. *Thomson-Tait*, 2. Aufl. § 343 *k. l*; *E. J. Routh*, Adv. rig. dyn. § 58.

ihre Phasen stimmen überein; willkürlich sind nur der absolute Wert der Amplitude, der von C abhängt, und die Phasenkonstante ε. Eine Schwingung von diesem Charakter heisst eine *„Normalschwingung"* oder *„Eigenschwingung"* (engl. *„normal mode"*, *„free mode of vibration"*) *des Systems*[8]); die Zahl solcher Normalschwingungen ist gleich der Zahl n der Freiheitsgrade.

Eine gewisse Modifikation erfahren diese Sätze, wenn die Gleichung in σ^2 gleiche Wurzeln besitzt. Die Minoren der Determinante in (6) verschwinden dann, und die Grössen α_r werden unbestimmt. Von den Normalschwingungen sind dann zwei oder mehr ihrem Charakter nach bis zu einem gewissen Grade unbestimmt, und es können elliptische Schwingungen der einzelnen Teilchen auftreten wie z. B. beim sphärischen Pendel[9]).

γ) Die *allgemeinste freie Bewegung des Systems,* die beliebigen Anfangsbedingungen entspricht, erhält man durch Überlagerung der n Normalschwingungen, jede genommen mit willkürlicher Amplitude und Phase; man hat also

$$(8)\qquad q_r = \alpha_r \vartheta + \alpha_r' \vartheta' + \alpha_r'' \vartheta'' + \cdots, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots n);$$

hierin ist

$$(9)\qquad \begin{gathered} \vartheta = C \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad \vartheta' = C' \cos(\sigma' t + \varepsilon'), \\ \vartheta'' = C'' \cos(\sigma'' t + \varepsilon''), \ldots, \end{gathered}$$

wo $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ die n Wurzeln von (6). Die Koeffizienten von ϑ, $\vartheta', \vartheta'', \ldots$ in (8) unterliegen den sogenannten *Orthogonalitätsbedingungen*[10]):

$$(10)\qquad \begin{gathered} \sum_{r,s} a_{rs} \alpha_r \alpha_s' = 0, \quad \sum_{r,s} c_{rs} \alpha_r \alpha_s' = 0, \\ (r, s = 1, 2, 3, \ldots n), \end{gathered}$$

unter σ, σ' zwei ungleiche Wurzeln von (6) verstanden. Diese Gleichungen sind von hervorragender Bedeutung als Muster der sogenannten *„Integraleigenschaften"* (engl. *„conjugate properties"*) der *„Normalfunktionen"* oder *„Eigenfunktionen"* (z. B. der Kreis-, der Kugel-

8) *Lord Rayleigh,* Sound, § 86; *Thomson-Tait,* § 338, schlagen die Bezeichnung „fundamental mode" („Fundamentalschwingung") vor, im Gegensatz zu der in der Akustik allgemein üblichen Ausdrucksweise, wonach dieser Name für die Normalschwingung der längsten Periode reserviert ist.

9) Die korrekte Theorie des Falls gleicher Wurzeln lieferte *K. Weierstrass,* Berlin Ber. 1858, p. 207 = Math. Werke 1, p. 233; *E. J. Routh,* Stability, p. 8; *Thomson-Tait,* 2. Aufl., § 343 *m.* Sowohl bei *Laplace* wie bei *Lagrange* ist die Behandlung der Frage fehlerhaft. Vgl. IV 6 (*P. Stäckel*), Anm. 94[b].

10) Vgl. z. B. *H. Helmholtz,* Vorl., p. 21.

und *Bessel*schen Funktionen), wie sie beim Übergang zu verschiedenen Arten kontinuierlicher Systeme auftreten. (Vgl. Nr. **1**f.)

Die tatsächliche Bestimmung von $C, C', C'', \ldots$ und von $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ aus den Anfangsbedingungen geschieht folgendermassen. Setzt man

$$C \cos \varepsilon = H, \quad - C \sin \varepsilon = K, \text{ u. s. w.},$$

so wird

$$(11) \begin{cases} \alpha_r H + \alpha_r' H' + \alpha_r'' H'' + \cdots = [q_r]_{t=0}, \\ \sigma \alpha_r K + \sigma' \alpha_r' K' + \sigma'' \alpha_r'' K'' + \cdots = [\dot{q}_r]_{t=0}. \end{cases} \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

Die Werte von $H, H', H'', \ldots$ und von $K, K', K'', \ldots$ lassen sich dann mit Hilfe der Formeln (10) sofort hinschreiben. Man hat hier wieder die Analoga zu den Sätzen, mittelst deren im Falle kontinuierlicher Systeme willkürliche Funktionen nach „*Normalfunktionen*" von bestimmtem Typus entwickelt werden (vgl. z. B. die *Fourier*sche Entwicklung)[11].

δ) Die *Theorie der Normalschwingungen* steht in enger Beziehung zu der der quadratischen Formen (I B 2, Nr. **3**, *W. F. Meyer*). Da T wesentlich positiv ist, so ist es möglich, durch reelle lineare Substitution T und V gleichzeitig in Summen von Quadraten zu verwandeln. Die erforderliche Substitution ist in der Tat gegeben durch (8); vermöge (10) ergibt sich:

$$(12) \begin{cases} 2T = a\dot{\vartheta}^2 + a'\dot{\vartheta}'^2 + a''\dot{\vartheta}''^2 + \cdots, \\ 2V = c\vartheta^2 + c'\vartheta'^2 + c''\vartheta''^2 + \cdots, \\ (a = \sum_{r,s} a_{rs}\alpha_r\alpha_s, \quad c = \sum_{r,s} c_{rs}\alpha_r\alpha_s, \text{ u. s. w.}). \end{cases}$$

Da überdies Stabilität postuliert wird, so sind sowohl die Koeffizienten $c, c', c'', \ldots$ als auch $a, a', a'', \ldots$ notwendig positiv. Die neuen Koordinaten $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \ldots$ heissen die „*Normalkoordinaten*" des Systems[12]. Bei jeder Normalschwingung variiert nur eine einzige von diesen Koordinaten.

Da über die absoluten Werte von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (im Gegensatz zu den Werten der Verhältnisse) noch verfügt werden kann, so kann

11) *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357 = Papers 1, p. 170.

12) Auch *Hauptkoordinaten* genannt, vgl. IV 6 (*P. Stäckel*), Anm. 95. Sie wurden zum ersten Mal explizite in die Dynamik eingeführt von *Thomson-Tait*, (Nat. Phil. 1. ed. 1867, = 2. Aufl., § 337). Physikalisch kennzeichnen sich die Normalkoordinaten dadurch, dass ein Impuls des einzelnen Normaltypus eine Anfangsbewegung nur von demselben Typus hervorruft, bezw. dadurch, dass eine stete äussere Kraft des einzelnen Normaltypus eine Verschiebung allein desselben Typus aufrecht erhält.

man die Bedingungen einführen:

(13) $$a, a', a'', \ldots = 1.$$

Die entsprechenden Werte von $c, c', c'', \ldots$ sind dann bezüglich gleich den Wurzeln $\sigma^2, \sigma'^2, \sigma''^2, \ldots$ von (6).

Die Normalschwingungen sind durch eine wichtige Extremaleigenschaft ausgezeichnet. Wenn das System durch geeignete reibungslose Führungen gezwungen wird, eine von einer Normalschwingung etwas abweichende Schwingung auszuführen, so unterscheidet sich die Frequenz von der jener um kleine Grössen zweiter Ordnung; überdies liegt die eintretende Frequenz zwischen der grössten und der kleinsten „natürlichen" Frequenz. Dieser Umstand ermöglicht ein von einem angenommenen Schwingungstypus ausgehendes praktisches Näherungsverfahren zur Ermittlung der kleinsten Frequenz eines Systems in Fällen, wo die genaue Bestimmung unausführbar sein würde[14]). Andererseits kann man aus obigem Satz schliessen, dass eine Vermehrung der Trägheit des Systems im allgemeinen mit einer Verkleinerung der natürlichen Frequenzen verknüpft ist, während erhöhte Elastizität erhöhte Frequenzen zur Folge hat[13]) [15]).

ε) Anstatt von den Lagrangeschen Gleichungen (4) auszugehen, empfiehlt es sich zuweilen, auf die *allgemeine Variationsformel* zurückzugreifen:

(14) $$\sum m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) + \delta V = 0,$$

wo x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Teilchens m des Systems. In verallgemeinerten Koordinaten ausgedrückt lautet diese Gleichung:

(15) $$\sum_r (a_{1r}\ddot{q}_1 + a_{2r}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{nr}\ddot{q}_n + c_{1r}q_1 + c_{2r}q_2 + \cdots + c_{nr}q_n)\,\delta q_r = 0.$$

---

13) *Lord Rayleigh,* London Math. Soc. Proc. 4 (1883), p. 357 = Papers 1, p. 170 = Sound, § 88. Auf die Extremaleigenschaft bezieht sich bereits eine Bemerkung von *Lagrange* (Fussn. 4).

14) Beispiele bei *Lord Rayleigh,* Sound, §§ 89, 102 u. s. w. Allgemeine Formeln, die die Abweichung des wirklichen von dem angenommenen Schwingungstypus näherungsweise darstellen, gibt *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 357 und (4) 48 (1874), p. 258; desgl. Sound, §§ 90, 91. Siehe auch *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 566 = Papers 4, p. 407.

15) Der Einfluss partieller Gebundenheit, durch die das System nicht auf einen einzigen Freiheitsgrad beschränkt wird, ist untersucht worden von *E. J. Routh,* Adv. rig. dyn. § 67; *Lord Rayleigh,* Sound, 2. Aufl. § 92a.

16) *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 434 = Papers 1, p. 186; Sound, § 94.

Die Annahme eines Zeitfaktors $e^{i\sigma t}$ führt auf

$$(16) \qquad \sum_r \{(c_{1r} - \sigma^2 a_{1r}) q_1 + (c_{2r} - \sigma^2 a_{2r}) q_2 + \cdots + (c_{nr} - \sigma^2 a_{nr}) q_n\} \delta q_r = 0.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von σ^2 und die entsprechenden Werte der Verhältnisse $q_1 : q_2 : \ldots : q_n$ sind dieselben wie bei dem Problem, die stationären Werte der Funktion

$$\frac{V(q_1, q_2, \cdots q_n)}{T(q_1, q_2, \cdots q_n)}$$

zu finden[17]). Setzt man ferner in (16)

$$\frac{q_1}{\alpha_1} = \frac{q_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{q_n}{\alpha_n}; \quad \frac{\delta q_1}{\alpha_1'} = \frac{\delta q_2}{\alpha_2'} = \cdots = \frac{\delta q_n}{\alpha_n'},$$

so kommt man auf die Orthogonalitätsbedingungen (10) zurück[18]).

1b. Erzwungene Schwingungen. Der wichtigste Fall erzwungener Schwingungen liegt vor, wenn die eingeprägten äusseren Kräfte Q_r in (4) den einfachen Typus $\cos(\sigma t + \varepsilon)$ haben; der allgemeinste Fall lässt sich aus diesem durch Superposition nach dem *Fourier*schen Satz ableiten. Vom analytischen Standpunkt empfiehlt es sich, Q_r als Produkt aus $e^{i\sigma t}$ und einem komplexen Koeffizienten anzunehmen[18a]). Da die Gleichungen linear sind, wird $e^{i\sigma t}$ weiterhin in allen Formeln als Faktor auftreten; es wird nicht nötig sein, ihn stets ausdrücklich herauszuheben. Um die Resultate zu deuten, hat man zum Schluss die imaginären Glieder zu streichen.

α) Bei *einem Grade der Freiheit* folgt aus (1)

$$(17) \qquad q = \frac{Q}{c - \sigma^2 a}.$$

Es handelt sich um eine einfache Schwingung von der Periode $2\pi/\sigma$ der äusseren Kraft Q; die Phase ist die gleiche wie die von Q oder ihr entgegengesetzt, je nachdem $\sigma^2 \lessgtr c/a$, d. h. je nachdem die eingeprägte Kraft eine kleinere oder eine grössere Frequenz besitzt als die für $Q = 0$ eintretende freie Schwingung[19]). Ist σ klein, so nähert sich die Verschiebung q dem dem Gleichgewicht entsprechenden Wert

---

17) Dies bemerkte bereits *Lagrange,* Méc. anal., 2ième partie, 6ième section, § 6. Siehe auch *H. Poincaré*, J. de math. (5) 2 (1896), p. 83.

18) Die Methode ist von *Lord Rayleigh* häufig in Fällen continuierlicher Systeme angewandt worden.

18a) Vgl. IV 6, Nr. **20** a (*P. Stäckel*), Fussn. 250.

19) *Th. Young*, Nicholson's Journ. of nat. phil. 35 (1813), p. 145 (gezeichnet *E. F. G. H.*) = Miscellaneous works 2, London 1854, p. 262. Vgl. IV 6, Nr. 9 (*P. Stäckel*).

Q/c, wonach die Trägheit des Systems verhältnismässig unbedeutend ist; ist dagegen σ gross, so strebt q dem Wert $-Q/\sigma^2 a$, d. h. demselben Wert zu, der sich bei Vernachlässigung der potentiellen Energie ergeben würde.

Die Lösung versagt, wenn die Periode der eingeprägten Kraft genau mit der Periode der freien Schwingung übereinstimmt ($\sigma^2 = c/a$); an Stelle der Gleichung (17) tritt dann die Formel

18) $$q = -\frac{iQt}{2\sigma a},$$

die eine Schwingung von ständig wachsender Amplitude darstellt. Da die Gleichung (1) selbst im allgemeinen nur näherungsweise gilt, so hat diese Lösung praktisch nur die Bedeutung, dass sie den anfänglichen Verlauf der erzwungenen Schwingung schildert.

β) Bei *n Graden der Freiheit* hat man aus Gl. (5)

(19) $$(c_{1r} - \sigma^2 a_{1r}) q_1 + (c_{2r} - \sigma^2 a_{2r}) q_2 + \cdots + (c_{nr} - \sigma^2 a_{nr}) q_n = Q_r$$
$$(r = 1, 2, 3, \cdots n);$$

hieraus

(20) $$D \cdot q_r = \alpha_{1r} Q_1 + \alpha_{2r} Q_2 + \cdots + \alpha_{nr} Q_n,$$

wo

(21) $$D = |c_{rs} - \sigma^2 a_{rs}|,$$

während $\alpha_{1r}, \alpha_{2r}, \ldots \alpha_{nr}$ die Minoren der r^{ten} Reihe dieser Determinante bezeichnen. Die Bewegung jedes Teilchens des Systems wird im allgemeinen in einer einfachen Schwingung von der eingeprägten Periode bestehen, und es herrscht vollständige Phasenübereinstimmung. Wie vorhin wird die Amplitude sehr gross, wenn σ sich dem Werte einer Wurzel von $D = 0$ nähert, d. h. wenn die eingeprägte Periode mit der Periode einer Eigenschwingung beinahe übereinstimmt.

Da $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$, so ist der Koeffizient von Q_s in dem Ausdruck für q_r derselbe wie der von Q_r in dem Ausdruck für q_s. Auf diese Beziehung gründen sich mehrere wichtige Reziprozitätssätze, die von *H. Helmholtz* und von *Lord Rayleigh* entdeckt wurden[20]).

---

20) Relationen dieser Art sind implicite in *Hamiltons* Prinzip der variierenden Wirkung enthalten. Ihre physikalische Interpretation für den Fall der Luftschwingungen gab zuerst *Helmholtz*, J. f. Math. 57 (1860), p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 333. Eine Übertragung auf die Optik giebt *Helmholtz*, Handbuch der physiol. Optik, 1856, p. 169 = Ges. Abh. 2, p. 136. Die Verallgemeinerung der Theorie mit Einbeziehung des Falls von Reibungskräften verdankt man Lord *Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 366 = Papers 1, p. 149; Sound 1, § 107. Über die Beziehung zu *Hamiltons* Princip vgl. *Helmholtz*, J. f. Math. 100 (1886),

Eine ähnliche Theorie gilt für den Fall, wo nur einzelnen Koordinaten Schwingungen von gegebener Amplitude und Periode durch Kräfte von entsprechendem Typus eingeprägt werden, während die übrigen Koordinaten frei sind[21]. Die eintretende Bewegung ist endlich und bestimmt, es sei denn, dass die Periode der eingeprägten Schwingung mit einer der Eigenschwingungen zusammenfiele, die das System annähme, wenn die erstgenannten Koordinaten durch geeignete Zwangskräfte konstant gehalten würden[22].

γ) In sämtlichen vorstehenden Fällen sind die freien Schwingungen mit ihren willkürlichen Konstanten über die erwungenen Schwingungen zu überlagern, wenn die *allgemeinsten Schwingungen*, die bestimmten Anfangsbedingungen genügen, dargestellt werden sollen.

1c. Einfluss der Reibung[22a]. α) Führt man im Falle eines Systems von *einem Freiheitsgrade* eine Reibungskraft ein, die der Geschwindigkeit proportional ist, so tritt an Stelle von Gleichung (1)

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q, \tag{22}$$

wo die Koeffizienten a, b, c positiv sind. Bei einer *freien Schwingung* ist $Q = 0$, und falls $b^2 < 4ac$, ist die Lösung

$$\left\{\begin{aligned} & q = Ce^{-t/\tau}\cos(\sigma t + \varepsilon), \\ & \tau = 2a/b, \quad \sigma = \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

wo C, ε willkürlich. Sie stellt eine einfache Schwingung dar, deren Amplitude asymptotisch gegen null abnimmt nach dem Gesetz $e^{-t/\tau}$.[23] Die Konstante τ hat man als den „*Dämpfungsmodul*“ der Oszillationen bezeichnet. Ist τ gross im Vergleich zu derjenigen Grösse, die bei fehlender Reibung die Periode sein würde, so ist der Einfluss der Reibung auf die Periode klein von zweiter Ordnung und in der Regel zu vernachlässigen[24].

---

p. 242, und *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 19 (1888), p. 144, der zeigt, dass diese Sätze schon in einer Formel von *Lagrange*, Méc. anal. implizite enthalten sind.

21) *Lord Rayleigh*, Sound, § 105.

22) *Lord Rayleigh*, Sound, 2. Aufl., § 166 a.

22a) Vgl. wieder die Darstellung in IV 6, Nr. **20** (*P. Stäckel*).

23) Eine graphische Darstellung mittelst einer logarithmischen Spirale giebt *P. G. Tait*, Edinb. Proc. 6 (1867), p. 221 = Scientific papers **1**, Cambridge 1898, p. 78.

24) Wenn $b^2 \geqq 4ac$, so sind die Schwingungen „aperiodisch“; dieser Fall ist in der Akustik von geringem Interesse.

Im Falle einer *erzwungenen Schwingung* ergibt sich, wenn Q wie $e^{i\sigma t}$ variiert[24a]),

$$q = \frac{Q}{c - \sigma^2 a + i\sigma b}. \tag{24}$$

Sonach wird eine Kraft $Q = H \cos \sigma t$ folgende Schwingung liefern:

$$\begin{cases} q = \dfrac{H}{Rc} \cos(\sigma t - \varepsilon), \\ R = \left\{ \left(1 - \dfrac{\sigma^2 a}{c}\right)^2 + \dfrac{\sigma^2 b^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \dfrac{\sigma b}{c - \sigma^2 a}. \end{cases} \tag{25}$$

Die Amplitude steht zu dem dem Gleichgewicht entsprechenden Wert im Verhältnis $1 : R$, und die Phase bleibt hinter derjenigen der freien Schwingung um einen Betrag ε zurück, wo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ bezw. $\frac{1}{2}\pi < \varepsilon < \pi$, je nachdem $\sigma \lesseqgtr (c/a)^{\frac{1}{2}}$. Ist die Reibung verhältnismässig klein, so ist die Amplitude am grössten, wenn die eingeprägte Periode mit der freien Periode übereinstimmt; sie ist dann gleich $H/\sigma b$, also gross im Vergleich zu dem dem Gleichgewicht entsprechenden Wert H/c. Die Resonanz ist um so stärker und wird um so schärfer ausgeprägt, je kleiner der Wert des Reibungskoeffizienten b.[25])

Um willkürlichen Anfangsbedingungen Rechnung tragen zu können, hat man über (25) die freie Schwingung (23) zu überlagern. Ihr Einfluss verschwindet allmählich mit wachsendem t.

β) Im allgemeinen Fall von n *Freiheitsgraden* erhält man, wenn man in (4) Glieder hinzufügt, die den Geschwindigkeiten proportional sind:

$$\begin{cases} a_{1r}\ddot{q}_1 + a_{2r}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{nr}\ddot{q}_n + B_{1r}\dot{q}_1 + B_{2r}\dot{q}_2 + \cdots + B_{nr}\dot{q}_n \\ \qquad + c_{1r}q_1 + c_{2r}q_2 + \cdots + c_{nr}q_n = Q_r \\ \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots n). \end{cases} \tag{26}$$

Setzt man[26])

$$b_{rs} = b_{sr} = \tfrac{1}{2}(B_{rs} + B_{sr}), \quad \beta_{rs} = -\beta_{sr} = \tfrac{1}{2}(B_{rs} - B_{sr}),$$

24a) Den allgemeinen Fall, wo Q beliebig, erhält man hieraus durch Superposition nach dem *Fourier*schen Satz. Von besonderem Interesse sind die von *S. Exner* und *J. Pollak*, Zeitschr. f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane 32 (1903), p. 304, untersuchten Schwingungen, bei denen in gleichen Zeitabständen die Bewegungsrichtung plötzlich umgekehrt wird; vgl. *G. Jäger*, Wien Ber. 113 (1904), p. 314. Ähnliche Untersuchungen bieten sich vielfach in der Elektrotechnik; vgl. z. B. *L. Puluj*, Wien Ber. 100 2a (1891), p. 767 = Elektrotechn. Zeitschr. 12 (1891), p. 4898 („courants redressés").

25) *H. Helmholtz*, Tonempf. Beilage X.

26) *Thomson-Tait*, 2. Aufl. (1879), § 345VI.

so lassen sich die Gleichungen (26) folgendermassen schreiben:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_r} + \dfrac{\partial F}{\partial \dot q_r} + \beta_{r1}\dot q_1 + \beta_{r2}\dot q_2 + \cdots + \beta_{rn}\dot q_n + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r, \\ F = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{r,s} b_{rs}\dot q_r \dot q_s. \end{cases}$$

Die von F abhängenden Glieder sind so beschaffen, als ob sie von Widerständen herrührten, die den absoluten Geschwindigkeiten proportional sind, oder von Widerständen, die den relativen Geschwindigkeiten proportional sind und dem Gesetz von Aktion und Reaktion folgen [27]. Sie heissen daher die „*Reibungsglieder*". Die Glieder, die mit den Koeffizienten β_{rs} behaftet sind, sind dieselben, wie sie bei Systemen mit verborgenen Bewegungen (vgl. IV 6, Nr. **20**b, *P. Stäckel*) vorkommen; man bezeichnet sie als die „*gyroskopischen*" Terme [26]. Sie sind in der Akustik von geringer Bedeutung und werden hier nicht weiter in Betracht gezogen werden [28].

Die Gleichung

$$(28)\qquad \frac{d}{dt}(T+V) = -2F + \sum_r Q_r \dot q_r,$$

die aus (27) folgt, zeigt, dass Energie im Betrage von $2F$ pro Zeiteinheit zerstreut wird. Die Funktion F heisst die „*Zerstreuungs-*" oder „*Dissipationsfunktion*" [29] („dissipative function" oder „dissipativity") [30].

Streicht man die gyroskopischen Terme, schreibt also in (26) b_{rs} statt B_{rs} und macht für eine freie Schwingung den Ansatz $q_r = C_r e^{\lambda t}$, so erhält man

$$(29)\quad \begin{cases} (a_{1r}\lambda^2 + b_{1r}\lambda + c_{1r})C_1 + (a_{2r}\lambda^2 + b_{2r}\lambda + c_{2r}C_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (a_{nr}\lambda^2 + b_{nr}\lambda + c_{nr})C_n = 0. \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, 3, \ldots n). \end{cases}$$

Die $2n$ zulässigen Werte von λ ergeben sich durch Nullsetzen der (symmetrischen) Determinante der Koeffizienten:

$$(30)\qquad |a_{rs}\lambda^2 + b_{rs}\lambda + c_{rs}| = 0.$$

---

27) *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 146 = Papers 1, p. 176; Sound, § 81.

28) Glieder dieser Art sind von besonderer Bedeutung in der Theorie von Ebbe und Flut, wie sie von *Laplace, Lord Kelvin, G. H. Darwin* und *S. Hough* entwickelt worden ist (vgl. VI 1 6, *Darwin - Hough*). Ein akustisches Beispiel wird durch die freien Schwingungen einer rotierenden Glocke geliefert (*G. H. Bryan*, Camb. Phil. Soc. Proc. 7 (1890), p. 101).

29) Sie wurde in der Akustik eingeführt von *Lord Rayleigh* (Fussnote 27).

30) *Thomson-Tait*, § 345II.

Da die Funktionen T, V, F nach Voraussetzung wesentlich positiv sind, so sind die Wurzeln dieser Gleichung entweder reell und negativ oder komplexe Grössen mit negativem reellem Bestandteil[31]). Im letzteren Fall lassen sich die Lösungen, die zwei konjugierten Wurzeln entsprechen, zu einer reellen Lösungsform zusammenfassen:

$$(31) \qquad q_r = C\alpha_r e^{-t/\tau} \cos(\sigma t - \varepsilon_r + \varepsilon), \qquad (r = 1, 2, 3, \dots n),$$

wo $\sigma, \tau, \alpha_r, \varepsilon_r$ durch die Konstitution des Systems bestimmt sind, während C, ε willkürlich und von r unabhängig sind. Die hierdurch dargestellte Bewegung kann als eine Normalschwingung bezeichnet werden; bemerkenswert ist jedoch, dass die verschiedenen Teile des Systems nicht mehr in derselben Phase zu sein brauchen. Eine Vereinfachung findet statt, wenn die Reibungsglieder alle verhältnismässig klein sind. Es empfiehlt sich dann, die Normalkoordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_n$ anzuwenden, die T und V auf Summen von Quadraten zurückführen; man hat dann[32])

$$(32) \qquad \begin{cases} a_r \ddot{\vartheta}_r + c_r \vartheta_r + b_{1r} \dot{\vartheta}_1 + b_{2r} \dot{\vartheta}_2 + \cdots + b_{nr} \dot{\vartheta}_n = 0, \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, 3, \dots n). \end{cases}$$

Bei einer Normalschwingung findet die Variation hauptsächlich in einer einzigen Koordinate statt, für die übrigen ist sie verhältnismässig gering. Der Einfluss der Reibung wird sich darin zeigen, dass die Teilchen des Systems, statt in geradlinigen Bahnen zu schwingen, langgestreckte Ellipsen beschreiben (ausser, wenn zwei freie Perioden annähernd gleich sind), wobei die Amplituden allmählich abnehmen. Auf die Periode hat die Reibung praktisch keinen Einfluss; den Dämpfungsmodul erhält man ferner durch Gleichsetzen von $2F$ mit der Abnahme der Gesamtenergie in der Zeiteinheit, wobei diese Grössen so berechnet sind, wie wenn der Charakter der Schwingung von der Reibung nicht berührt würde[33]).

Um die von *periodischen äusseren Kräften* herrührenden Schwingungen[34]) zu finden, setzt man Q_r und demgemäss q_r mit $e^{i\sigma t}$ proportional. Man erhält so

31) *E. J. Routh,* Adv. rig. dyn. 5. Aufl. (1884), chapt. 7; *Lord Rayleigh,* Sound, 2. Aufl., § 103a. Vgl. *A. Hurwitz,* Math. Ann. 45 (1894), p. 85.

32) *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (1) 48 (1874), p. 258; Sound 1, § 102.

33) *E. J. Routh,* Adv. rig. dyn. 5. Aufl. (1884), §§ 322, 328. Das Prinzip wurde zuerst von *G. G. Stokes,* Cambridge Trans. 9 (1850), p. [60] = Papers 3, p. 71, auf Wasserwellen angewendet. Siehe auch *H. Lamb,* London Math. Soc. Proc. 13 (1881), p. 51 und Hydrodynamics, 3. Aufl., § 338.

34) *Lord Rayleigh,* Sound I, § 104; *E. J. Routh,* Adv. rig. dyn. 4. Aufl., §§ 326, 327 u. s. w.; *W. F. Donkin,* Acoustics p. 96.

$$(33)\quad \begin{cases} (c_{1r} - \sigma^2 \alpha_{1r} + i b_{1r}) q_1 + (c_{2r} - \sigma^2 \alpha_{2r} + i b_{2r}) q_2 + \cdots \\ \qquad + (c_{nr} - \sigma^2 a_{nr} + i b_{nr}) q_n = Q_r, \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, 3, \ldots n). \end{cases}$$

Hieraus

$$(34)\quad \begin{cases} D \cdot q_r = \alpha_{1r} Q_1 + \alpha_{2r} Q_2 + \cdots + \alpha_{nr} Q_n, \\ D = | c_{rs} - \sigma^2 a_{rs} + i b_{rs} |; \end{cases}$$

die Grössen α_{rs} bedeuten die Minoren der symmetrischen Determinante D. Die Bewegung ist in jeder Koordinate periodisch, und zwar ist die Periode gleich der der eingeprägten Kräfte; da aber D und α_{rs} komplex sind, besteht ein jeder einzelnen Koordinate eigentümlicher Phasenunterschied [35]). Ist die Reibung klein, so werden die Amplituden sehr gross (aber nicht unendlich gross), wenn die eingeprägte Periode gleich einer der bei fehlender Reibung auftretenden freien Perioden des Systems wird [35a]).

Da $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$, so gelten zwischen q_r und Q_s dieselben Beziehungen für Amplitude und Phase wie zwischen q_s und Q_r. Diese Beziehungen und andere wichtige Reziprozitätssätze hat *Lord Rayleigh* [27]) abgeleitet.

1d. Schwingungen von endlicher Amplitude. Die strenge Gleichung der geradlinigen Bewegung eines Teilchens um eine Gleichgewichtslage ist in der Regel vom Typus

$$(35)\qquad \ddot{x} + \sigma^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \cdots = X.$$

Wenn x klein ist, so ist eine erste Annäherung für die freie Bewegung ($X = 0$) gegeben durch $x = A \cos(\sigma t + \varepsilon)$; die zweite Annäherung liefert die Formel

$$(36)\qquad x = A \cos(\sigma t + \varepsilon) - \frac{1}{2} \frac{\alpha A^2}{\sigma^2} + \frac{1}{6} \frac{\alpha A^2}{\sigma^2} \cos 2 (\sigma t + \varepsilon);$$

sie stellt eine einfache Schwingung und ihre Oktave dar.

Wenn die Kräfte zu beiden Seiten der Gleichgewichtslage genau symmetrisch sind (wie beim Pendel), so müssen die geraden Potenzen von x aus (35) herausfallen. Um die Annäherung weiter zu treiben, hat man die Periode abzuändern; es wird

$$(37)\quad \begin{cases} x = A \cos(\nu t + \varepsilon) + \frac{1}{32} \frac{\beta A^3}{\sigma^2} \cos 3 (\nu t + \varepsilon), \\ \nu^2 = \sigma^2 + \frac{3}{4} \beta A^2; \end{cases}$$

---

35) Dies wurde zuerst formuliert von *J. F. W. Herschel*, Encycl. Metrop., Art. „Sound", § 323 (1845).

35a) Neuere Untersuchungen über die Theorie der Resonanz betreffend siehe *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (6) 3 (1902), p. 97.

die Periode ändert sich also um einen dem Quadrat der Amplitude proportialen Betrag[36]).

Die erzwungenen Schwingungen eines unsymmetrischen Systems sind von *H. Helmholtz*[37]) untersucht worden. Setzt man

$$X = f \cos pt + g \cos (qt + \varepsilon),$$

so ergiebt sich

$$\begin{cases} x = u \cos pt + v \cos (qt + \varepsilon) - \frac{1}{2} \frac{\alpha(u^2 + v^2)}{\sigma^2} \\ \quad - \frac{\alpha u^2}{2(\sigma^2 - 4p^2)} \cos 2pt - \frac{\alpha v^2}{2(\sigma^2 - 4q^2)} \cos 2(qt + \varepsilon) \\ \quad - \frac{\alpha uv}{\sigma^2 - (p-q)^2} \cos \{(p-q)t - \varepsilon\} - \frac{\alpha uv}{\sigma^2 - (p+q)^2} \cos \{(p+q)t + \varepsilon\}, \end{cases}$$

wo

$$u = f/(\sigma^2 - p^2), \quad v = g/(\sigma^2 - q^2).$$

Besonders wichtig sind die Glieder in u, v, die von der Wechselwirkung zweier eingeprägter Kräfte herrühren[38]).

Die freien Schwingungen mechanischer Systeme im allgemeinen mit nicht unendlich kleinen Amplituden sind von *Lord Rayleigh*[39]), *E. J. Routh*[40]) und besonders von *D. J. Korteweg*[41]), sowie vielfach von Astronomen[41a]) untersucht worden. Die von *Korteweg* erhaltenen Resultate lassen sich folgendermassen aussprechen. Hat man im Falle einer unendlich kleinen Schwingung

$$\vartheta = C \cos(\sigma t + \varepsilon), \ \vartheta' = C' \cos(\sigma' t + \varepsilon'), \ \vartheta'' = C'' \cos(\sigma'' t + \varepsilon''), \ \ldots,$$

so gilt für eine kleine (aber nicht unendlich kleine) Schwingung

$$\vartheta = C \cos \varphi + u, \ \vartheta' = C' \cos \varphi' + u', \ \vartheta'' = C'' \cos \varphi + u'', \ \ldots;$$

hier bedeuten $u, u', u'', \ldots$ Reihen, deren Glieder von folgendem

36) *Lord Rayleigh,* Sound, § 67.

37) Ann. Phys. Chem. 99 (1856), p. 497 = Ges. Abh. 1, p. 256.

38) *H. Helmholtz* betrachtet das Trommelfell des Ohrs als ein unsymmetrisches System der hier behandelten Art. Danach würde eine auf das Ohr treffende einfache Schwingung von hinreichender Intensität ausser der Empfindung des primären Tons auch die der Oktave hervorrufen. Andererseits würden zwei derartige Schwingungen durch ihre Wechselwirkung ausserdem Kombinationstöne hervorrufen, deren Frequenzen bezüglich gleich der Summe und gleich der Differenz der Frequenzen der primären Töne sind.

39) Sound, 2. Aufl., 2, p. 480.

40) Stability, p. 91 f.

41) Arch. néerl. (2) 1 (1897), p. 229. Vgl. *E. T. Whittaker,* London Math. Soc. Proc. 34 (1902), p. 206.

41a) Allgemeine Formulierungen, die hierher gehören, zuerst vielleicht bei *J. M. C. Duhamel*, J. éc. polyt. cah. 23 (1834), p. 1. Auf die modernen rein mathematischen Untersuchungen gehen wir hier nicht ein.

Typus sind:

$$C_{p,p',\ldots} \cos(p\varphi + p'\varphi' + p''\varphi'' + \cdots),$$

und

$$\varphi = (\sigma + \varkappa)t + \varepsilon,\ \varphi' = (\sigma' + \varkappa')t + \varepsilon',\ \varphi'' = (\sigma'' + \varkappa'')t + \varepsilon'',\ \ldots.$$

Betrachtet man $C, C', C'', \ldots$ als Grössen erster Ordnung, so ist der Koeffizient $C_{p,p',\ldots}$ eine bestimmte Funktion von $C, C', C'', \ldots$ von der Ordnung der Summe der absoluten Beträge der ganzen Zahlen $p, p', p'', \ldots$, während $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \ldots$, bestimmte Funktionen zweiten Grades von $C, C', C'', \ldots$, sind. Eine Modifikation tritt ein, wenn eine Kombination von positiven oder negativen ganzen Zahlen von der Art besteht, dass $p\sigma + p'\sigma' + p''\sigma'' + \cdots$ sehr klein ist; der Koeffizient $C_{p,p',\ldots}$ gewinnt dann eine grössere Bedeutung. Wenn genau $p\sigma + p'\sigma' + p''\sigma'' + \cdots = 0$, so versagt überhaupt die Untersuchung gänzlich [42]).

1e. Übergang zu Kontinuen. Numerische Auflösung der Periodengleichung. α) Im Falle einer kontinuierlichen Verteilung der Materie tritt an die Stelle des Systems (4) linearer Gleichungen eine lineare partielle Differentialgleichung bezw. ein System von zwei oder drei solchen Gleichungen, je nach der Zahl der abhängigen Variabeln. Als solche bieten sich die Verschiebungskomponenten dar, die der Gesamtheit der Koordinaten q_r entsprechen; sie sind stetige Funktionen der Variabeln x, y, z, deren Wertfolge der Reihe der Indices r entspricht, und von t. [43]) Z. B. tritt bei einer eindimensionalen Verteilung (Saite, Stab) eine einzige abhängige Variable auf, und die unabhängigen Variabeln sind x und t. [44])

Um die Arten *freier Schwingung* zu bestimmen, nimmt man einen Zeitfaktor $e^{i\sigma t}$ an; die Gleichungen gehen dann über in lineare Differentialgleichungen zwischen der abhängigen Variabeln und den unab-

---

42) *Lord Rayleigh* hatte schon bemerkt (Fussn. 39), dass diese Schwierigkeit gerade in den interessantesten Fällen zu Tage tritt, wo die freien Perioden für unendlich kleine Amplituden eine sogenannte harmonische Reihe bilden (wie z. B. bei einer gespannten Saite oder einer Pfeife).

43) *F. Pockels*, $\Delta u + k^2 u = 0$, p. 51; *H. Helmholtz*, Vorl. 3, p. 70.

44) Das Problem eines massenlosen Fadens, der in gleichen Abständen mit gleichen Massenteilchen belastet ist, liefert ein Beispiel, wo der Übergang zum Kontinuum (zur Saite) im einzelnen durchgeführt werden kann. (Erster Fall eines solchen Überganges bei *D. Bernoulli*, Petersburg Comm. 6 ad annos 1732/33 (1738), p. 116 beim Problem der hängenden Kette.) Ebenso kann man von einem System netzförmig angeordneter Massenteilchen zu dem Fall einer kontinuierlichen Membran übergehen, *E. J. Routh*, London Math. Soc. Proc. 15 (1884), p. 231. Siehe unten Nr. 2c und Nr. 4, sowie IV 6, Nr. 22, 24 (P. St…

ängigen Variabeln x bezw. x, y bezw. x, y, z. Erstreckt sich der Körper ins Unendliche, so bleibt der Wert von σ verfügbar, und die Lösung liefert die Gesetze der Wellenbewegung einschliesslich der Formel für die Wellengeschwindigkeiten. Wenn andererseits der Körper begrenzt ist, so müssen gewisse Randbedingungen befriedigt werden. Dadurch werden die zulässigen Werte von σ beschränkt: σ muss einer gewissen transzendenten Gleichung, der sog. *Periodengleichung*, genügen, die der Determinantengleichung (6) entspricht. In der Regel knüpft sich das physikalische Interesse vorwiegend an die kleineren Wurzeln.

Die verschiedenen allgemeinen Beziehungen und Theoreme, zu denen man bei Systemen von endlichem Freiheitsgrade gelangt (z. B. Existenztheorem, Realität der Werte von σ, Orthogonalitätsbeziehungen, Reziprozitätssätze), werden meistens ohne weiteres auf kontinuierliche Systeme übertragen. Was den strengen mathematischen Beweis angeht, so sind gewisse Fälle in den Untersuchungen von *H. Poincaré*, *W. A. Steckloff* und *S. Zaremba* erledigt[44a]); die allgemeine Begründung ist durch die Prinzipien gegeben, die neuerdings von *I. Fredholm*[44b]) und *D. Hilbert*[44c]) in der Theorie der Integralgleichungen entwickelt worden sind (vgl. II A 11, *S. Pincherle*).

β) Hier mögen nur kurz die verschiedenen Methoden zur *numerischen Lösung der Periodengleichung* erwähnt werden. Ein einfaches Beispiel liefert die Gleichung

$$\operatorname{tg} x = f(x), \tag{39}$$

wo $f(x)$ eine algebraische Funktion; diese Gleichung tritt in der Tat bei verschiedenen akustischen Problemen auf (Nr. **5**b und Nr. **7**c). Eine allgemeine Orientierung über die Lage der Wurzeln erhält man auf graphischem Wege, indem man die Schnittpunkte der Kurven

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = f(x) \tag{40}$$

ins Auge fasst. Hat die erstere Kurve in einem Schnittpunkt einen grösseren Gradienten als die letztere, so kann man arithmetisch folgendermassen verfahren. Man nimmt einen Näherungswert x_1 der Wurzel und bestimmt $x_2, x_3, x_4, \ldots$ durch die Formel

$$x_{r+1} = \operatorname{arctg} f(x_r); \tag{41}$$

die in Rede stehende Wurzel ist dann der Grenzwert der Folge x_1,

44a) Vgl. das zusammenfassende Referat von *H. Poincaré*, Bull. des sciences math. (2) 26 (1902), p. 337.

44b) Acta math. 27 (1903), p. 365.

44c) Gött. Nachr. 1904 ff. (bisher 5 Noten).

$x_2, x_3, \ldots$ Man erhält durch dies Verfahren im allgemeinen eine ziemlich rasche Annäherung[45]).

Gewöhnlich, nämlich wenn $\lim_{x=\infty} f(x)$ entweder gleich 0 oder ∞ werden die höheren Wurzeln ungefähr gleich $\frac{1}{2}r\pi$, wo r eine ungerade oder gerade ganze Zahl. Setzt man $x = \omega + z$, wo $\omega = \frac{1}{2}r\pi$, so erhält man durch successive Approximation eine Reihe folgender Art:

$$(42) \qquad z = \frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega^2} + \frac{C}{\omega^3} + \cdots;$$

in der Regel reicht man mit einigen Gliedern derselben aus[46]).

Nach beiden Methoden ist die Bestimmung der kleineren Wurzeln, die vom physikalischen Standpunkt die wichtigsten sind, gelegentlich ziemlich mühsam. In diesem Fall schreibe man die Periodengleichung in der Form

$$(43) \qquad 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \cdots = 0$$

und nehme an, dass die linke Seite identisch gleich folgendem Ausdruck ist

$$\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right)\cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln in steigender Grössenfolge[47]). Aus dieser Identität lassen sich die Werte von $\sum \alpha^{-2m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, ausgedrückt durch die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$, ableiten. Ist m mässig gross, so unterscheidet sich die Summe wenig von α^{-2m}, und auf diese Weise ergiebt sich ein Näherungswert für die kleinste Wurzel[48]).

Eine Korrektion lässt sich mittelst der nach den vorhin beschriebenen Methoden erhaltenen Werte von $\beta, \gamma, \ldots$ anbringen; zu diesem Zweck brauchen dieselben nicht sehr genau bekannt zu sein.

2. Schwingungen von Saiten.

2a. Freie und erzwungene Schwingungen[49]). Die x-Axe falle mit der Ruhelage der Saite zusammen, ϱ sei die Dichte und T_1 die

45) *J. B. Fourier,* Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, § 285.

46) *Euler*, Introductio in analysin infinitorum 1, Lausanne, 1748, p. 319; *Lord Rayleigh,* Sound, § 207. Vgl. auch *Ch. Hermite*, Arch. Math. Phys. (3) 1 (1901), p. 22.

47) Dieser Ansatz für die *Bessel*sche Funktion $J_0(x)$ bei *Euler*, Petrop. Acta 1781, (1784), p. 157. Über die allgemeine Möglichkeit einer solchen Produktdarstellung siehe II B 1, Nr. **31** (*W. F. Osgood*).

48) *Lord Rayleigh,* London Math. Soc. Proc. 5 (1874), p. 119 = Papers 1, p. 190. Das Verfahren ist entwickelt von *C. H. Graeffe* (Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, Zürich 1837) (siehe I B 3a, Nr. **14**, *C. Runge*) Vgl. *J. F. Encke,* J. f. Math. 22 (1841), p. 193.

49) Über die frühere Geschichte des Problems und der daran geknüpften

Spannung der Saite. Bezeichnet y die unendliche kleine seitliche Verschiebung, so ergiebt sich aus der Betrachtung der auf ein Element $\varrho\,dx$ wirkenden Kräfte die Bewegungsgleichung

$$(44)\qquad \varrho \ddot{y} = T_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Y.$$

α) Für die *freien Schwingungen einer Saite von konstanter Dichte* lautet sie[50])

$$(45)\qquad \ddot{y} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c^2 = T_1/\varrho).$$

Die Grösse c hat die Dimension einer Geschwindigkeit; sie stellt in der Tat die Wellengeschwindigkeit dar.

Nimmt man einen Zeitfaktor $e^{i\sigma t}$ an, so erhält man

$$(46)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} y = 0, \qquad y = A \cos \frac{\sigma x}{c} + B \sin \frac{\sigma x}{c}.$$

Ist die Saite in $x = 0$, $x = l$ befestigt, so muss $A = 0$, $\sigma l / c = s\pi$ sein, und hieraus ergiebt sich die reelle Lösungsform[51])

$$y = C \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \left(\frac{s\pi c t}{l} + \varepsilon\right),$$

wo s eine ganze Zahl. Die Saite schwingt hin und her in Form einer Sinuskurve mit $s + 1$ „Knoten" (die Enden eingerechnet) und s dazwischen liegenden „Bäuchen". Die Frequenzen $\sigma/2\pi$ der successiven Normalschwingungen bilden eine sogenannte „harmonische" Reihe[52]). Die Frequenz der langsamsten Schwingung ist $c/2l$, ist also proportional $T_1^{\frac{1}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} l^{-1}$[53]).

Die auf einen willkürlichen Anfangszustand folgende Bewegung ergiebt sich durch Überlagerung der Normalschwingungen von willkürlicher Amplitude und Phase; also

$$(48)\qquad y = \sum_s \vartheta_s \sin \frac{s\pi x}{l}, \quad \vartheta_s = H_s \cos \frac{s\pi c t}{l} + K_s \sin \frac{s\pi c t}{l}$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Auseinandersetzungen vgl. *Todhunter-Pearson*, History of the theory of elasticity and the strength of materials 1, p. 42; *B. Riemann*, Gött. Abh. 13 (1867), p. 87 = Werke, Leipzig 1892, p. 227; Part. Differentialgleichungen § 78; *P. Duhem*, Hydrodynamique 2, p. 73 und insbesondere *H. Burkhardt*, Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 10 (1901 ff.).

50) Die Gleichung geht zurück auf *d'Alembert* (1750).

51) *Brook Taylor* (1715); *D. Bernoulli* (1753).

52) Dieser Eigenschaft begegnet man nur bei dem gegenwärtigen Problem und einzelnen anderen. Sie spielt eine Rolle in der physiologischen Theorie der Konsonanz, *H. Helmholtz*, Tonempfindungen.

Die Grössen ϑ_s entsprechen den Normalkoordinaten von 1a. T und V drücken sich in ihnen folgendermassen aus:

$$(49)\quad \begin{cases} 2T = \frac{1}{2}\varrho \int_0^l \dot{y}^2 dx = \frac{1}{2}\varrho l \sum_s \dot{\vartheta}_s^2, \\ 2V = \frac{1}{2} T_1 \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\pi^2 \frac{T_1}{l} \sum_s s^2 \vartheta_s^2; \end{cases}$$

die Produkte $\vartheta_r \vartheta_s$ und $\dot{\vartheta}_r \dot{\vartheta}_s$ verschwinden infolge der Orthogonalitätsbedingung:

$$(50)\qquad \int_0^l \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l}\, dx = 0, \qquad (r \neq s).$$

Wenn man, in Analogie zu den Verhältnissen bei einem System von endlichem Freiheitsgrade, annimmt, dass (48) beliebige Anfangsbedingungen (die nur gewissen Stetigkeitsbedingungen u. s. w. genügen) darzustellen vermag, so erhält man einen „physikalischen Beweis"[54]) für die *Fourier*sche Entwickelung einer willkürlichen Funktion in eine Sinusreihe. Die Werte von H_s, K_s, ausgedrückt durch die Anfangswerte y_0, $\dot{y}_0$, sind dann

$$(51)\qquad H_s = \frac{2}{l}\int_0^l y_0 \sin\frac{s\pi x}{l}\, dx, \quad K_s = \frac{2}{s\pi c}\int_0^l \dot{y}_0 \cos\frac{s\pi x}{l}\, dx.$$

Wird z. B. ein Punkt $x = a$ um die Strecke β zur Seite gezogen und dann (aus dem Ruhezustand) losgelassen (Fall der *gezupften Saite*) [55]), so hat man

$$(52)\qquad H_s = \frac{2\beta l^2}{s^2\pi^2 a(l-a)} \sin\frac{s\pi a}{l}, \quad K_s = 0.$$

Wird andererseits der Punkt $x = 0$ so rasch angeschlagen, dass der Stoss bereits aufhört, bevor sich die Erschütterung über ein endliches Stück der Saite ausgebreitet hat, so ist [56])

$$(53)\qquad H_s = 0, \quad K_s = \frac{2\gamma}{s\pi c} \sin\frac{s\pi a}{l},$$

---

54) *D. Bernoulli*, Berlin Mém. 1753 und *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357 = Papers 1, p. 170; Sound, § 128.

55) *H. Helmholtz*, Tonempf. Beil. III; der Fall $a = \frac{1}{2}l$ bereits bei *G. Lamé*, Élasticité, p. 105. Die Form der Saite besteht immer aus einer Reihe gerader Stücke.

56) *H. Helmholtz*, Tonempf. Beil. V; *W. F. Donkin*, Acoustics, § 133; *Lord Rayleigh*, Sound, § 129.

wenn $\varrho\gamma$ der erteilte Impuls. — In beiden Fällen fehlt die Normalschwingung von der Ordnung s, wenn der Ursprungspunkt der Störung in einem Knoten dieser Schwingung liegt[57]).

Ein anderes wichtiges Beispiel liefert die Bewegung einer *gestrichenen Saite,* z. B. einer Violinsaite[58]). Diese ist insofern „frei", als die Wirkung des Bogens darauf beschränkt zu sein scheint, die von den Reibungskräften herrührenden Energieverluste (einschliesslich derjenigen, die durch die Mitteilung der Schwingungen an die Luft entstehen) wett zu machen. Wie als Resultat der Beobachtung[59]) angesehen werden kann, ist die Bewegung jedes Punktes der Saite periodisch, und zwar ist die Frequenz gleich der der langsamsten freien Schwingung; er schwingt ferner zwischen den beiden Grenzen $\pm\beta$ in der Weise hin und zurück, dass die beiden Teile der Oszillation je mit konstanter Geschwindigkeit, aber in verschiedenen Zeiten sich vollziehen. Die Amplitude β und das Verhältniss dieser Zeitabschnitte fallen für die einzelnen Punkte der Saite verschieden aus. Diejenige freie Schwingung, die diese Eigenschaft besitzt, ist gegeben durch

$$(54)\qquad y = \frac{8\beta_0}{\pi^2}\sum_s \frac{1}{s^2}\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{s\pi c t}{l}.$$

Sind A, B die Endpunkte, so zerfällt die Saite in jedem Augenblick in zwei geradlinige Stücke AP, PB; der Fusspunkt N der Ordinate PN bewegt sich zwischen A, B mit der Geschwindigkeit c hin und zurück, während P abwechselnd die beiden Parabelbogen $y = \pm 4\beta_0 x(l-x)/l^2$ beschreibt.

Bei allen diesen Problemen hat der Charakter der Anfangsverhältnisse einen scharf hervortretenden Einfluss auf die relativen Amplituden der verschiedenen Normalschwingungen. Je plötzlicher die Störung, um so grösser ist die relative Bedeutung der höheren Schwingungen[60]).

57) *Th. Young,* London Phil. Trans. 1800, p. 106 = Works 1, p. 88; *Lord Rayleigh,* Sound, § 129.

58) *H. Helmholtz,* Glasgow Phil. Soc. Proc. 5 (1860), p. 17; Tonempf. Beil. VI = Ges. Abh. 1, p. 141; desgl. (ausführlicher) in Vorl. 3, p. 121; *W. F. Donkin,* Acoustics, § 138 (mit Berücksichtigung der Reibung); *Lord Rayleigh,* Sound, § 138.

59) Die angenommene experimentelle Grundlage ist hier etwas idealisiert; die Normalschwingungen, die in dem Punkte, wo der Bogen ansetzt, oder in der Nähe desselben Knoten besitzen, fehlen (Fussn. 57), und die ideale Schwingungsform wird nur in den entsprechenden Knoten verwirklicht.

60) Dies wird durch einen Vergleich von (52) und (53) erläutert, wobei die Amplituden bezüglich mit $1/s^2$ und mit $1/s$ proportional sind. Siehe *H. Helm-*

Wird der Punkt $x = a$ *gezwungen*, eine einfache Schwingung $\beta e^{i\sigma t}$ auszuführen, so hat man[61])

$$(55) \qquad y = \frac{\sin \frac{\sigma x}{c}}{\sin \frac{\sigma a}{s}} \beta e^{i\sigma t}, \qquad (0 < x < a);$$

eine entsprechende Formel gilt im Intervall $a < x < l$. Die Amplitude wird unendlich gross, wenn $\sin \sigma a / c = 0$, d. h. wenn die eingeprägte Periode mit einer freien Periode einer Saite von der Länge a zusammenfällt[62]).

Wirkt in $x = a$ eine eingeprägte Kraft $F e^{i\sigma t}$, so hat man statt der Formel (55) die folgende

$$(56) \qquad y = \frac{\sin \frac{\sigma x}{c} \sin \frac{\sigma (l-a)}{c}}{\frac{\sigma}{c} \sin \frac{\sigma l}{c}} \frac{F}{T_1} e^{i\sigma t}, \qquad (0 < x < a).$$

Die Amplitude wird unendlich gross, wenn $\sin \sigma l / c = 0$, es sei denn dass gleichzeitig $\sigma a / c = 0$. In diesem Ausnahmefall ist der Angriffspunkt der Kraft ein Knoten, und die Kraft verhält sich genau so wie die Reaktion, die von einer festen Stütze in $x = a$ herrühren würde. Vertauscht man in der Formel x und a, so erhält man Beispiele für den Reziprozitätssatz von Nr. **1** b.

Die Theorie der Wirkung eines *elastischen Hammers* (z. B. beim Klavier) gestaltet sich verwickelter. *H. Helmholtz* nimmt an, dass die Saite frei schwingt, ausgenommen den Zeitabschnitt von $t = 0$ bis $t = \pi / p$, während dessen sie einem einfachen Druck F im Punkte $x = a$ unterliegt. Für grosse Werte von s nehmen die Amplituden successiver Schwingungen im Verhältnis $1/s^3$ ab[63]).

γ) Die vorstehenden Resultate werden in praxi bis zu einem gewissen Grade modifiziert durch den Einfluss der Reibung, durch die Steifigkeit (unvollkommene Biegsamkeit) der Saite[64]), durch mangelhafte Festigkeit der Stützen und durch die Dehnbarkeit der Saite.

---

holtz, Tonempf. Beil. V; Vorl. 3, p. 137. Von *Lord Rayleigh*, Sound, § 101, ist das Prinzip verallgemeinert. Der Grad der Konvergenz der Fourierentwickelung von $f(x)$ in seiner Abhängigkeit von den Unstetigkeiten in $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., wurde untersucht von *G. G. Stokes,* Cambr. Trans. 8 (1847), p. 533 = Papers 1, p. 236.

61) *J. M. C. Duhamel,* J. de math. 8 (1843), p. 113.

62) Wie in Nr. **1** c vermeidet man die Schwierigkeit durch Berücksichtigung der Reibung; *W. F. Donkin,* Acoustics, §§ 126—128; *Lord Rayleigh,* Sound, §§ 131—133.

63) Tonempf. Beil. V; *W. F. Donkin*, Acoustics, § 133; *Rayleigh*, Sound, § 130.

64) Bezüglich des Einflusses der Steifigkeit, die vornehmlich die Schwingungen höherer Ordnung beeinträchtigt, siehe Nr. 3a unten.

Der *Einfluss der Reibung* wird qualitativ durch Einführung einer der Geschwindigkeit proportionalen Kraft dargestellt; also[65])

$$(57) \qquad \ddot{y} + \varkappa \dot{y} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{Y}{\varrho}.$$

Für eine freie Schwingung erhält man

$$(58) \qquad \begin{cases} y = Ce^{-\frac{1}{2}\varkappa t} \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \sigma^2 = \frac{s^2\pi^2c^2}{l^2} - \frac{1}{4}\varkappa^2. \end{cases}$$

Ist $\varkappa$ klein, so kann der Einfluss der Reibung auf die Periode vernachlässigt werden, und die harmonische Folge der Normalschwingungen bleibt bestehen.

Der *Einfluss der Nachgiebigkeit der Stützen* auf die freien Schwingungen zeigt sich darin, dass die Frequenz erhöht oder vermindert wird, je nachdem sie über oder unter derjenigen der Eigenschwingung der Stütze liegt[66]). Der Fall der erzwungenen Schwingungen wurde von *H. Helmholtz*[67]) behandelt, und zwar in der Weise, dass die eine Stütze als selbständig schwingende Masse angesehen wurde, auf die eine mit der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft wirkt; die letztere Kraft ist eingeführt, um die Wirkung des Saitenstegs, der die Schwingungen mittels des Resonanzbodens an die Luft überträgt, darzustellen.

δ) Bei *Schwingungen von endlicher Amplitude* kommt die Dehnbarkeit der Saite in Betracht. Als zweite Annäherung erhält *G. Kirchhoff*[68]) die Gleichung

$$(59) \qquad \ddot{y} = c^2 \left\{1 + \frac{E}{2T_1 l} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

wo der Integralausdruck die Spannungsänderung darstellt, unter E den *Young*schen Modul verstanden. Eine partikuläre Lösung ist

$$(60) \qquad \begin{cases} y = \beta \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \operatorname{am}(\sigma t + \varepsilon), \bmod \varkappa, \\ \varkappa^2 = \frac{\frac{1}{2}s^2\pi^2\beta^2}{s^2\pi^2\beta^2 + 4l^2 T_1/E}, \quad \sigma^2 = \frac{s^2\pi^2c^2}{l^2} + \frac{s^4\pi^4\beta^4}{4l^4}\frac{E}{\varrho}. \end{cases}$$

Man kann sie als eine modifizierte Normalschwingung deuten; aber die verschiedenen so erhaltenen Schwingungen lassen sich nicht überlagern.

---

65) *W. F. Donkin*, Acoustics, § 125.

66) *Lord Rayleigh*, Sound, § 135.

67) Tonempf. Beil. IV; Vorl. 3, p. 144.

68) Mechanik, Vorl. 29, p. 446.

2b. Wellen auf einer gespannten Saite. Es handle sich zunächst um eine Saite, die sich nach beiden Richtungen ins Unendliche erstreckt. Die allgemeine Lösung von (45) ist[69])

(61) $$y = f(ct - x) + F(ct + x).$$

Sie stellt zwei sich überlagernde Wellen dar, die bezüglich in der positiven und in der negativen x-Richtung je mit der Geschwindigkeit c sich fortpflanzen. Ist die anfängliche Störung[70]) auf ein endliches Stück der Saite beschränkt, so löst sich die Bewegung schliesslich in zwei Wellen auf, von denen jede in ungeänderter Form fortschreitet. Für die getrennten Wellen gilt

(62) $$\frac{\partial y}{\partial t} = \mp c \frac{\partial y}{\partial x};$$

ist eine dieser Relationen zu Anfang erfüllt, so tritt nur eine Welle auf. Bei einer solchen Einzelwelle ist die Energie zur Hälfte kinetisch und zur Hälfte potentiell[71]).

Nimmt man zweitens den Fall, dass der Punkt $x = 0$ fest ist, so hat man

(63) $$y = f(ct - x) - f(ct + x);$$

dies entspricht der *Reflexion einer Welle* an einem festen Ende, wobei die Welle selbst umgekehrt wird. Wird außerdem der Punkt $x = l$ festgehalten, so hat man

(64) $$f(ct - l) = f(ct + l);$$

die Bewegung hat daher die Periode $2l/c$.[69]) Durch eine geeignete Fortsetzung der Funktionen kann die Bewegung einer endlichen Saite durch Überlagerung zweier unendlicher Wellenzüge auf einer endlosen Saite erhalten werden[72]) [72a]).

---

69) *J. le Rond d'Alembert,* Berlin Mém. 1747, p. 214, 220.

70) Die Bestimmung der Funktionen f und F aus den Anfangsbedingungen wurde von *d'Alembert* formuliert.

71) *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (5) 1 (1876), p. 257 = Papers 1, p. 251.

72) *Th. Young,* London Phil. Trans. 1800, p. 106 = Works 1, p. 86 gab dem Verfahren eine graphische Form. Vgl. *H. Helmholtz,* Tonempf. Beil. III, Vorl. 3, p. 114; *Lord Rayleigh,* Sound, § 146, wo (in Anlehnung an *Young*) das Verfahren auf die Bestimmung der Formen angewendet wird, die, der Gleichung (63) entsprechend, nach einander von einer gezupften Saite angenommen werden. *H. Helmholtz,* Vorl. 3, p. 130, löst die Bewegung einer Violinsaite (Nr. 2 a) in zwei Züge parabelförmiger Wellen auf. Modelle für den Fall der schwingenden Saiten liess *G. Monge* bereits 1797 construieren, vgl. *G. Monge,* J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 118; vgl. auch die neuern Modelle in der Sammlung *M. Schilling* in Halle a/S.

Ziemlich einfach ist auch das Problem der Reflexion einer Welle an der Verknüpfungsstelle zweier Saiten von ungleicher Dichte; von Interesse ist es hauptsächlich wegen der optischen Analogien. Ist die Amplitude der einfallenden Welle gleich 1, so ist die der reflektierten Welle gleich $(\mu - 1)/(\mu + 1)$ und die der hindurchgegangenen Welle gleich $2\mu/(\mu + 1)$, wo μ das Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten[73]).

Ist der Übergang von der einen Dichte zur anderen nicht plötzlich, sondern allmählich, so stellt sich die Frage schwieriger. Für ein spezielles Übergangsgesetz ergiebt sich[74]), wie schon aus allgemeinen Gründen zu erwarten ist, dass eine periodische Störung merklich dieselbe Reflexion erfährt wie im Falle einer wirklichen Unstetigkeit, sofern das Übergangsstück klein ist gegen die Wellenlänge, dass dagegen nur schwache Reflexion eintritt, wenn dies Stück mit der Wellenlänge vergleichbar ist.

Im *Falle kleiner Reibung* lässt sich die allgemeine Lösung der Gleichung (57) bei verschwindendem Y in zweierlei Form darstellen:

$$(65) \qquad y = e^{-\frac{1}{2}\varkappa x/c} f(ct - x) + e^{\frac{1}{2}\varkappa x/c} F(ct + x),$$

$$(66) \qquad y = e^{-\frac{1}{2}\varkappa t} f(ct - x) + e^{-\frac{1}{2}\varkappa t} F(ct + x).$$

Die Exponentialfunktionen in (65) z. B. deuten hin auf das allmähliche Abflachen der Wellen bei ihrem Fortschreiten über die Saite[75]).

2c. Saite als Grenzfall eines mit Massenpunkten belasteten Fadens[76]). Wenn ein massenloser Faden von der Spannung T_1 in gleichen Abständen mit gleichen Massen M belastet ist, so lautet die Bewegungsgleichung des r^{ten} Massenpunktes

$$(67) \qquad M\ddot{y}_r = \frac{T_1}{a}(y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}).$$

72a) Die Ausbreitung von Unstetigkeiten ist speziell von *E. B. Christoffel*, Ann. di mat. 8 (1876), p. 81, 193 behandelt worden; vgl. *Riemann-Weber*, Part. Differentialgleichungen 2, § 88.

73) *Lord Rayleigh*, Sound, 2. Aufl., § 148a.

74) *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 11 (1880), p. 81 = Papers 1, p. 460; Sound, 2. Aufl., § 148b.

75) *Lord Rayleigh*, Sound, § 148; *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 208.

76) Diesen Ansatz machte zuerst *J. L. Lagrange*, Misc. Taur. 1 (1759) = Oeuvres 1, p. 39; Méc. anal. 1, 2me partie, sect. 6. Vgl. *Lord Rayleigh*, Sound 1, § 120; *H. Helmholtz*, Vorl. 3, p. 72; *H. Brell*, Wien Ber. 111 (1902), p. 1038. Siehe auch IV 6, Nr. 22 u. 23 (*P. Stäckel*).

Wird als Zeitfaktor $e^{i\sigma t}$ angesetzt, so erhält man die Differenzengleichung

$$(68)\qquad y_{r+1} - 2\left(1 - \frac{\sigma^2 a M}{2 T_1}\right) y_r + y_{r-1} = 0.$$

Die *Normalschwingungen* eines Fadens von der Länge $l = (n+1)a$, der n äquidistante Massenpunkte trägt, sind hiernach gegeben durch

$$(69)\qquad \begin{cases} y_r = C \sin r\varphi \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \varphi = \frac{s\pi a}{l}, \quad \sigma^2 = \frac{4 T_1}{M a} \sin^2 \frac{s\pi a}{2 l}. \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3, \dots n).$$

Setzt man $M = \varrho a$, $ra = x$, so kommt man auf Formel (47) für eine Saite von gleichmässiger Dichte zurück.

In ähnlicher Weise lässt sich die *Fortpflanzung einer Störung* in einem unbegrenzten, mit Massenpunkten belasteten Faden erläutern. Dem Punkt $r = 0$ werde die Bewegung $y_0 = \beta e^{i\sigma t}$ auferlegt. Ist $\sigma < 2c/a$, wo c die Wellengeschwindigkeit für eine Saite von gleichmässiger Dichte ϱ und derselben Spannung T_1, so ist die nach rechts laufende Störung gegeben durch

$$(70)\qquad y_r = \beta e^{i(\sigma t - r\varphi)}, \quad \sin^2 \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}\frac{\sigma^2 a^2}{c^2}.$$

Ist $\sigma a/c$ klein, so kann man diese Bewegung deuten als eine Welle, die mit der Geschwindigkeit

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi} c$$

fortschreitet. Ist andererseits $\sigma > 2c/a$, so lautet die Lösung

$$(72)\qquad y_r = (-)^r \beta e^{i\sigma t - ru}, \quad \cosh^2 \frac{1}{2} u = \frac{1}{4}\frac{\sigma^2 a^2}{c^2}.$$

Mit wachsendem r nimmt hier y_r unbegrenzt ab; die Bewegung ist praktisch auf die Umgebung des Erregungspunktes beschränkt[77]).

2d. **Saite von veränderlicher Dichte.**[77a]) Für freie Schwingungen geht die Gleichung (44) bei Einführung des Zeitfaktors $e^{i\sigma t}$ über in

$$(72)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{T_1}\varrho y = 0.$$

Die Gleichung ist von derselben Form wie (16), aber ϱ ist jetzt eine Funktion von x. Die Aufgabe ist, diejenigen Werte von σ zu ermitteln, für die die Funktion sich so bestimmen lässt, dass sie für

77) *E. J. Routh*, Adv. rig. dyn., chapt. 8; *Lord Rayleigh*, Sound, 2. Aufl., § 147; *G. G. Stokes*, Papers 3 (1901), p. 410.

77a) Über die ältere Litteratur betr. dieses Problem vgl. den Bericht von *H. Burkhardt*, p. 346 (§ 27).

vorgeschriebene Werte $x = 0$, $x = l$ verschwindet. Es ist dies ein spezieller Fall des zuerst von *Ch. Sturm* und *J. Liouville*[77b]) behandelten Problems. *Lord Rayleigh*[78]) hat die Untersuchung etwas modifiziert und damit die Sätze, dass es für irgend einen vorgeschriebenen Wert von l eine endlose Folge von Werten σ giebt, dass die entsprechenden Normalfunktionen die Orthogonalitätsbedingung erfüllen und dass eine willkürliche Funktion von x für $0 < x < l$ sich nach diesen Normalfunktionen entwickeln lässt, physikalisch plausibel gemacht. Die strengen mathematischen Beweise sind neuerdings durch die Untersuchungen von *A. Kneser*[78a]) und *D. Hilbert*[78b]) gegeben worden.

Explizite stellt sich die Lösung für gegebene Formen der Funktion ϱ im allgemeinen schwierig[79]). Für *kleine* Änderungen der Dichte lässt sich nach dem *Rayleigh*schen Verfahren (Nr. **1** a) eine angenäherte Lösung erhalten. Es ergiebt sich

$$\sigma_s^2 = \left\{1 - \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} \sin^2\frac{s\pi a}{l}\,dx\right\}\frac{s^2\pi^2c^2}{l^2}, \tag{73}$$

wo ϱ_0 die mittlere Dichte und $\varrho_0 + \Delta\varrho$ die Dichte im Punkte x.[80])

Die Fortpflanzung von Wellen über eine unendliche Saite von *periodischer Dichte* $\varrho = \varrho_0 + \alpha\cos\beta x$ ist im Hinblick auf die optische Analogie von *Lord Rayleigh* untersucht worden[81]).

Viel einfacher ist der *Fall isolierter Lasten an einer Saite von gleichförmiger Dichte.* Hat man eine Einzellast M an einer Saite von der Länge l im Abstand a von dem einen Ende, so lautet die Periodengleichung[82])

$$Mc\sigma\sin\frac{\sigma a}{c}\sin\frac{\sigma(l-a)}{c} = T_1\sin\frac{\sigma l}{c}\cdot$$

Die Wurzeln lassen sich angenähert auf graphischem Wege bestimmen.

77b) *Ch. Sturm* und *J. Liouville*, J. de math. 1 (1836), p. 373; ebd. 2 (1837), p. 220. Vgl. im übrigen II A 7a, Nr. 4 (*M. Bôcher*).

78) Sound, § 142.

78a) *A. Kneser*, Math. Ann. 58 (1904), p. 81 und 60 (1905), p. 402.

78b) *D. Hilbert*, Gött. Nachr. 1905.

79) Eine Ausnahme bildet der Fall, wo $\varrho \sim (\alpha + x)^{-2}$.

80) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 377; Sound, § 91.

81) Phil. Mag. (5) 24 (1887), p. 145 = Papers 3, p. 1.

82) *W. F. Donkin*, Acoustics, § 144; *Lord Rayleigh*, Sound, § 136; *H. Helmholtz*, Vorl. 3, p. 139. Die Theorie der Wellen auf einer gleichförmigen Saite, die in gleichen Abständen mit gleichen Massen belastet ist, behandelt *H. Lamb*, Manchester Mem. 42 (1898), Nr. 3.

Sind a und l kommensurabel, so giebt es Normalschwingungen, bei denen M sich in Ruhe befindet: der Punkt $x = a$ stellt für die unbelastete Saite einen Knoten dar.

3. Schwingungen von Stäben.

3a. Längsschwingungen eines geraden Stabes. Wird die x-Axe in die Längsrichtung des Stabes gelegt und die longitudinale Verschiebung mit u bezeichnet, so ist die auf den Querschnitt wirkende Spannung pro Flächeneinheit gleich $E\,\partial u/\partial x$, wo E der *Young*sche Modul. Die Betrachtung der an einem Element dx angreifenden Kräfte liefert dann die Gleichung

$$\varrho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + X, \tag{75}$$

die der Form nach mit (44) übereinstimmt. Bei den speziellen Anwendungen ergeben sich demgemäss im einzelnen ganz analoge Verhältnisse. Die Wellengeschwindigkeit[83]) in einem unendlich langen Stabe ist $c = (E/\varrho)^{\frac{1}{2}}$, also unabhängig vom Querschnitt; sie wird ferner von einer dauernden Zugbeanspruchung des Stabes nicht berührt[84]). Die Normalschwingungen eines an beiden Enden befestigten Stabes lauten wie in (47), während für einen *an beiden Enden freien Stab*

$$u = C \cos \frac{s\pi x}{l} \cos\left(\frac{s\pi c t}{l} + \varepsilon\right), \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots), \tag{76}$$

da $\partial u/\partial x = 0$ für $x = 0$, $x = l$.

Von störenden Einwirkungen kommen nur die Trägheit der Querverkürzungen und -dehnungen in Betracht. Die dadurch bedingte Korrektion ist in der Regel klein; wie ein Näherungsverfahren zeigt, wird die Periode der s^{ten} Schwingung eines Stabes von kreisförmigem Querschnitt (rad. $= a$) im Verhältnis

$$1 + \tfrac{1}{4} s^2 \pi^2 \eta^2 a^2 / l^2$$

vergrössert[85]).

83) Die verschiedenen Probleme der Wellenbewegung, insbesondere das der Reflexion an einem freien oder festen Ende, sind identisch mit denjenigen, die in der Theorie der engen Pfeifen auftreten.

84) Die Frequenzen entsprechender Quer- und Längsschwingungen eines gespannten Drahtes stehen zu einander im Verhältnis $(\alpha/l)^{\frac{1}{2}}$, wo α der kleine Zuwachs der Länge, der von dem dauernden Zug herrührt; *S. D. Poisson*, Paris Mém. 8 (1829), p. 437.

85) *Lord Rayleigh*, Sound, § 157. Was die genauere Theorie des zylindrischen Stabes betrifft, s. Nr. 8c.

Es existiert auch eine Theorie der *Torsionsschwingungen* von Stäben[86]). Im Falle eines kreisförmigen Querschnitts lautet die Gleichung

$$(77) \qquad \ddot{\theta} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{\mu}{\varrho},$$

wo μ die Steifigkeit des Materials.

3b. Querschwingungen gerader Stäbe. Die übliche Theorie bezieht sich auf einen homogenen geraden Stab von gleichförmigem Querschnitt. Das Material braucht nicht isotrop zu sein; vorausgesetzt dass die Längsrichtung einer Elastizitätsaxe parallel ist, hat man zwei longitudinale Ebenen, in denen der Stab von einander unabhängige Schwingungen ausführen kann. y sei die Verschiebung in einer dieser Hauptebenen; die x-Axe falle in die Stabrichtung.

α) Die allgemeinen *Bewegungsgleichungen* und die Grenzbedingungen lassen sich auf zweierlei Weisen erhalten. Wenn die auf einen Querschnitt wirkenden Kräfte sich auf eine Schubkraft F und ein Biegungsmoment M reduzieren, so liefert das direkte Verfahren die Gleichungen

$$(78) \qquad \varrho\omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + Y, \quad \varrho\omega\varkappa^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = F + \frac{\partial M}{\partial x} + G,$$

wo ω der Inhalt des Querschnitts, $\varkappa$ der Trägheitsradius, bezogen auf eine zur Biegungsebene senkrechte, durch den Schwerpunkt gehende Axe, während Y und G eine äussere Kraft bezw. ein von aussen angreifendes Moment pro Längeneinheit darstellen. Den üblichen Näherungstheorien gemäss ist M der Krümmung proportional, also $M = L\partial^2 y/\partial x^2$ [87]), so dass man durch Elimination von F erhält

$$(79) \qquad \varrho\omega\ddot{y} = -L\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varrho\omega\varkappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + Y - \frac{\partial G}{\partial x}.$$ [88])

---

86) *S. D. Poisson,* Paris Mém. 8 (1829), p. 455. Das Verhältnis der Frequenzen entsprechender Torsions- und Längsschwingungen ist $(\mu/E)^{\frac{1}{2}}$ (*Poisson* giebt den Wert $\sqrt{5}/\sqrt{2}$).

87) Für isotropes Material ist $L = E\omega\varkappa^2$.

88) Diese Gleichung, in der das zweite Glied der rechten Seite den Einfluss rotatorischer Trägheit darstellt, wurde von *S. D. Poisson,* Paris Mém. 8 (1829), p. 463, für den Fall eines isotropen Stabes von kreisförmigem Querschnitt aufgestellt, der durch äussere Kräfte nicht beansprucht wird, und zwar leitete er sie aus den allgemeinen Gleichungen für isotrope Körper (vgl. IV 23, Nr. 5b *C. H. Müller - A. Timpe*) ab. Eine allgemeinere Gleichung, die eine dauernde Zugbeanspruchung mit berücksichtigt, wurde von *A. Clebsch*, Elastizität, p. 246, aus seiner statischen Theorie dünner Stäbe entwickelt. (Vgl. *W. F. Donkin,* Acoustics, chapt. 9.) Eine genauere, auf die Saint-Venantsche Balkentheorie (vgl. IV 25, Nr. **13**, *O. Tedone - A. Timpe*) gegründete Ableitung gab *M. Panetti,*

Der Einfluss rotatorischer Trägheit wird in der Regel vernachlässigt. Schliesst man auch von aussen angreifende Kräftepaare aus, so hat man

$$F = -\partial M/\partial x = -L\partial^3 y/\partial x^3$$

und hieraus[89])

$$\varrho\omega\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + L\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = Y. \tag{80}$$

Die Grenzbedingungen sind: an einem freien Ende $F = 0$, $M = 0$; also $y'' = 0$, $y''' = 0$; an einem eingeklemmten Ende $y = 0$, $y' = 0$; an einem gestützten Ende $y = 0$, $y'' = 0$.

Das zweite Verfahren zur Aufstellung der Gleichungen ist die *Lagrange*sche Variationsmethode (vgl. **1** a). Schliesst man der Einfachheit halber den Fall äusserer Kräfte aus und vernachlässigt die rotatorische Trägheit, so hat man[90])

$$\int_0^l \varrho\omega\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y\,dx + \delta\left\{\frac{1}{2}L\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx\right\} = 0. \tag{81}$$

Das übliche Verfahren führt zu der Gleichung (80) und zur Grenzbedingung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\,\delta y = 0, \tag{81'}$$

aus der sich die Spezialfälle ableiten lassen.

β) Um die *freien Schwingungen* zu finden, setzt man in (80) $Y = 0$ und nimmt y mit $e^{i\sigma t}$ proportional; dann ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = m^4 y, \quad m^4 = \frac{\sigma^2\varrho\omega}{L}, \tag{82}$$

deren allgemeine Lösung ist[91])

$$y = A\cos mx + B\sin mx + C\cosh mx + D\sinh mx. \tag{83}$$

Den verschiedenen möglichen Grenzbedingungen entsprechend sind sechs Hauptfälle zu betrachten; am interessantesten sind die beiden Fälle, wo der Stab in $x = 0$ eingeklemmt und in $x = l$ frei ist bezw. wo beide Enden frei sind. Für den eingeklemmt-freien Stab hat man

$$y = A(\cos mx - \cosh mx) + B(\sin mx - \sinh mx) \tag{84}$$

mit den Bedingungen

89) *Euler*, Nov. Comm. Petrop. 17 (1773), p. 449.

90) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 434; Sound, § 162 (die rotatorischen Glieder sind hier beibehalten).

91) *D. Bernoulli* (1735); *L. Euler*, Comm. Acad. Petrop. 7 (1740); Methodus inveniendi, Lausanne 1740.

(85) $$\frac{A}{B} = \frac{\cos ml + \cosh ml}{\sin ml - \sinh ml} = -\frac{\sin ml + \sinh ml}{\cos ml + \cosh ml};$$

dies liefert die Periodengleichung[92])

(86) $$\cos ml \cosh ml + 1 = 0.$$

Für den frei-freien Stab ergiebt sich

(87) $$y = A(\cos mx + \cosh mx) + B(\sin mx + \sinh mx)$$

mit den Bedingungen

(88) $$\frac{A}{B} = \frac{\cos ml - \cosh ml}{\sin ml + \sinh ml} = -\frac{\sin ml - \sinh ml}{\cos ml - \cosh ml};$$

dies liefert die Periodengleichung

(89) $$\cos ml \cosh ml - 1 = 0.$$

Man bezeichne nun mit $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Wurzeln von (86) oder (89) und mit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die entsprechenden Ausdrücke für die rechte Seite von (84) oder (87) (wo für A/B der durch (85) bzw. (88) bestimmte Wert eingesetzt ist). Die allgemeine Lösung des Problems der freien Schwingungen lautet dann

(90) $$\begin{cases} y = u_1\vartheta_1 + u_2\vartheta_2 + u_3\vartheta_3 + \cdots, \\ \vartheta_s = C_s \cos(\sigma_s t + \varepsilon_s), \end{cases}$$

wo die Konstanten C_s, ε_s willkürlich sind und σ_s mit m_s wie in (82) verknüpft ist. Die Funktionen u_s sind die Normalfunktionen[93]) und ϑ_s die Normalkoordinaten des vorliegenden Problems. Ausgedrückt in den ϑ_s reduzieren sich die kinetische und die potentielle Energie vermöge der Orthogonalitätsbedingung

(91) $$\int_0^l u_r u_s dx = 0, \quad (r \neq s),$$

auf Quadratsummen. Dieselbe läßt sich aus (82) durch ein Verfahren

92) Die Gleichungen (85) und (88) rühren her von *Euler*, Methodus inveniendi 1740, der auch die Fälle löste, dass beide Enden eingeklemmt bezw. dass beide Enden gestützt sind. Der erstere Fall wird gelöst, wenn man für y die zweite Ableitung von (87) nimmt, da nach (82) die entsprechenden Grenzbedingungen erfüllt sein werden; die Periodengleichung ist daher von der Form (89); *Lord Rayleigh*, Sound, § 172. Für einen beiderseits gestützten Stab hat man $y = C \sin mx$ mit der Bedingung $\sin ml = 0$. Betreffs späterer Untersuchungen von *Euler* vgl. *H. Burkhardt*, Bericht § 29, p. 360.

93) *A. G. Greenhill*, Mess. of math. 16 (1886), p. 115, legt dar, dass die Normalfunktionen und auch die Periodengleichung sich beträchtlich vereinfachen, wenn der Anfangspunkt der x-Koordinate in der Mitte des Stabes angenommen wird.

partieller Integration ableiten[94]. *Lord Rayleigh* hat jedoch gezeigt, dass sie natürlicher aus der Variationsgleichung (81) folgt, wenn y mit u_r, δy mit u_s proportional genommen wird. Aus (90) ergiebt sich die Beziehung

$$(92) \qquad \int_0^l y u_s dx = \vartheta_s \int_0^l u_s^2 dx,$$

die zur Bestimmung von C_s und ε_s aus den Anfangswerten von y, $\dot{y}$ dienen kann[95].

Die kleineren *Wurzeln der Periodengleichungen* wurden von *D. Bernoulli*, *L. Euler*, *G. Riccati*[96] und *S. D. Poisson*[94] berechnet[96a]. Weitergehende und genauere Rechnungen haben *A. Seebeck*[97] und *Lord Rayleigh*[98] angestellt. Für den eingeklemmt-freien Stab findet man

$$ml/\pi = 0{,}59686\ldots, \quad 1{,}49418\ldots, \quad 2{,}50025\ldots; \ldots;$$

die Zahlen nähern sich dem Betrag $\frac{1}{2}(2s-1)$. Für den frei-freien Stab erhält man

$$ml/\pi = 1{,}50562\ldots, \quad 2{,}49975\ldots, \quad 3{,}50001\ldots; \quad \ldots;$$

die Zahlen nähern sich mit wachsendem s dem Betrag $\frac{1}{2}(2s+1)$. Die Frequenz ist in jedem Fall dem Quadrat von m proportional, also dem Quadrat der Länge umgekehrt proportional[99].

Der *Charakter der Normalfunktionen* u_s ist von verschiedenen Autoren untersucht worden[100]. Bei der langsamsten Schwingung des

94) *S. D. Poisson*, Paris Mém. 8 (1829), p. 357; Mécanique 2, § 524.

95) *Lord Rayleigh*, Sound, § 164, zeigt, wie sich das Integral rechter Hand berechnen lässt. Für einen Stab mit einem freien Ende ist der Wert desselben $\frac{1}{4} l \bar{u}_s^2$, wenn $\bar{u}_s$ der Wert von u_s am freien Ende. Für verschiedene spezielle Anfangsbedingungen sind die Rechnungen in §§ 168—169 durchgeführt.

96) Verona Mem. di mat. e fis. (1782), p. 444.

96a) Vgl. auch *A. Cauchy*, Exerc. de math. 3 (1828) = Oeuvres (2) 8, p. 312; *L. Navier*, Bull. Soc. philom. 1825, p. 178.

97) Leipzig Abh. 1 (1852), p. 131; Ann. Phys. Chem. 63 (1848), p. 442.

98) Sound, § 174; einige unbedeutende Korrektionen sind in der 2. Aufl. angegeben.

99) Nach dem „*Chladni*schen Gesetz" sollen die Frequenzen der verschiedenen Eigentöne ungefähr den Quadraten 3^2, 5^2, 7^2, ... der ungeraden ganzen Zahlen proportional sein. *Poisson* (Fussnote (94)), bemerkte, dass das Verhältnis der kleinsten Frequenzen eines Stabes von kreisförmigem Querschnitt (rad. $= a$), der transversal und longitudinal schwingt, vom Material unabhängig und gleich $3{,}561\, a/l$ ist.

100) Die Knoten der einfacheren Schwingungen eines frei-freien Stabes werden in grober Annäherung von *D. Bernoulli* und *Euler*, genauer von *G. Riccati* (Fussn. 96) und *F. Strehlke*, Ann. Phys. Chem. 27 (1833), p. 505, bestimmt; *J. Lissa-*

frei-freien Stabes z. B. liegen Knotenstellen ($y = 0$) im Abstand $0{,}22418\,l$ von den Enden, und die Amplitude der Stabmitte steht zu den Amplituden an den Enden im Verhältnis 0,6078 : 1.

Die Querschwingungen eines Stabes, der mit dem Fremdkörper, von dem er angestossen wird, vereinigt bleibt, sind von *B. de Saint-Venant*[101]) und genauer von *M. Panetti*[102]) untersucht worden.

γ) Den Fall der *erzwungenen Schwingungen* haben *F. Lippich*[103]), *H. Valerius*[104]), *E. Gripon*[105]) und *W. Elsässer*[106]) behandelt. Wird z. B. das Stabende $x = l$ gezwungen, eine Schwingung von der Periode $\frac{2\pi}{\sigma}$ und der Amplitude α auszuführen, während das andere Ende $x = 0$ frei ist, so bestimmt sich die Lösung durch (82) und (83) mit den Bedingungen $y = \alpha$, $y' = 0$ für $x = l$ und $y'' = 0$, $y''' = 0$ für $x = 0$. Für die Konstanten A, B, C, D ergeben sich die Werte

$$A = C = \frac{\alpha(\cos ml + \cosh ml)}{2(1 + \cos ml \cosh ml)},$$

$$B = D = \frac{\alpha(\sin ml - \sinh ml)}{2(1 + \cos ml \cosh ml)}.$$

Die Amplitude wird unendlich gross, wenn $1 + \cos ml \cosh ml = 0$, d. h. wenn die eingeprägte Periode mit der Periode der Eigenschwingung des eingeklemmt-freien Stabes übereinstimmt. Die Knoten sind in diesem Falle dieselben wie bei den freien Schwingungen des eingeklemmt-freien Stabes. — Ähnliche Resultate ergeben sich für die erzwungenen Schwingungen eines Stabes, der an dem einen Ende $x = 0$ eingeklemmt ist, während das andere Ende $x = l$ eine vorgeschriebene Schwingung ausführt.

δ) Dass die Theorie der Querschwingungen, im Gegensatz zu der der Längsschwingungen, sich so verwickelt gestaltet, hat seinen Grund in der Tatsache, dass es keine bestimmte *Wellengeschwindigkeit* für alle Störungsarten giebt[107]). Die Geschwindigkeit der Wellen von

jous, Ann. chim. phys. (3) 30 (1850), p. 385, untersuchte die Knotenverteilung bei sämtlichen sechs Fällen des *Euler*schen Problems. Eine eingehendere Untersuchung betreffend die Normalfunktionen, insbesondere die Knoten, Wendepunkte, Bäuche und Punkte grösster Krümmung wurde von *A. Seebeck* (Fussn. 97) angestellt. Unabhängig von ihm wurde das Problem behandelt von *Lord Rayleigh*, Sound, §§ 177—181, wo Diagramme von den einfacheren Formen gegeben sind.

101) *Clebsch-Saint-Venant,* Élasticité, Note du § 61.

102) Torino Atti 36 (1901), p. 6.

103) Wien Ber. 45² (1862), p. 91 u. Wien Denkschr. 21 (1863), p. 130.

104) Ann. Phys. Chem. 129 (1865), p. 308.

105) Ann. éc. norm. (2) 2 (1873), p. 357.

106) Ann. Ph s. 13 (1904), p. 791.

einfachem Typus von der Länge λ ergiebt sich, wenn man $y = Ce^{ik(x-ct)}$ in (79) einsetzt:

(93) $$c^2 = \frac{E}{\varrho} \frac{k^2 \varkappa^2}{1 + k^2 \varkappa^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

vernachlässigt man rotatorische Trägheit, so wird

(94) $$c = \left(\frac{E}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi\varkappa}{\lambda}.$$

Der formale Ausdruck für die Schwingungen in einem unendlich langen Stabe bei willkürlich gegebenen Anfangsverschiebungen wurde von *J. B. Fourier* und *S. D. Poisson*[108]) aufgestellt.

Den Einfluß rotatorischer Trägheit auf die Schwingungen eines endlichen Stabes kann man nach dem in Nr. **1**a angedeuteten Näherungsverfahren abschätzen[109]). Es ergiebt sich, dass die Korrektion für die Periode von der Ordnung $\varkappa^2/l^2$ ist, wie auch schon aus (79) hervorgeht.

ε) Die Gleichung der Querschwingungen eines *Drahtes, der einer dauernde Spannung* T_1 unterliegt, ist[110])

(95) $$\varrho\omega\ddot{y} = T_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - L \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varrho\omega\varkappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2};$$

sie enthält neben (79) auch (45) als Grenzfall, so dass hier die Theorie der Saiten an die Elastizitätstheorie angeschlossen ist.

Die Anwendung auf die Ermittlung des Einflusses der Steifigkeit auf die Schwingungen von *Klaviersaiten* ist wegen der Unsicherheit bezüglich der richtigen Endbedingungen nicht ganz einfach. Sieht man die Enden als fest (aber nicht als eingeklemmt) an, so sind die Normalschwingungen vom Typus:

(96) $$\begin{cases} y = Ce^{i\sigma t} \sin s\pi x/l, \\ \sigma^2 = \dfrac{s^2\pi^2}{l^2} \cdot \dfrac{a^2 l^2 + s^2\pi^2\varkappa^2 b^2}{l^2 + s^2\pi^2\varkappa^2}, \quad a^2 = \dfrac{T_1}{\varrho\omega}, \quad b^2 = \dfrac{E}{\varrho}. \end{cases}$$

Mit einer Saite lässt sich also der Draht nur dann vergleichen, wenn $s(\varkappa/l)(b/a)$ klein ist[111]). Vernachlässigt man rotatorische Trägheit,

108) Bull. Soc. philomath. 1818. Die Glieder, die willkürlich gegebenen Anfangsgeschwindigkeiten entsprechen, sind von *Lord Rayleigh*, Sound, § 192, hinzugefügt.

109) *Lord Rayleigh*, Sound, § 186.

110) Eine Gleichung von diesem Typus, jedoch ohne den letzten Term, wurde von *A. Seebeck* (Fussn. 97) aufgestellt. Obige Form rührt her von *A. Clebsch*, Elastizität, p. 253. In der von *W. F. Donkin*, Acoustics, § 177, und *Lord Rayleigh*, Sound, § 188, erhaltenen Form ist der Koeffizient von $\partial y^4/\partial x^4$ noch mit $1 + T_1/E\omega$ multipliziert. Für praktische Zwecke ist der Unterschied unbedeutend.

111) *A. Clebsch*, loc. cit.

so nimmt das Resultat die einfache Form an

$$\sigma^2 = \sigma_0^{\,2} + \sigma_1^{\,2},$$

wo σ_0, σ_1 die Werte, die σ bei fehlender Steifigkeit bzw. bei fehlender dauernder Spannung annehmen würde[112]).

3c. Gerader Stab von veränderlichem Querschnitt. Vernachlässigt man rotatorische Trägheit, so lautet die Gleichung[113])

$$(97)\qquad \varrho\,\omega\,\ddot{y} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(L\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right),$$

oder wenn y sich wie $e^{i\sigma t}$ verhält,

$$(98)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(L\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \sigma^2 \varrho\,\omega\,y.$$

Vorausgesetzt ist, dass die Hauptaxen der Querschnitte in zwei zu einer senkrechten longitudinalen Ebene liegen.

G. Kirchhoff hat gezeigt, dass diese Gleichung sich leicht integrieren lässt, wenn ω und $\varkappa^2$ durch ganze Potenzen von x dargestellt werden. Insbesondere betrachtete er den Fall eines keilförmigen Stabes, dessen Profil (in der x, y-Ebene) ein Dreieck mit sehr spitzem Winkel ist, und ausserdem den Fall eines Stabes von der Form eines spitz auslaufenden, nadelartigen Kegels. In beiden Fällen ist angenommen, dass der Stab an dem breiteren Ende eingeklemmt, am anderen Ende frei ist[114]). Die Normalfunktionen drücken sich durch Potenzreihen aus, in denen als Veränderliche der Abstand x vom freien Ende auftritt; diese Reihen stehen in enger Beziehung zu den Besselschen Funktionen, so dass die Periodengleichung sich numerisch lösen lässt. Die Frequenzen sind naturgemäss beträchtlich grösser als die für die entsprechenden Schwingungen eines gleichförmigen Stabes, dessen Querschnitt gleich dem am breiten Ende ist.

3d. Schwingungen eines krummen Stabes. α) Der einfachste Fall ist der eines Stabes, der eine ebene Kurve bildet und dessen

---

112) *A. Seebeck,* loc. cit. Die Formel ist als *Savart*sche Regel bekannt.

113) Dieselbe folgt z. B. aus der Variationsgleichung (81), siehe z. B. *Lord Rayleigh,* Sound, § 187. *Rayleigh* bespricht dort auch die Anwendung der Methoden von *Sturm* und *J. Liouville* [II A 7a, Nr. 4 (*M. Bôcher*)]; vgl. hierzu auch *A. Myller,* Diss. Göttingen 1906.

114) Berlin Ber. 1879, p. 815 = Ges. Abh., p. 339. Der Fall, dass der erstgenannte prismatische Stab senkrecht zu der Ebene des Dreiecks schwingt, ist behandelt von *F. Meyer zur Capellen,* Ann. Phys. 33 (1888), p. 661; der von letzterem angestellte Vergleich mit einem Sektor aus einer symmetrisch schwingenden Kreisplatte beruht jedoch auf einem Irrtum; bei letzterem Problem werden

Querschnitt zur Ebene dieser Kurve symmetrisch ist. Die wichtigste Modifikation gegenüber den früheren Entwicklungen bedeutet die Annahme, dass das Biegungsmoment der *Änderung* der Krümmung proportional ist.

Bei einem *gleichförmigen Kreisring* kann man die Normalschwingungen folgendermassen einteilen. Es seien u, v die radiale bzw. die tangentiale Verschiebung in der Ebene des Ringes und θ die Winkelkoordinate. Man hat dann erstens die *Biegungsschwingungen*[115])

$$(99)\qquad \begin{cases} u = A \cos s\theta e^{i\sigma t}, \quad v = -\dfrac{A}{s} \sin s\theta e^{i\sigma t}, \\ \sigma^2 = \dfrac{s^2(s^2-1)^2}{s^2+1} \dfrac{\varkappa^2}{a^4} \dfrac{E}{\varrho} \quad (s = 2, 3, 4, \ldots), \end{cases}$$

wo u, v der Bedingung verschwindender Dehnung $u + \partial v/\partial\theta = 0$, genügen. Zweitens hat man die *Dehnungsschwingungen*[116])

$$(100)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{A}{s} \cos s\theta e^{i\sigma t}, \quad v = B \sin s\theta e^{i\sigma t}, \\ \sigma^2 = (s^2+1) \dfrac{E}{\varrho a^2}, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Die Biegungsschwingungen eines kreisförmigen Stabes mit freien Enden in seiner eigenen Ebene lassen eine angenäherte Lösung zu, wenn die Gesamtkrümmung klein ist. Zieht man einen geraden Stab zum Vergleich heran, so besteht der Einfluss der Krümmung in einer Verkürzung der Periode und (bei der langsamsten Schwingung) in einem Heranrücken der Knoten an den Mittelpunkt um gewisse kleine Strecken, die dem Quadrat der Krümmung proportional sind[117]).

β) Sind die Verschiebungen eines krummen Stabes nicht auf die ursprüngliche Ebene des Stabes beschränkt, so gestaltet sich die Theorie insofern verwickelter, als ausser der Biegung auch *Torsion* in Betracht kommt. Ist w die Verschiebung senkrecht zu der genannten Ebene, so hat man ein System von Schwingungen, die vorwiegend den Charakter von Biegungsschwingungen besitzen[118]):

$$(101)\qquad \begin{cases} u = 0, \quad v = 0, \quad w = A \cos s\theta e^{i\sigma t}, \\ \sigma^2 = \dfrac{s^2(s^2-1)^2}{s^2+1+\eta} \dfrac{\varkappa_1^2}{a^4} \dfrac{E}{\varrho}, \quad (s = 2, 3, 4, \ldots), \end{cases}$$

wo $\varkappa_1$ der zweite Trägheitsradius des Querschnitts und η die Poisson-

115) *R. Hoppe*, J. f. Math. 73 (1871), p. 158. Die Theorie wurde vereinfacht von *Lord Rayleigh*, Sound, § 233.

116) *A. E. H. Love*, Elasticity, 1. Aufl., § 305.

117) *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 19 (1888), p. 365.

sche Konstante. Ausserdem treten Schwingungen auf, die im Wesentlichen sich als Torsionsschwingungen kennzeichnen, für die [118])

$$\sigma^2 = (s^2 + 1 + \eta)\frac{\mu}{\varrho a^2}, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots). \tag{102}$$

γ) Die *allgemeine Theorie* von Hause aus krummer Stäbe ist von *J. H. Michell* [118]), *A. B. Basset* [119]) und *A. E. H. Love* [120]) behandelt worden. Insbesondere ist die Theorie von Wellen auf einem Draht von der Form einer Schraubenlinie von *Michell* [118]) und ausführlicher von *Love* [121]) entwickelt worden. Wenn die Schraubenlinie sehr flach verläuft, so ergeben sich ähnliche Verhältnisse wie beim kreisförmigen Ring.

4. Schwingungen von Membranen. α) Die ideale Membran der Theorie ist eine materielle Fläche von der Beschaffenheit, dass die Spannung, die auf ein in ihr liegendes Linienelement wirkt, stets in die Tangentialebene fällt. Für eine ebene Membran lautet die *Gleichung der Querschwingung*

$$\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + R\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{103}$$

wo P, Q, R drei Funktionen, die die Spannung im Punkte (x, y) in der Ebene der Membran kennzeichnen; P, R sind nämlich die Normalspannungen auf die Linienelemente dy, dx, und Q ist die Schubspannung. Man erhält die Gleichung entweder durch direkte Berechnung der Wirkung der an einem Massenelement $\varrho\,dx\,dy$ angreifenden Spannungen [122]) oder durch ein Näherungsverfahren aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizität, indem man die Membran als Grenzfall einer dünnen Platte behandelt [123]).

Ist die Spannung gleichförmig, so sind die Koeffizienten P, Q, R konstant, und man kann die Gleichung durch Einführung neuer Koordinaten auf die Form bringen

$$\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{104}$$

---

119) London Math. Soc. Proc. 23 (1892), p. 105.

120) Elasticity, 1. Aufl., c. 18; 2. Aufl., c. 21.

121) Cambridge Phil. Soc. Trans. 18 (1900), p. 364.

122) *Euler,* Nov. Comm. Petrop. 10 (1766), p. 243, leitete die Gleichung für den Fall $P =$ const., $Q = 0$, $R =$ const. ab; ebenfalls *S. D. Poisson,* Paris, Mém. 8 (1829), p. 511. Die allgemeine Form wurde von *G. Lamé,* Élasticité, 9me leçon, gegeben.

123) *S. D. Poisson,* Paris Mém. 8 (1829), p. 357; *G. Kirchhoff,* Mechanik, Kap. 30; *A. Clebsch,* Elastizität § 79 berücksichtigt auch Steifigkeit und rota-

Im Falle isotroper Spannung (T) ist $P = R$, und man hat daher die Gleichung

$$(105)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad c^2 = \frac{T}{\varrho},$$

die sich leicht direkt ableiten lässt [124] [125]).

β) Um die *Normalschwingungen* einer gleichmässig gespannten Membran *mit fester Begrenzung* zu finden, setzt man einen Zeitfaktor $e^{i\sigma t}$ an. Man hat dann eine Funktion w zu bestimmen, die auf der Membran der Gleichung

$$(106)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 w = 0, \quad k^2 = \frac{\sigma^2}{c^2},$$

genügt und auf dem Rande verschwindet. Es läßt sich analytisch beweisen, daß Lösungen nur für eine Reihe diskreter Werte von k möglich sind, die die entsprechenden Werte von σ bestimmen (II A 7c, Nr. **9**, *A. Sommerfeld*). Im übrigen vergleiche über die Gleichung (106) die Monographie von *Fr. Pockels*.

Die Zahl der tatsächlich gelösten Fälle ist ziemlich klein. Für eine *rechteckige Membran*, die von den Geraden $x = 0, a$; $y = 0, b$ begrenzt ist, hat man [126])

$$(107)\qquad \begin{cases} w = A_{rs}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}, \quad \sigma^2 = \pi^2 c^2\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right) \\ \qquad\qquad (r, s = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Den Werten $r > 1$ entsprechen Knotenlinien parallel zur Seite b, und den Werten $s > 1$ entsprechen Knotenlinien parallel zu a. Sind a^2, b^2 inkommensurabel, so sind dies die einzigen Knotenlinien, und die Frequenzen der Normalschwingungen sind sämtlich von einander verschieden. Sind aber a^2, b^2 kommensurabel, so können einzelne von den Normalschwingungen durch Zusammenfallen der Periodenwerte (Nr. **1**a) unbestimmt werden; die Knotenlinien können dann sehr verschiedenartige Formen annehmen [127]).

---

124) Die Frage, durch welche Substitutionen $\varrho_1 = \varrho_1(x, y, t)$, $\varrho_2 = \varrho_2(x, y, t)$, $\varrho_3 = \varrho_3(x, y, t)$ die Gleichung (105) in eine nur von zwei Parametern ϱ_1, ϱ_2 abhängende Form übergeführt werden kann, ist untersucht von *G. Bisconcini*, Roma Acc. Linc. Rend. (5) 12^1 (1903), p. 385.

125) *Lord Rayleigh*, Sound, § 194.

126) *S. D. Poisson*, loc. cit. Die Normalfunktionen in (107) besitzen die gewohnte Orthogonaleigenschaft. Ein Beispiel für die Bestimmung der Koeffizienten bei gegebenen Anfangsbedingungen giebt *Lord Rayleigh*, Sound, § 196.

127) Im Falle eines Quadrats ($a = b$) z. B. kann man durch Überlagerung der Schwingungen $r = 1$, $s = 2$ und $r = 2$, $s = 1$ eine Diagonale als Knoten-

Die Normalschwingungen einer Membran, deren Rand ein *gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck* ist, sind sämtlich in denen einer quadratischen Membran enthalten[128]).

Die Theorie der *kreisförmigen Membran* erfordert die Einführung von Polarkoordinaten (r, θ). Man hat dann

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + k^2 w = 0; \tag{108}$$

hieraus ergiebt sich, wenn w sich wie $\cos(n\theta + \alpha)$ verhält, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) w = 0 \tag{109}$$

d. h. die Differentialgleichung der *Bessel*schen Funktionen (II A 10, Nr. 44, *A. Wangerin*). Die Normalschwingungen einer Membran, die von einem Kreise $r = a$ begrenzt wird, sind demgemäss gegeben durch

$$\left\{\begin{array}{c} w = J_n(kr)\cos(n\theta + \alpha), \quad J_n(ka) = 0. \\ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \end{array}\right. \tag{110}$$

Die *Bessel*schen Funktionen „zweiter Art“, die im Falle einer ringförmigen Membran Anwendung finden würden, sind hier durch die Bedingung, dass w für $r = 0$ endlich sein muss, ausgeschlossen. Die Orthogonalitätsbedingung der Normalfunktionen in (110) nimmt die bekannte Form

$$\int_0^a J_n(kr) J_n(k'r) r\,dr = 0 \tag{111}$$

an[129]), wo k, k' irgend zwei verschiedene Wurzeln von $J_n(ka) = 0$. Mittels dieser Relation kann man in der üblichen Weise zeigen, dass die Wurzeln sämtlich reell sind. Im Falle der zentrischen Symmetrie $(n = 0)$[130]) sind die Wurzeln gegeben durch

---

gleichwertig mit einer Schwingung, deren Knotenlinien die Diagonalen sind, und einer anderen, bei der ein symmetrisches Oval die Knotenlinie darstellt. Die Untersuchung derartiger Fälle ging aus von *S. D. Poisson*, loc. cit., und wurde erweitert von *G. Lamé*, Élasticité, 10me leçon; *B. Riemann-H. Weber*, Part. Diff.gl., § 94; *O. Weber*, S.-A. Gedächtnisfeier d. Gymn. Zittau 1903, p. 1; vgl. *Lord Rayleigh*, Sound, § 197.

128) *Lord Rayleigh*, Sound, § 199. Der Fall des gleichseitigen Dreiecks wurde gelöst von *G. Lamé*, Élasticité, 10me leçon; vgl. *F. Pockels*, $\Delta u + k^2 u = 0$, p. 148.

129) Der direkte Beweis mittelst der Variationsgleichung findet sich bei *Lord Rayleigh*, Sound, § 203.

130) Derselbe wurde erledigt von *S. D. Poisson*, loc. cit., der die ungefähren Werte der beiden ersten Wurzeln berechnete.

$$ka/\pi = 0{,}7655, \quad 1{,}7571, \quad 2{,}7546, \quad \ldots;$$

die Zahlen konvergieren gegen die Grösse $s - \frac{1}{4}$. Für die zweite, dritte, ... Normalschwingung geben die *kleineren* Wurzelwerte, gleich kr/π gesetzt, die Radien r der Knotenkreise an. Für $n > 0$ hat man als Knotenlinien n unter gleichen Winkeln sich kreuzende Durchmesser und eventuell eine Reihe konzentrischer Kreise. Für $n = 1$ hat man

$$ka/\pi = 1{,}2197, \quad 2{,}2330, \quad 3{,}2383, \quad \ldots,$$

diese Zahlen konvergieren gegen die Form $s + \frac{1}{4}$.[131])

Die Normalschwingungen eines *Kreissektors* werden gleichfalls durch (110) dargestellt, vorausgesetzt, dass n (jetzt nicht notwendig ganzzahlig) in geeigneter Weise bestimmt wird. So muss $\sin n\alpha = 0$ sein, wenn $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ die Grenzradien sind[132]).

Es sei noch bemerkt, dass die allgemeine Lösung der Gleichung (105) für den *Fall zentrischer Symmetrie,* wo sie die Gestalt

$$(112) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

annimmt, von *S. D. Poisson*[133]) in folgender Form erhalten wurde:

$$(113) \quad w = \int_0^\pi f(ct + r\cos\omega)\, d\omega + \int_0^\pi F(ct + r\cos\omega) \lg (r \cos^2 \omega)\, d\omega;$$

hierin bedeuten f und F willkürliche Funktionen. Das zweite Integral muss wegfallen, wenn in dem Bereich, für den (112) angenommen wird, der Koordinatenanfangspunkt liegt.

In der Dynamik einer unendlich ausgedehnten Membran und anderen analogen Problemen zweidimensionaler Wellenbewegung ist

---

131) Allgemeine Ausdrücke für die Wurzeln von J_0, J_1 in Reihenform wurden gegeben von *G. G. Stokes,* Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1850), p. 166 = Papers 2, p. 329. Das Verfahren ist dann erheblich ausgedehnt von *J. Mc Mahon*, Ann. of math. 9 (1894), p. 23. Eine Zusammenstellung von numerischen Ergebnissen bezüglich der Normalschwingungen giebt *A. Bourget,* Ann. éc. norm. 3 (1866), p. 55.

132) *Lord Rayleigh,* Sound, § 207. Der Fall $\alpha = 2\pi$ ist besonders einfach; weil die Funktionen $J_{\frac{1}{2}}$, $J_{\frac{3}{2}}$, ... sich in endlicher Form ausdrücken lassen; so ergeben sich die Normalschwingungen einer kreisförmigen Membran, von der ein Radius festgehalten wird.

133) J. éc. polyt. 12 (1821), p. 227. Die Bewegung einer kreisförmigen Membran, die gegebenen Anfangsbedingungen entspricht, wurde untersucht von *F. Pagani*, Corresp. math. phys. 5, 6 (1829—30). Ein einfacher Fall ist von *Lord*

eine bequemere Lösungsform[134]):

$$(113') \qquad 2\pi w = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r}{c}\cosh u\right) du + \int_0^\infty F\left(t + \frac{r}{c}\cosh u\right) du.$$

Der erste Term repräsentiert ein nach aussen laufendes Wellensystem, das durch eine Quelle $f(t)$ im Anfangspunkt erzeugt wird[135]).

Die Normalschwingungen einer Membran, die etwas von der Kreisform abweicht, sind von *Lord Rayleigh*[136]) nach dem in Nr. **1**a angedeuteten Näherungsverfahren behandelt.

Man hat versucht, die Normalschwingungen von *Membranen von allgemeinerer Form* unter Benutzung rechtwinkliger krummliniger Koordinaten ξ, η abzuleiten. Eine der Kurven $\eta =$ const. falle mit der vorgelegten Randkurve zusammen. Setzt man

$$(114) \qquad x + iy = f(\xi + i\eta),$$

so nimmt die Gleichung (106) die Form an:

$$(115) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + k^2 \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \right\} w = 0.$$

Im Falle elliptischer Koordinaten

$$x + iy = c \cos(\xi + i\eta)$$

kann man eine Lösung in der Form

$$w = \varphi(\xi) \cdot \chi(\eta)$$

erhalten; es zeigt sich, dass bei einer elliptischen Membran die Knotenlinien aus konfokalen Ellipsen und Hyperbeln bestehen[137]).

Eine andere Anwendung der Gleichung (115) hat *E. J. Routh*[138]) gegeben. Letztere lässt sich auffassen als Gleichung einer schwingenden Membran, die der (ξ, η)-Ebene angehört und deren Dichte mit

134) *H. Lamb,* London Math. Soc. Proc. 35 (1902), p. 141. Siehe auch *T. Levi-Civita,* Nuovo Cim. (4) 6 (1897); *V. Volterra,* Acta math. 18 (1894).

135) Es ergiebt sich, dass das Wellensystem, wie es durch einen vorübergehenden Impuls erzeugt wird, nach hinten nicht ebenso scharf wie nach vorn begrenzt ist; es hat eine unendlich ausgedehnte „Schleppe". Dies bildet einen Zwischenfall zwischen eindimensionalen Wellen (wie auf einer unendlich langen Saite) und den kugelförmigen Schallwellen (vgl. Nr. 6b); *H. Lamb,* loc. cit.

136) Sound, § 209.

137) *E. Mathieu,* J. de math. 13 (1868), p. 137; vgl. *F. Pockels,* $\Delta u + k^2 u = 0$. Der Fall parabolischer Begrenzung wurde behandelt von *H. Weber,* Math. Ann. 1 (1869), p. 1; Part. Diff.gl. 2, p. 267. *J. H. Michell,* Mess. of math. 19 (1890), p. 83, zeigt, dass von krummlinigen Koordinaten allein die elliptischen eine Lösung von der oben angegebenen Form zulassen.

$(\partial x/\partial \xi)^2 + (\partial y/\partial \xi)^2$ proportional ist. Aus jeder bekannten Normalschwingung einer homogenen Membran lässt sich demnach eine Normalschwingung einer bestimmten Membran von ungleicher Dichte ableiten; überdies zeigt sich, dass die Massen entsprechender Flächenstücke in einem gewissen konstanten Verhältnis zu einander stehen. Das Verfahren gestattet jedoch nicht die Bestimmung des vollständigen Systems der Schwingungen der transformierten Membran[139]).

γ) Der Fall eines Membran von konstanter Dichte, deren *Hauptspannungen gleichförmig, aber voneinander verschieden* sind, lässt sich auf den Fall isotroper Spannung zurückführen. Setzt man in (104)

$$x = x'\sqrt{P}, \quad y = y'\sqrt{R},$$

so kommt die Gleichung auf den isotropen Typus (105) zurück; die Form des Randes wird jedoch geändert, eine kreisförmige Begrenzung z. B. geht in eine elliptische über. Die Methode rührt her von *H. Helmholtz* und wurde von ihm bei der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen einer Membran angewendet, die von zwei unter spitzem Winkel sich schneidenden Geraden begrenzt wird[140]).

δ) Es ist noch zu bemerken, dass durch ein Netz gespannter Fäden, die in den Schnittpunkten mit gleichen Massenpunkten belastet sind, eine Herrichtung entsteht, die zu einer Membran in derselben Beziehung steht, wie *Lagranges* belasteter Faden (Nr. 2c) zu einer Saite[141]).

---

139) Fälle geringer Dichteänderung lassen sich einfacher mittelst der *Rayleigh*schen Näherungsmethode behandeln; siehe Sound, § 208.

140) Verh. d. naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg 5 (1869), p. 33 = Wiss. Abh. 2, p. 582; Tonempfindungen, 3. Aufl. (1870), Beil. XI. Es wird vorausgesetzt, dass die Spannung in Richtung der Mittellinie klein ist gegen die in senkrechter Richtung; es wird auch ein Reibungsglied eingeführt. Wirkt ein periodischer Druck von gegebener Frequenz auf die Membran, so bleibt die Erregung merklich auf die Stelle beschränkt, wo die Breite mit der Spannung so verknüpft ist, dass die entsprechende freie Periode einer gleichgespannten Saite von dieser Länge nahezu mit der eingeprägten Periode übereinstimmt. Die Untersuchung hängt zusammen mit der Vorstellung von der Konstitution der membrana basilaris des Ohrs und ihrer Funktion bei der Beurteilung der Tonhöhe.

141) *E. J. Routh,* London Math. Soc. Proc. 15 (1884), p. 231. Sind die Maschen einander gleich und rechteckig und die Spannungen umgekehrt proportional der Länge der Seiten, in denen sie wirken, so hat man das Analogon zur isotropen Membran. In einem unendlichen Netze dieser Art hängt die Wellengeschwindigkeit bis zu einem gewissen Grade von der Periode und der Richtung der Wellenbewegung ab; überschreitet die Frequenz eine gewisse Grenze, so wird Wellenbewegung unmöglich. Verringert man andererseits die Frequenz, so strebt die Wellengeschwindigkeit einem bestimmten, von der Richtung unabhängigen Grenzwert zu.

5. Schwingungen von Platten und Schalen.

5a. Dehnungsschwingungen einer gleichförmigen Platte. Die Theorie der Schwingungen einer Platte in ihrer eigenen Ebene wurde von *S. D. Poisson*[86]) und *A. L. Cauchy*[142]) begründet. Die z-Axe sei normal zur Platte; die Annahme ist dann, dass die Spannungen p_{xz}, p_{yz}, p_{zz} verschwinden und dass die übrigen Spannungen von z unabhängig sind. Sind u, v die Verschiebungskomponenten, so gilt danach für isotropes Material[143])

$$(116)\qquad \begin{cases} p_{xx} = A\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial v}{\partial y}\right), \\ p_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\ p_{yy} = A\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \eta \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \end{cases} \qquad A = \frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \eta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Demgemäss ergeben sich folgende Gleichungen[144]):

$$(117)\qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) - \mu \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Wenn die Platte von einer zylindrischen Fläche begrenzt ist, deren Erzeugende zur z-Axe parallel sind, so sind die auf den Rand wirkenden Spannungskomponenten pro Flächeneinheit gegeben durch

$$p_{xx}\cos\theta + p_{xy}\sin\theta, \quad p_{xy}\cos\theta + p_{yy}\sin\theta,$$

wo θ die Neigung der nach aussen gerichteten Normale zur x-Axe.

Die Bestimmung der Normalschwingungen einer *Kreisplatte* ist von *A. Clebsch*[144]) in Polarkoordinaten durchgeführt. Der Fall der zentrischen Symmetrie war bereits von *S. D. Poisson*[86]) behandelt. Schreibt man $u = Rx/r$, $v = Ry/r$, so erhält man

$$(118)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = \frac{A}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r^2} R\right)$$

mit der Randbedingung $R = 0$ oder $\partial R/\partial r + \eta R/r = 0$, je nachdem

142) Exercices de math. 3 (1828), p. 328 = Oeuvres (2), 7.

143) Ihrer allgemeinen Form nach bleiben die Gleichungen für nicht-isotrope Platten bestehen, vorausgesetzt, dass bezüglich der zu den Plattenseiten parallelen Ebenen elastische Symmetrie herrscht.

144) In dieser Form sind sie aufgestellt von *A. Clebsch*, Elastizität, p. 309. Vgl. auch die Darstellung in IV 25, Nr. 14c (*O. Tedone-A. Timpe*) für den Fall der „Reckung" einer Platte. *Poissons* Formeln stützen sich auf die Annahme

der Rand fest oder frei ist. Die Lösung ist

$$R = CJ_1(mr)e^{i\sigma t}, \quad m^2 = \sigma^2 \varrho / A, \tag{119}$$

wo J_1 die *Bessel*sche Funktion ist und die Werte von m bezüglich durch

$$J_1(ma) = 0 \quad \text{oder} \quad maJ_1'(ma) + \eta J_1(ma) = 0 \tag{120}$$

bestimmt sind, wenn a den Radius bezeichnet[145]).

Bemerkenswert ist, dass bei allen Dehnungsschwingungen die Frequenz von der Plattendicke unabhängig ist.

5b. Biegungsschwingungen einer Platte.[145a]) α) Viel wichtiger ist vom physikalischen Standpunkt die Theorie der Querschwingungen. Die *Bewegungsgleichung* wurde von *Poisson*[86]) und *Cauchy*[146]) für den Fall isotropen Materials aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizität und der Hilfsannahme abgeleitet, dass die Formänderungen dem Abstand von der Mittelfläche proportional sind.

G. Kirchhoff[147]) nimmt zum Ausgangspunkt seiner Untersuchung den Ausdruck für die potentielle Energie

$$W = \frac{4}{3}\frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu} h^3 \iint \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{2\eta}{\varrho_1\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right) dx\,dy, \tag{121}$$

wo $1/\varrho_1$, $1/\varrho_2$ die Hauptkrümmungen der gebogenen Platte und h die halbe Plattendicke; derselbe gründet sich auf eine ähnliche Annahme wie die der *Poisson*schen Theorie.

Beim Verfahren von *Thomson-Tait*[148]) wird die direkte Annahme gemacht, dass im deformierten Zustand das Biegungsmoment, das auf ein Element einer Krümmungslinie wirkt, diese Linie zur Axe hat und dass der auf die Längeneinheit der beiden Krümmungslinien bezogene Betrag der Biegungsmomente gegeben ist durch

$$Bh^3\left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{\eta}{\varrho_1}\right) \quad \text{bzw.} \quad Bh^3\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\eta}{\varrho_2}\right).$$

---

145) *S. D. Poisson* führt die Funktion J_1 in Form eines bestimmten Integrals ein, entwickelt sie aber nachher in eine Reihe. Er berechnet (nicht gerade sehr genau) die beiden ersten Wurzeln von jeder der Periodengleichungen (120) unter der Voraussetzung $\eta = \frac{1}{4}$.

145a) Vgl. auch hierzu die ausführlichere Darstellung der „Biegung" der Platten in IV 25, Nr. **14**b und **14**c (*O. Tedone-A. Timpe*).

146) loc. cit. In den Exerc. de math. 4 (1829) untersucht *Cauchy* den Fall einer äolotropen Substanz. Die Gleichungen, zu denen er gelangt, ähneln denjenigen, die *Thomson-Tait* (siehe Fussnote 149) für diesen Fall aufgestellt haben.

147) J. f. Math. 40 (1850), p. 51 = Ges. Abh., p. 237.

148) Nat. Phil. [illegible]

Hier sind B, η elastische Konstanten, die durch

$$B = \frac{8}{3}\frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \eta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

definiert sind. Diese Formeln beziehen sich auf eine Platte aus isotropem Material. Der allgemeinere Fall einer äolotropen Platte wird gleichfalls von *Thomson-Tait*[149]) behandelt.

Bei einem anderen Verfahren werden die auf einen Normalschnitt der Platte wirkenden Kräftepaare unmittelbar auf Grund gewisser Annahmen über die angenäherte Natur der Deformation berechnet. Wenn nämlich G_{xx}, G_{xy} die Komponenten des Kräftepaares, das auf ein Linienelement dy pro Längeneinheit wirkt, und G_{yx}, G_{yy} die Kräftepaare bedeuten, die auf ein Element dx wirken, so hat man[150])

$$G_{xx} = (1-\eta)Bh^3\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = -G_{yy},$$

$$G_{xy} = -Bh^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad G_{yx} = Bh^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

wo w die zur Ebene der Platte normale Verschiebung.

Die Bewegungsgleichung ergiebt sich aus Formel (121) durch Anwendung des Variationsverfahrens von *Lagrange*[147]) oder aus den Ausdrücken für die Biegungsmomente bei Berücksichtigung der in der Richtung der Normale wirkenden Schubspannungen[151])[152]) in folgender Form

$$2\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Bh^2\Delta^2 w = 0, \tag{122}$$

wo $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Die *Randbedingungen* werden je nach der Natur des Problems verschieden ausfallen.

Für einen *eingeklemmten* Rand muss sein: $w = 0$, $\partial w/\partial n = 0$, wo dn ein Element der Normale des Randes in der Ebene der Platte.

Für einen *gestützten* Rand hat man $w = 0$ und

$$\eta\Delta w + (1-\eta)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\theta\right) = 0, \tag{123}$$

wo θ die Richtung der Randnormale anzeigt. Diese Gleichung drückt aus, dass das Biegungsmoment um die Tangente der Randkurve verschwinden muss.

---

149) § 641. Siehe auch *Lord Rayleigh*, Sound, 2. Aufl. § 214.

150) *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 21 (1890), p. 70; *A. B. Basset*, London Math. Soc. Proc. 21 (1889), p, 33.

Verwickelter ist der Fall eines *freien* Randes. Ist Z die Schubkraft auf ein Element ds, welches dicht an dem Rand und parallel demselben liegt, und N das Moment um eine Normale dieses Elements, so ist man im ersten Augenblicke geneigt, mit *Poisson* und *Cauchy* als Randbedingungen ausser der Gleichung (123) die Relationen $N = 0$, $Z = 0$ anzusetzen; *G. Kirchhoff* hat jedoch gezeigt, dass es im allgemeinen unmöglich ist, drei unabhängigen Randbedingungen zu genügen[151a]). Bei dem von ihm angewendeten Variationsverfahren tritt die Schwierigkeit nicht auf; ausser der Bedingung (123) erhält er

$$(124)\quad \left(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta w+(1-\eta)\frac{\partial}{\partial s}\left\{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right.$$
$$\left.+\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}=0.$$

Thomson-Tait[152]) haben dann auf direkterem Wege gezeigt, dass Z und N nur die Relation:

$$Z=\frac{\partial N}{\partial s}$$

zu erfüllen brauchen, da am Rande von aussen angreifende Schubkräfte und Kräftepaare, die dieser Bedingung genügen, nur in unmittelbarer Nähe des Randes Formänderungen hervorrufen[153]). Die Gleichung (124) ist die ausgeschriebene Form der Relation $Z = \partial N/\partial s$.

β) Um die *Normalschwingungen einer Platte von gegebener Form* zu bestimmen, setzt man einen Zeitfaktor $e^{i\sigma t}$ an. Schreibt man $2\sigma^2\varrho/Bh^2 = m^4$, so hat man (122) in der Form:

$$(125)\qquad (\Delta+m^2)(\Delta-m^2)\,w=0.$$

Wenn eine passende Lösung dieser Gleichung sich ermitteln lässt, so kann man, indem man in die Randbedingungen einsetzt, die Werte von m und die Form der Normalfunktionen bestimmen. Die Frequenz ergiebt sich dann aus der Gleichung

$$(126)\qquad \sigma=\frac{1}{\sqrt{3(1-\eta^2)}}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\cdot h\cdot m^2,$$

und ist demnach der Plattendicke proportional.

151a) Vgl. hierzu IV 25, Nr. **14** b (*O. Tedone-A. Timpe*), sowie auch die Diskussion zwischen *Poisson* und *Navier*, Ann. chim. phys. 38 (1828), p. 309, 440; 39 (1828), p. 150, 208; 40 (1829) p. 106.

152) *Thomson-Tait*, § 645. Siehe ferner *J. Boussinesq*, J. de math. (2) 16 (1871), p. 125, und Application des potentiels, Paris 1885.

153) *H. Lamb*, loc. cit., legt dar, dass mit einer derartigen Deformation eine in unmittelbarer Nähe des Randes abnorme Schubspannung auf die zu dem-

Für eine *rechteckige Platte, die an den Kanten* ($x = 0, a$; $y = 0, b$) *gestützt* ist, hat man [154])

$$(127) \quad \begin{cases} w = C_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}, \quad m^2 = \pi^2 \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right) \\ \qquad (r, s = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Die Theorie der Knotenlinien ist dieselbe wie bei der rechteckigen Membran (Nr. 4), nur verhalten sich die Frequenzen der einzelnen Schwingungen wie die Quadrate der entsprechenden Frequenzen der Membran.

Für eine *rechteckige Platte mit freien Kanten* lauten die Bedingungen, die auf einer zur x-Axe parallelen Kante zu erfüllen sind,

$$(128) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \eta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

entsprechend die Bedingungen auf einer zur y-Axe parallelen Kante. In dem besonderen Fall einer durch $\eta = 0$ gekennzeichneten Substanz lassen sich beide Gruppen von Bedingungen durch die Annahme befriedigen, dass die Platte wie ein Stab (Nr. 3b) schwingt, dessen Längsrichtung zur x-Axe oder zur y-Axe parallel ist; man erhält also Normalschwingungen, deren Knotenlinien zu den Kanten parallel sind [155]). Im Falle einer quadratischen Platte kann man verwickeltere Schwingungsarten durch Überlagerung ableiten; die vollständige Reihe der Normalschwingungen kann jedoch auf diesem Wege nicht gewonnen werden. Für den Fall $\eta \neq 0$ sind die Normalschwingungen einer freien rechteckigen Platte noch nicht ermittelt worden [156]) [157]).

Die Theorie der Fortpflanzung von Biegungswellen entlang einem geraden Streifen mit parallelen Rändern ist von *H. Lamb* [158]) behandelt worden.

---

154) *Lord Rayleigh,* Sound, § 225.

155) *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (4) 46 (1873), p. 166, 246; Sound, §§ 226, 227.

156) Der Fall einer rechteckigen Platte, von der zwei gegenüberliegende Kanten gestützt und die beiden anderen frei sind, ist gelöst von *W. Voigt,* Gött. Nachr. 1893, p. 225.

157) Die Randbedingung (124) erfährt an einer scharfen Ecke infolge der Unstetigkeit von θ eine Abänderung. Sind die dort zusammenstossenden Kanten bezüglich zur x- und y-Axe parallel, so muss $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ sein. In der Nähe einer Ecke ist, wie sich zeigen lässt, die Form der Platte in jedem Augenblick nahezu eben und zwar ist die Abweichung klein von vierter Ordnung; *H. Lamb,* loc. cit.

158) loc. cit. Insbesondere werden die beiden Grenzfälle betrachtet, wo die Wellenlänge sehr gross oder sehr klein ist gegenüber der Breite des Streifens. In dem zweiten Falle hat man nur nahe am Rande merkliche Wellenbewegung.

Bei der *Kreisplatte* muss man wieder Polarkoordinaten heranziehen[159]). Die allgemeine Differentialgleichung ergiebt sich, wenn man

$$(129)\qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

in (125) einführt; die typische Lösung ist

$$(130)\qquad w = \{AJ_n(mr) + BI_n(mr)\}\cos(n\theta + \alpha).$$

Der einfachste Fall ist der einer am Rande *eingeklemmten* Platte. Die Bedingungen $w = 0$, $\partial w/\partial r = 0$ für $r = a$ liefern[160])

$$(131)\qquad \frac{J_n'(ma)}{J_n(ma)} = \frac{I_n'(ma)}{I_n(ma)}.$$

Für eine am Rande *gestützte* Platte lauten die Randbedingungen: $w = 0$ und

$$(132)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = 0;$$

letztere Gleichung tritt ein für (123). Es ergiebt sich[161])

$$(133)\quad (1-\eta)\frac{ma\,J_n'(ma)}{J_n(ma)} + m^2a^2 = (1-\eta)\,ma\,\frac{I_n'(ma)}{I_n(ma)} - m^2a^2.$$

Für eine Scheibe mit *freier Kante* sind die Randbedingungen gegeben durch (132) und

$$(134)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\Delta w + \frac{1-\eta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) = 0;$$

letztere Gleichung tritt ein für (124). Sie führen auf die Periodengleichung[162])

$$(135)\qquad \frac{(1-\eta)n^2\{ma\,J_n'(ma) - J_n(ma)\} + m^3a^3J_n'(ma)}{(1-\eta)n^2\{ma\,I_n'(ma) - I_n(ma)\} - m^3a^3I_n'(ma)}$$
$$= \frac{(1-\eta)\{ma\,J_n'(ma) - n^2J_n(ma)\} + m^2a^2J_n(ma)}{(1-\eta)\{ma\,I_n'(ma) - n^2I_n(ma)\} - m^2a^2I_n(ma)}.$$

---

159) *S. D. Poisson, G. Kirchhoff,* loc. cit.; *G. M. Pagani,* Corresp. math. 5 (1829), p. 227; 6 (1830), p. 28; *Lord Rayleigh,* Sound, § 218.

160) *F. Meyer zur Capellen,* Ann. Phys. 33 (1888), p. 661. Im Falle der Symmetrie ($n = 0$) sind die kleinsten Wurzeln $m^2a^2 = 10,2156$; $39,59$, ... Näherungswerte für die ersten beiden Wurzeln sind berechnet von *S. D. Poisson,* der auch fand, dass der Radius des Knotenkreises bei der zweiten Normalschwingung gleich $0,381\,a$ ist. Siehe auch *Lord Rayleigh,* Sound, 2. Aufl., § 221a (Telephonplatte).

161) Die beiden kleinsten Wurzeln sind im Falle $n = 0$ von *S. D. Poisson* unter der Voraussetzung $\eta = \frac{1}{4}$ bestimmt zu $m^2a^2 = 4,8591$; $29,67$. Der Radius des Knotenkreises bei der zweiten Normalschwingung ist gegeben durch $r = 0,441\,a$.

162) *G. Kirchhoff,* loc. cit., *Rayleigh,* Sound, § [illegible]

Im Falle $n = 0$ reduziert sich dieselbe auf[163])

$$(136) \qquad \frac{ma J_0(ma)}{J_0'(ma)} - \frac{ma I_0(ma)}{I_0'(ma)} + 2(1-\eta) = 0.$$

Die Gleichung (135) ist in systematischer Weise von *G. Kirchhoff* diskutiert worden. Von Nennern befreit lässt sie sich nach Potenzen von $m^4 a^4$ entwickeln und mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung, der die Normalfunktionen genügen, kann man zeigen, dass die Werte von $m^4 a^4$, die sie befriedigen, sämtlich reell und positiv sind. Andererseits lässt sich die Gleichung mittelst der semikonvergenten Ausdrücke für $J_n(ma)$, $I_n(ma)$ in der Form schreiben

$$\operatorname{tg}(ma - \tfrac{1}{2} n\pi) = f(ma),$$

wo $f(ma)$ klein ist, wenn ma gross ist. Dies liefert eine bequeme Annäherung für die höheren Wurzeln und ergiebt eine von *E. F. Chladni* aufgestellte Näherungsformel für die relativen Frequenzen der höheren Schwingungen, denen eine gegebene Zahl n von Knotendurchmessern entspricht. *Kirchhoff* berechnet ferner die relativen Frequenzen und die Radien der Knotenkreise für die tieferen Schwingungen in den Fällen $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ für $\eta = \frac{1}{4}$ und für $\eta = \frac{1}{3}$.[164])

γ) Die Theorie der Schwingungen einer Platte bei *Berücksichtigung rotatorischer Trägheit und dauernder Spannung* ist von *A. Clebsch*[165]) behandelt worden.

Den Einfluss geringer Unregelmässigkeiten in der Form oder Konstitution der Platte hat *J. Zenneck*[166]) untersucht.

5c. Dehnungsschwingungen einer Schale. Die Theorie der Schwingungen einer krummen Schale ist naturgemäss verwickelter als die der Plattenschwingungen, insofern Dehnungen der Mittelfläche und Krümmungsänderungen hier in der Regel untrennbar verbunden sind. Es scheint jedoch, dass die Normalschwingungen stets in zwei Klassen zerfallen, wenn man unter sonst gleich bleibenden Umständen

163) Dieser Fall wurde von *Poisson* unter der Voraussetzung $\eta = \frac{1}{4}$ diskutiert. Für die ersten beiden Wurzeln fand er die Werte $m^2 a^2 = 8{,}8897$; $38{,}36$; den Radius des Knotenkreises bei der ersten Normalschwingung berechnete er zu $r = 0{,}6806\, a$.

164) Am vollständigsten sind die Resultate angegeben in den Ann. Phys. Chem. 81 (1850), p. 258 = Ges. Abh., p. 279. Es ergiebt sich, dass die langsamste von allen Normalschwingungen zwei Knotendurchmesser und keinen Knotenkreis besitzt.

165) Elastizität, p. 334, 344. Als Grenzfall entsteht hier, wenn die Steifigkeit gegen die Anfangsspannung verschwindet, der Fall der Membran; vgl. den analogen Grenzfall für den Draht und die Saite in Nr. 3b, ε.

166) Ann. Phys. 67 (1899), p. 165. Es wird hauptsächlich die Bestimmung der Lage der Knotendurchmesser ins Auge gefasst.

die Dicke der Schale stetig abnehmen lässt. Bei der einen Klasse konvergieren die Frequenzen gegen bestimmte, endliche Grenzen; bei der anderen nehmen sie unbegrenzt ab. Im Falle einer ebenen Platte werden diese beiden Klassen von den Schwingungen in der Ebene der Platte und den dazu senkrechten Schwingungen dargestellt.

Die Theorie der Dehnungsschwingungen einer Schale kann entweder von dem Ausdruck für die potentielle Energie in der Form[167])

$$(137)\quad W = \iint \left\{ \frac{4(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu} (\varepsilon_1{}^2 + 2\eta\,\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2{}^2) + \mu\varpi^2 \right\} h\,dS$$

ausgehen, wo ε_1, ε_2 die Dehnungen in zwei zu einander senkrechten Richtungen und ϖ der entsprechende Schub, oder sich auf die direkte Berechnung der Spannungen stützen, die auf den Rand eines rechteckigen Flächenelements wirken. Führt man rechtwinklige krummlinige Koordinaten ξ, η ein, so sind die Spannungen in der Tangentialebene gegeben durch

$$(138)\quad \begin{cases} P_{\xi\xi} = \dfrac{8(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu} h(\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2), \quad P_{\eta\eta} = \dfrac{8(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu} h(\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_1), \\ \qquad\qquad P_{\xi\eta} = 2\mu h\varpi = P_{\eta\xi}, \end{cases}$$

wo jetzt η die Poissonsche Konstante bezeichnen möge. Es empfiehlt sich, die Kurven $\xi =$ const., $\eta =$ const. mit den Krümmungslinien im undeformierten Zustand zusammenfallen zu lassen. Ist dementsprechend der Ausdruck des Linienelements gegeben durch

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{h_1{}^2} + \frac{d\eta^2}{h_2{}^2},$$

so findet man[168])

$$(139)\quad \begin{cases} 2\varrho h \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{1}{h_2} P_{\xi\xi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{1}{h_1} P_{\eta\xi}\right) + P_{\xi\eta}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{1}{h_1}\right) - P_{\eta\eta}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{1}{h_2}\right), \\ 2\varrho h \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{1}{h_2} P_{\xi\eta}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{1}{h_1} P_{\eta\eta}\right) + P_{\eta\xi}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{1}{h_2}\right) - P_{\xi\xi}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{1}{h_1}\right), \\ 2\varrho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{1}{h_1 h_2}\left(\dfrac{P_{\xi\xi}}{\varrho_1} + \dfrac{P_{\eta\eta}}{\varrho_2}\right), \end{cases}$$

wo u, v, w die Verschiebungskomponenten längs der Krümmungslinien und in Richtung der Normalen.

Die Formänderungen ε_1, ε_2, ϖ drücken sich durch u, v, w mittelst der allgemeinen Formeln von *C. W. Borchardt* (IV 14, Nr. **20**, *M. Abraham*) aus[169]).

167) *H. Lamb,* London Math. Soc. Proc. 14 (1882), p. 54.

168) *H. Lamb,* London Math. Soc. Proc. 21 (1890), p. 119. In (139) sind die Schubspannungen in Richtung der Normalen weggelassen.

169) Andere Ableitungen rühren her von *A. E. H. Love,* London Phil.

Im Falle des Kreiszylinders oder der Kugel kann man die nötigen Formeln bequemer auf direktem Wege erhalten.

Für einen *Zylinder* vom Radius a sind die Formänderungen

$$(140) \qquad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{a\partial \theta} + \frac{w}{a}, \quad \varpi = \frac{\partial u}{a\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

wenn (x, a, θ) die Zylinderkoordinaten eines Punktes der Schale; die Bewegungsgleichungen reduzieren sich auf

$$(141) \qquad \begin{cases} 2\varrho h \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{x\theta}}{a\partial \theta}, \\ 2\varrho h \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial P_{x\theta}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{\theta\theta}}{a\partial \theta}, \\ 2\varrho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\dfrac{P_{\theta\theta}}{a}. \end{cases}$$

Im Falle eines *unendlich langen Hohlzylinders*[170]) hat man erstens die Normalschwingungen, für die $u = 0$. Dieselben sind dem Charakter und der relativen Frequenz nach verwandt mit den Dehnungsschwingungen eines Ringes (Nr. **3** d), von denen sie sich nur in Bezug auf die elastische Konstante unterscheiden. Zweitens hat man die Schwingungen

$$(142) \qquad \begin{cases} u = C \cos s\theta e^{i\sigma t}, \quad v = 0, \quad w = 0, \\ \sigma^2 = \dfrac{\mu}{\varrho a^2} s^2, \end{cases}$$

bei denen die Substanz längs der Erzeugenden gleitet. Schliesslich hat man die Schwingungen vom Typus

$$(143) \qquad \begin{cases} u = A \cos s\theta \cos kx e^{i\sigma t}, \quad v = B \sin s\theta \sin kx e^{i\sigma t}, \\ w = C \cos s\theta \sin kx e^{i\sigma t}, \end{cases}$$

wo k willkürlich ist. Die Periodengleichung, die sich ergiebt, ist vom 3ten Grade in σ^2. Setzen wir $\sigma = kc$, so liefert sie die Wellengeschwindigkeiten (c) dreier Gattungen von Wellen von der *vorgeschriebenen* Länge $2\pi/k$. Im Falle $s = 0$ handelt es sich um Drillungs-, Längs- und Ringelwellen. Für erstere ist $c = \sqrt{\mu/\varrho}$, während für die beiden anderen Wellenarten c von dem Verhältnis (ka) abhängt, in dem der Zylinderumfang zur Wellenlänge steht. Wenn dies Verhältnis einen kleinen Wert hat, so ist die Geschwindigkeit der Längswellen gleich $\sqrt{E/\varrho}$[171]).

170) *Lord Rayleigh,* London Roy. Soc. Proc. 45 (1889), p. 443; Sound, § 235e.

171) Der Fall $s = 1$, ka als klein vorausgesetzt, umfasst Biegungsschwingungen eines engen Rohres, für welche $c^2 = \frac{1}{2} E/\varrho \cdot k^2 a^2$, in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Theorie (Nr. 3b).

Die Schwingungen eines *Zylinders von endlicher Länge* sind noch nicht vollständig untersucht worden [172]).

Für eine *Kugelfläche* hat man, wenn θ, ω Winkelkoordinaten bedeuten,

$$(144)\qquad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{w}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\omega} + \operatorname{cotg}\theta\frac{u}{a} + \frac{w}{a},$$

$$\varpi = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\omega} + \sin\theta\frac{\partial}{a\partial\theta}\left(\frac{v}{\sin\theta}\right).$$

Bei der *geschlossenen Kugelschale* zerfallen die Normalschwingungen in zwei Hauptklassen [167]). Bei der ersten ist die Verschiebung rein tangential, und zwar in Richtung der Konturlinien einer Kugelflächenfunktion S_n, und ihre Amplitude ist dem Abstand konsekutiver Konturen umgekehrt proportional, wenn diese für gleiche unendlich kleine Zuwachse von S_n gezeichnet sind [173]). Analytisch:

$$(145)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial S_n}{\partial\omega}e^{i\sigma t}, \quad v = -\dfrac{\partial S_n}{\partial\theta}e^{i\sigma t}, \quad w = 0, \\ \sigma^2 = \dfrac{\mu}{\varrho a^2}(n-1)(n+2). \end{cases}$$

Bei der zweiten Klasse ist eine mit S_n proportionale radiale Verschiebung begleitet von einer Tangentialverschiebung senkrecht zu den Konturlinien von S_n:

$$(146)\qquad u = \frac{\partial S_n}{\partial\theta}e^{i\sigma t}, \quad v = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial S_n}{\partial\omega}e^{i\sigma t}, \quad w = \beta S_n.$$

Die Periodengleichung ist quadratisch in σ^2; die Schwingungen, die den beiden Wurzeln entsprechen, sind ihrem Charakter nach wesentlich verschieden [167]).

Der Fall eines *offenen Kugelschalensegments* ist von *A. E. H. Love* [169]) behandelt. Die Frequenzengleichung lässt sich nur für die symmetrischen Schwingungen einer Halbkugel ohne Schwierigkeit lösen [174]).

5d. Biegungsschwingungen einer Schale. Bezüglich der Frequenzen von offenen Kugel- und Zylinderschalen sind von *Lord Rayleigh* [175]) [176]) Näherungsrechnungen angestellt worden. Es wird vorausgesetzt, dass die Mittelfläche ungedehnt bleibt und dass für die Defor-

172) Einen speziellen Fall betreffend s. *A. E. H. Love* (Fussn. 169).

173) Die einfache Kugelfunktion $P_2(\cos\theta)$ z. B. liefert eine Art von Drillungsschwingung um die Axe $\theta = 0$.

174) Diese sind in den Normalschwingungen der geschlossenen Kugelschale mit enthalten.

175) London Math. Soc. Proc. 13 (1881), p. 4 = Papers 1, p. 551; Sound, 2. Aufl., § 235 b.

176) London Roy. Soc. Proc. 45 (1888), p. 105 = Papers 3, p. 217.

mation auch in anderer Beziehung ähnliche Verhältnisse gelten, wie sie in der Theorie ebener Platten (Nr. **5** b) postuliert werden: eine materielle Linie, die ursprünglich normal zur Mittelfläche liegt, behält, wie man annimmt, diese Eigenschaft und dehnt bezw. verkürzt sich in der Weise, dass die Normalspannung auf die Mittelfläche gleich null ist. Die auf Grund dieser Hypothese berechnete Frequenz ist notwendig eine obere Grenze für die Frequenz der langsamsten Eigenschwingung der Schale[176]) und wird für sie in vielen Fällen einen ziemlich genauen Näherungswert liefern (Nr. **1** a). Wie bei den ebenen Platten wird sie der Dicke proportional und demgemäss klein sein im Vergleich zu der der langsamsten Dehnungsschwingung.

Im Falle des *Kreiszylinders* ergeben sich die Bedingungen verschwindender Dehnung, wenn man $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varpi = 0$ in (140) einsetzt; man erhält[176])

$$(147)\quad \begin{gathered} u = -s^{-1} B_s a \sin s\theta, \quad v = (A_s a + B_s x)\cos s\theta, \\ w = s(A_s a + B_s x)\sin s\theta. \end{gathered}$$

Für die *Kugelschale* sind die entsprechenden Typen[175])

$$(148)\quad \begin{cases} u = (-A \operatorname{tg}^s \tfrac{1}{2}\theta + B \operatorname{cotg}^s \tfrac{1}{2}\theta)\sin s\omega, \\ v = (A \operatorname{tg}^s \tfrac{1}{2}\theta + B \operatorname{cotg}^s \tfrac{1}{2}\theta)\cos s\omega, \\ w = \{A(s + \cos\theta)\operatorname{tg}^s \tfrac{1}{2}\theta + B(s - \cos\theta)\operatorname{cotg}^s \tfrac{1}{2}\theta\}\sin s\omega. \end{cases}$$

Sollen die Verschiebungen endlich sein, so darf die Schale nicht beide Pole $\theta = 0$, $\theta = \pi$ zugleich umfassen; in der Tat kann eine geschlossene Kugel oder überhaupt eine geschlossene konvexe Fläche nicht ohne Dehnung deformiert werden[177])[178]).

Unter den vorhin genannten Voraussetzungen wird die potentielle Energie pro Flächeneinheit der Mittelfläche gleich[168])

$$(149)\quad \frac{4}{3}\,\frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\,h^3(E_1{}^2 + 2\eta E_1 E_2 + E_2{}^2) + \frac{1}{3}\,\mu h^3 \Pi^2,$$

wo E_1, E_2 die Änderungen der Hauptkrümmungen und Π eine Grösse, die von der Verschiebung der Krümmungslinien als solcher abhängt[179]).

---

177) *J. H. Jellet,* Dublin Trans. 22¹ (1855), p. 343. Vgl. hierzu auch *H. Liebmann*, Gött. Nachr. 1899, p. 44 u. Math. Ann. 54 (1901), p. 505, sowie die sich anschliessende neuere Litteratur bei *A. Voss,* Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander (III D 6 a, Nr. **19**, Fussn. 191 u. 192).

178) Die dehnungslose Deformation einiger anderer Umdrehungsflächen ist von *Lord Rayleigh* (Fussn. 175) untersucht worden.

179) Für den Fall von Kugel- und Zylinderschalen sind E_1, E_2, Π, ausgedrückt in den Konstanten von (147) u. (148), von *Lord Rayleigh* (Fussn. 175, 176) berechnet worden. Allgemeine Formeln sind aufgestellt von *A. E. H. Love* und von *H. Lamb,* Fussn. 168.

Bei einem *Zylinder von gleichförmiger Dicke* kann man die Grössen A_s und B_s in (147) als Normalkoordinaten auffassen. Wenn A_s allein sich mit t ändert, so ergiebt sich

$$(150) \qquad \sigma^2 = \frac{4}{3} \frac{(\lambda+\mu)\mu}{(\lambda+2\mu)\varrho} \frac{h^2}{a^4} \frac{s^2(s^2-1)^2}{s^2+1},$$

wie bei den Biegungsschwingungen eines Ringes (Nr. **3**d), nur dass die elastische Konstante, die als Koeffizient auftritt, eine andere ist. Wenn B_s allein sich mit t ändert, so hängt die Frequenz von der Länge ($2l$) ab; der obige Wert von σ^2 ist dann im Verhältnis

$$\left[1 + \frac{3(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \frac{a^2}{s^2 l^2}\right] : \left[1 + \frac{3}{s^2(s^2+1)} \frac{a^2}{l^2}\right]$$

zu vergrössern.

Für ein *offenes Kugelsegment* kann der Nullwert von θ im Pol angenommen werden; die Grössen B_s in (148) müssen dann verschwinden, und die Grössen A_s sind Normalkoordinaten. Sowohl für gleichförmige wie für veränderlichte Dichte sind verschiedene Fälle von *Lord Rayleigh*[175]) durchgerechnet worden. Insbesondere ergiebt sich für eine Halbkugelschale von gleichmässiger Dicke

$$(151) \qquad \sigma^2 = \frac{2}{3} \frac{\mu}{\varrho} \frac{h^2}{a^4} \frac{s(s^2-1)(2s^2-1)}{f(s)},$$

wo $f(s)$ eine gewisse Funktion von s; z. B. $f(2) = 1{,}52961$.

Es ist zu bemerken, dass die Entwickelungen der vorstehenden Theorie als Grenzfälle aufzufassen sind, denen man in Wirklichkeit sich mehr und mehr nähert, je kleiner der Wert von h. Es ist aber durchaus nicht immer leicht zu beurteilen, innerhalb welcher Grenzen h liegen muss, damit die Resultate praktische Näherungswerte vorstellen. In den beiden extremen Fällen einer offenen Kugelschale, wo die Öffnung sehr klein oder nahezu gleich π ist, muss, wie sich zeigt, die Dicke nicht nur klein sein gegen den Krümmungsradius, sondern auch gegen den Durchmesser der kreisförmigen Berandung[180]).

Man hat versucht, eine Theorie krummer Schalen zu entwickeln, bei der die Möglichkeit, dass Dehnung und Krümmungsänderung gleichzeitig auftreten, in Betracht gezogen ist[180]) [181]) [182]). Nach diesen Theorien ist die Hypothese einer reinen, von Dehnung nicht begleiteten Biegung unverträglich mit den Randbedingungen. Bei den Biegungsschwingungen eines Kreiszylinders von endlicher Länge z. B.,

180) *H. Lamb,* London Math. Soc. Proc. 21 (1890), p. 119.

181) *A. E. H. Love,* London Phil. Trans. A 179 (1888), p. 421. Die Theorie ist modifiziert in Elasticity, 2. Aufl., chapt. 24.

182) *A. B. Basset,* London Phil. Trans. A 181 (1890), p. 433.

auf die sich die Gleichung (150) bezieht, würde es erforderlich sein, längs des Randes Kräftepaare angreifen zu lassen, um die longitudinale Krümmung zu verhindern, die die Biegung hervorzubringen sucht. Wenn die Ränder frei sind, wird die Krümmung wahrscheinlich von Dehnungen in Schach gehalten, die auf die unmittelbare Umgebung des Randes beschränkt sind [180]) [182]).

6. Allgemeine Theorie der Schallwellen (in einer Flüssigkeit)[182a]).

6a. Ebene Wellen und Kugelwellen. Man nimmt im allgemeinen die Verschiebungen unendlich klein und den Druck p in der Flüssigkeit, in der sich der Schall fortpflanzt, als Funktion der Dichte ϱ allein. Man setzt $\varrho = \varrho_0 (1 + s)$, wo ϱ_0 die dem Gleichgewicht entsprechende Dichte, so dass s die *Verdichtung* (Kondensation) im Punkte (x, y, z) bezeichnet. Gewöhnlich wird ϱ_0 konstant vorausgesetzt.

α) Dann ergeben die Gleichungen der Hydrodynamik für den Fall der *eindimensionalen Bewegung* (IV 15, Nr. 8, *A. E. H. Love*)

$$(152) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_0 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

wo u die Geschwindigkeit in der x-Richtung; hieraus

$$(153) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{\varkappa}{\varrho_0},$$

wo $\varkappa = (\varrho\, dp/d\varrho)_0$ die Volumelastizität. Die allgemeine Lösung von (153) lautet wie beim Problem der Saitenschwingungen (vgl. Nr. 2b)

$$(154) \qquad u = f(ct - x) + F(ct + x);$$

sie stellt zwei Wellenzüge dar, die in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit c sich bewegen. Bei einem einzelnen Wellensystem hat man $u = \pm cs$.[183])

Speziell im Falle eines Gases ist die Beziehung zwischen p und ϱ bei Vernachlässigung von Temperaturänderungen gegeben durch das *Boyle*sche Gesetz $p/\varrho = p_0/\varrho_0$, woraus $c = \sqrt{p_0/\varrho_0}$; dies ist die *Newtonsche Schallgeschwindigkeit.* Legt man andererseits das „adiabatische" Gesetz zu Grunde: $p/\varrho^\gamma = p_0/\varrho_0^\gamma$, wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen, so hat man $c = \sqrt{\gamma p_0/\varrho_0}$, die *Laplacesche Schallgeschwindig-*

182a) In dieser Nr. 6 ist der Anschluss an die Hydrodynamik bevorzugt. Dieselben Ansätze würden sich aber auch aus den Grundgleichungen der Elastizität ergeben, wenn man in ihnen statt der Verschiebungen die Verschiebungsgeschwindigkeiten einführt (vgl. IV 24, Nr. 16, *O. Tedone*).

183) Die Theorie der ebenen Wellen verdankt man *Euler*, Petrop. N. Comm. 1 (1747/48), p. 67 und *Lagrange*, Miscell. Taurin. 1 (1759); 2 (1760/61).

keit[184]). Letztere Hypothese ist für die gewöhnlichen Schallschwingungen die zutreffendere[185]).

β) In den verwickelteren Fällen der Schallbewegung empfiehlt sich die Einführung eines Geschwindigkeitspotentials φ (IV 15, Nr. 7 *A. E. H. Love*). Für unendlich kleine Bewegungen lautet dann die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\int \frac{dp}{\varrho} = c^2 s. \tag{155}$$

Bei *Kugelwellen* nun drückt sich die Kontinuitätsgleichung durch

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right), \tag{156}$$

aus, wo r der Radiusvektor. Durch Elimination von s ergiebt sich[186])

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \tag{157}$$

$$r\varphi = f(ct - r) + F(ct + r). \tag{158}$$

Diese Gleichung stellt zwei Wellensysteme dar, deren Amplitude sich jedoch beim Fortschreiten der Welle ändert. In grosser Entfernung pflanzen sich die Geschwindigkeiten und Verdichtungen mit einer Amplitude fort, die mit r umgekehrt proportional ist. Für ein einzelnes Wellensystem gilt

$$cs = \mp \frac{1}{r} \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r}, \quad \int sr\,dr = 0, \tag{159}$$

wenn die Integration nach r über den ganzen Bereich ausgedehnt ist, für den $s \neq 0$. Daraus geht hervor, dass s nicht gleichmässig dasselbe Vorzeichen haben kann[187]).

Die allgemeine Lösung von (157), ausgedrückt durch willkürliche Anfangsbedingungen, wurde von *S. D. Poisson* aufgestellt[188]).

184) Die Geschichte dieses Gegenstandes betreffend s. *P. Duhem*, Hydrodynamique 1, p. 174. Genau genommen ist eine ähnliche Unterscheidung zwischen den „isothermen" und den „adiabatischen" Elastizitätsverhältnissen der tropfbaren Flüssigkeiten und auch der festen Körper zu treffen; die tatsächlichen Unterschiede scheinen aber sehr gering zu sein. Vgl. IV 23, Nr. 5b (*C. H. Müller-A. Timpe*).

185) Auf den Einfluss der Wärmeleitung und -strahlung wird in Nr. 7e Bezug genommen.

186) *Euler*, Berlin Hist. de l'Acad. 1759.

187) *G. G. Stokes*, Phil. Mag. (3) 34 (1849), p. 52 = Papers 2, p. 82; *Lord Rayleigh*, Sound, §§ 274, 279. Trotz der analytischen Ähnlichkeit der beiden Gleichungen (153) und (157) ergiebt die physikalische Interpretation wichtige Differenzpunkte, die sich aus dem verschiedenen Grade von Beweglichkeit des Mediums erklären. Der Fall zylindrischer Wellen zeigt Besonderheiten eines Übergangsfalls; vgl. *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 35 (1902), p. 141.

188) *S. D. Poisson*, Paris Mém. de l'Acad. 3 (1819). Wenn z. B. in einem

6b. Die allgemeine Grundgleichung des Schalls[189a]). α) Eliminiert man s aus der Bewegungsgleichung (155) und der allgemeinen Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\Delta \varphi, \tag{160}$$

so erhält man die *Fundamentalgleichung*[189])

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi. \tag{161}$$

Bezeichnet $\bar{\varphi}$ den Mittelwert von φ über eine Kugel, die um einen bestimmten Punkt P als Mittelpunkt mit dem Radius r beschrieben wird, so ergiebt sich die Gleichung[190])

$$\frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\bar{\varphi})}{\partial r^2}, \tag{162}$$

deren Integral die Form (158) hat. Daraus folgt, dass in freier Luft Störungen mit der bestimmten Geschwindigkeit c ausgebreitet werden.

Die allgemeine Lösung von (161) für ein unbegrenztes Medium, ausgedrückt in willkürlichen Anfangswerten von φ und $\partial\varphi/\partial t$, lässt sich schreiben

$$4\pi \varphi_P = t \iint F(ct)\, d\omega + \frac{d}{dt}\left[t \iint f(ct)\, d\omega \right], \tag{163}$$

wo die Integrale über eine Kugel vom Radius ct um P als Mittelpunkt ausgedehnt sind und $d\omega$ den körperlichen Winkel bezeichnet, unter dem ein Element der Kugeloberfläche von P aus erscheint. Die Funktionen $f(ct)$ und $F(ct)$ bedeuten die Anfangswerte von φ

---

anfänglich in Ruhe befindlichen unbegrenzten Medium eine gleichförmige Verdichtung gegeben ist, die sich über einen Kugelraum vom Radius a erstreckt, so wird die Störung nach einer Zeit $2a/c$ aus einer divergierenden Welle bestehen, die zur Zeit t von den beiden Flächen $r = ct \mp a$ begrenzt ist, und zwischen diesen Flächen wird das Gesetz der Dichte lauten: $s/s_0 = (r - ct)/2r$. *H. Lamb*, Hydrodynamics, p. 469.

188a) Vgl. zu dieser Nr. auch die Ausführungen von *O. Tedone* in IV 24, Nr. **16** a.

189) *S. D. Poisson,* Journ. éc. polyt. 14 (1808). Derselben Gleichung genügt auch s, wie *Euler* schon Berlin Hist. 15 (1759) [66], p. 217 u. Miscell. Taurin. 2 (1760/61), p. 1 (Œuvres de *Lagrange* 14, p. 178) gefunden hat.

190) *S. D. Poisson,* Journ. éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 319; Auszug im Bull. Soc. philomat. 1 (1807), p. 19, leitet sie aus der Formel ab, die (161) in räumlichen Polarkoordinaten ausdrückt. Einen anderen Beweis giebt *H. Lamb*, Motion of fluids, Cambridge 1874, § 170; Hydrodynamics, 3. Aufl., § 283. *J. Duhamel,* J. de math. 14 (1849), p. 49, weist nach, dass in einer zylindrischen Röhre

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2},$$

wo $\bar{\varphi}$ der Mittelwert von φ über den (beliebig geformten) Querschnitt.

und $\partial\varphi/\partial t$ auf diesem Flächenelement[191]). Hieraus folgt sofort, dass eine Störung, die ursprünglich auf einen endlichen Bereich beschränkt war, sich normal zur Begrenzung mit der Geschwindigkeit c ausbreitet[192]).

Die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie eines beliebigen Bereichs lauten

$$(164) \qquad \begin{cases} T = \frac{1}{2}\varrho_0 \iiint \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz, \\ V = \frac{1}{2} c^2 \varrho_0 \iiint s^2\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Mittelst dieser Formeln lässt sich zeigen, dass bei beliebig gegebener Anfangsverteilung von (wirbelfreier) Geschwindigkeit und Verdichtung die Bewegung vollständig bestimmt ist[193]). — Man vergleiche hier die auf alle elastischen Systeme bezügliche Darstellung bei *O. Tedone* (IV 24).

Speziell bei einem einzelnen fortschreitenden System von ebenen Wellen oder Kugelwellen ist die Energie in jedem Augenblick zur Hälfte potentiell und zur Hälfte kinetisch[194]).

β) Bisher wurde angenommen, dass die Funktion φ und ihre Ableitungen überall in dem betrachteten Bereich endlich sind. Es empfiehlt sich indess, wie in der Theorie des gewöhnlichen Potentials und in der Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten (IV 16 Nr. **1** c, *A. E. H. Love*) den Begriff der Punktsingularitäten einzuführen, die hier zur Darstellung von *Schallquellen* dienen[195]). Ein „einfacher“ Quellpunkt ist ein Punkt, in dem φ wie $\frac{1}{r}$ unendlich wird; eine Doppelquelle leitet sich hieraus ebenso ab, wie in den erwähnten Theorien. Durch stetige Quellenverteilungen lässt sich der verallgemeinerten Gleichung

$$(165) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi + \Phi$$

191) Analytisch bewiesen von *S. D. Poisson*, Paris Mém. 3 (1819), p. 121; aus dem allgemeinen Integral von (162) gefolgert von *J. Liouville*, J. de math. 1 (1856), p. 1. Andere Beweise geben *B. Riemann*, Part. Diff.gl. 1869, § 106 bis 108; *G. Kirchhoff*, Mechanik, Vorl. 23.

192) *G. G. Stokes*, Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1850), p. 1 = Papers 2, p. 243. Hier ist zum ersten Mal die abgekürzte Form (163) des *Poisson*schen Resultats angegeben.

193) *G. Kirchhoff*, Mechanik, Vorl. 23.

194) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (4) 1 (1876), p. 270 = Papers 1, p. 254; *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. (1) 35 (1894), p. 160; Hydrodynamics 3. Aufl., § 281.

195) *H. Helmholtz*, J. f. Math. 57 (1859), p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 303.

genügen, wo Φ eine gegebene Funktion von x, y, z, t. Diese Gleichung tritt auf, wenn auf eine Flüssigkeit veränderliche, konservative äussere Kräfte wirken, falls nämlich $\Phi = \partial V/\partial t$, wo V das gewöhnliche Potential. Eine andere Deutung von Φ bezieht sich auf den Fall plötzlicher Schöpfung oder Vernichtung von Materie in dem betreffenden Punkte: der Betrag der in der Zeiteinheit in ein Element $dx\,dy\,dz$ eingeführten Materie würde gleich $-\frac{1}{c^2}\Phi\,dx\,dy\,dz$ zu setzen sein[196]).

Die Anwendung der Methode des *Green*schen Satzes auf Funktionen, die der Gleichung (161) innerhalb eines endlichen Bereichs genügen, führt auf die Formel[197])

$$(166)\quad \iint\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\iiint(\psi\dot{\varphi} - \varphi\dot{\psi})\,dx\,dy\,dz.$$

Mit ihrer Hülfe lässt sich zeigen, dass der Wert von φ in einem beliebigen Punkte eines quellenfreien Bereichs sich durch die zu bestimmten vorhergehenden Zeiten stattfindenden Werte von φ und $\partial\varphi/\partial n$ in den verschiedenen Punkten der Oberfläche des Bereichs ausdrücken lässt. Es ist, wie *G. Kirchhoff*[198]) zeigt,

$$(169)\qquad 4\pi\varphi_P = \iint \Omega\,dS,\quad \Omega = \frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r},$$

wo $\varphi(t)$ der Wert von φ auf dem Flächenelement dS zur Zeit t und $f(t)$ der entsprechende Wert von $\partial\varphi/\partial n$, während r den Abstand des Punktes P von dS bezeichnet. Die Bewegung innerhalb des Bereichs ist hier so dargestellt, als entspränge sie aus einer Reihe von Einzel- und Doppelquellen, die über die Oberfläche verteilt sind. Zudem lässt sich zeigen, dass die Wirkung dieser Verteilung in jedem äusseren Punkt null ist. Man hat der Formel (169) eine besondere physikalische Bedeutung zugeschrieben, insofern sie die eigentliche Formulierung des *Huygens*schen Prinzips für den Fall der Akustik enthalten soll. Es ist jedoch hervorzuheben, dass die besondere Verteilung der Quellen über die Begrenzung des betrachteten Bereiches, wie

196) *Lord Rayleigh,* Sound 2, § 276.

197) *G. Kirchhoff,* Mechanik, Vorl. 23. Die Anwendung des *Green*schen Satzes auf den speziellen Fall einfacher Schwingungen war schon von *H. Helmholtz* (Fussn. 195) gemacht worden.

198) *G. Kirchhoff,* Berlin Ber. 1882, p. 641; Ann. Phys. (2) 18 (1883), p. 663 = Ges. Abh., Nachtrag, p. 23. Andere Beweise sind gegeben von *G. A. Maggi,* Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 21; *E. Beltrami,* Lomb. Rend. (2) 22 (1889), p. 428; *A. E. H. Love,* London Math. Soc. Proc. (2) 1 (1903), p. 37.

sie sie annimmt, nur eine aus unendlich vielen möglichen Verteilungen ist, die sämtlich für die inneren Punkte das gleiche Resultat ergeben würden [198a]).

Die Formel, die für Gleichung (165) der Formel (169) entspricht, lautet

$$(170)\qquad 4\pi\varphi_P = \iint \Omega\, dS + \frac{1}{c^2}\iiint \frac{\Phi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\, dx\, dy\, dz,$$

wo das Raumintegral auf den betrachteten Bereich sich erstreckt [199]).

6c. Allgemeine Sätze über einfache Schwingungen. α) Handelt es sich um eine einfache harmonische Bewegung, so geht die Gleichung (161) durch Einführung des Zeitfaktors $e^{i\sigma t}$ über in

$$(171)\qquad (\Delta + k^2)\varphi = 0, \qquad k = \sigma/c.$$

Die Konstante k ist mit der Wellenlänge λ der ebenen Wellen (Nr. 6c) von der gleichen Frequenz durch die Beziehung $k = 2\pi/\lambda$ verknüpft. Die allgemeinere Gleichung (165) nimmt folgende Form an

$$(172)\qquad (\Delta + k^2)\varphi = -\frac{1}{c^2}\Phi.$$

Die Theorie dieser Gleichung ist in vieler Beziehung der der *Poisson*schen Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$, mit der man sich in der Potentialtheorie (II A 7b, *H. Burkhardt-W. F. Meyer*) beschäftigt, analog [200]). Den anziehenden oder abstossenden Massenpunkten entsprechen die „Schallquellen". Das Geschwindigkeitspotential einer einfachen Quelle ist $\varphi = Ae^{-ikr}/r$, wo r den Abstand von der Quelle bezeichnet [201]). Die allgemeine Lösung von (172) ist dann

$$(173)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi c^2}\iiint \Phi \frac{e^{-ikr}}{r}\, dx\, dy\, dz + \Psi,$$

wo Ψ die allgemeine Lösung von (171). Sind andererseits einfache Quellen mit endlicher Flächendichte h über eine Fläche verteilt, so besteht eine Unstetigkeit in der normalen Ableitung von φ, nämlich [200])

$$(174)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = -4\pi h,$$

wo die Suffixe die beiden Seiten der Fläche kennzeichnen.

198a) *J. Larmor*, London Math. Soc. Proc. (2) 1 (1903), p. 1. Die Abhandlung giebt einen einfachen anschaulichen Beweis der *Kirchhoff*schen Formel.

199) *O. Tedone*, Rom Acc. Linc. Rend. (5) 5^1 (1896), p. 357.

200) *H. Helmholtz*, J. f. Math. 57 (1850), p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 303.

201) *H. Helmholtz*, loc. cit., bedient sich der Funktionen $(\cos kr)/r$, $(\sin kr)/r$, die *Lord Rayleigh* in die Exponentialfunktion zusammenfasst.

Sind φ und ψ Lösungen von (171), die mit ihren ersten und zweiten Ableitungen innerhalb eines endlichen Bereichs endlich sind, so ergiebt sich nach der *Green*schen Methode [202])

$$(175) \qquad \iint \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS = 0,$$

wo die Integration sich über die Oberfläche des Bereichs erstreckt. Der Satz gilt auch für einen unendlich ausgedehnten Bereich, der innen von einer oder mehreren geschlossenen Flächen begrenzt wird, vorausgesetzt, dass φ und ψ in grosser Entfernung R mit e^{-ikR}/R vergleichbar werden. Setzt man in (175) $\psi = e^{-ikr}/r$, wo r den Abstand von einem festen inneren Punkte P bedeutet, und fügt zu der gegebenen Begrenzung eine kleine, den Punkt P umschliessende Kugel hinzu, so erhält man [200])

$$(176) \qquad 4\pi\varphi_P = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} dS - \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) dS.$$

Wenn P ein äusserer Punkt ist, so verschwindet die rechte Seite.

Der Satz (176) stellt einen speziellen Fall der in voriger Nr. genannten *Kirchhoff*schen Formel dar; letztere lässt sich aber ihrerseits auch aus ihm ableiten, da nach dem *Fourier*schen Theorem eine willkürliche Funktion von t sich unter gewissen Bedingungen als Integral einfacher harmonischer Funktionen ausdrücken lässt [203]).

In einem Bereich, dessen Abmessungen klein sind gegen die Wellenlänge $2\pi/k$, kann man $e^{-ikr} = 1$ setzen; dann nimmt der Satz (176) die Form an [200])

$$(177) \qquad 4\pi\varphi_P = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{r} dS - \iint \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

wie in der Theorie des gewöhnlichen Potentials (II A 7b, Nr. **12**). Man kann deshalb innerhalb eines solchen Bereichs $\Delta\varphi = 0$ annehmen; dies ist für viele Näherungsrechnungen besonders nützlich [200]).

Die Theorie der *Green*schen Funktion (II A 7b, Nr. **18**) lässt sich ebenfalls auf den vorliegenden Fall übertragen [204]) [205]). Ist G eine Funktion, die 1) der Gleichung (171) in dem betrachteten Bereich genügt, 2) im Punkte P wie e^{-ikr}/r unendlich wird und 3) in allen Punkten der Oberfläche verschwindet, so liefert (175) für $\psi = G$

---

202) *H. Helmholtz*, loc. cit. — Vgl. Gl. (166).
203) *H. Lamb*, Hydrodynamics, 3. Aufl., § 286.
204) *F. Klein* bei *F. Pockels*, $\Delta u + k^2 u = 0$, p. 280.
205) *H. Poincaré*, Palermo Rend. 8 (1894), p. 57.

$$4\pi\varphi_P = -\iint \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS. \tag{177}$$

Hat man statt 3) die Oberflächenbedingung $\partial G/\partial n = 0$, so erhält man

$$4\pi\varphi_P = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} G\, dS. \tag{178}$$

Der Wert von φ erscheint hier ausgedrückt durch die Oberflächenwerte von φ bezw. $\partial\varphi/\partial n$; es ist aber bemerkenswert, dass für einen gegebenen Bereich für eine Reihe bestimmter Werte von k diese Darstellungen unmöglich werden. Z. B. wird die Darstellung (178) mittels $\partial\varphi/\partial n$ unbestimmt, wenn k einen der Werte besitzt, die den Normalschwingungen der Luft in dem durch feste, starre Wände begrenzt gedachten Bereich entsprechen [206]). Der Wert von G in (178) ist dann unendlich gross. Es liegt hier ein wichtiger Unterschied gegenüber der Theorie des gewöhnlichen Potentials vor.

Dem *Gauss*schen Mittelwertsatz (II A 7b, Nr. **13**) entspricht der Satz, dass der Mittelwert von φ über die Oberfläche einer Kugel vom Radius r, in deren Innern keine Quellen liegen, gleich

$$\frac{\sin kr}{kr}\varphi_0$$

ist, wo φ_0 der Wert im Mittelpunkt [207]). Im einem ins Unendliche ausgedehnten Bereich ist der Mittelwert von φ über die Oberfläche einer alle Quellen in sich bergenden Kugel von der Form Ce^{-ikr}/r.

Eine andere wichtige Folgerung aus (175) ist der Reziprozitätssatz von *H. Helmholtz*, der sich so aussprechen lässt: In irgend einem allseitig oder teilweise von festen starren Wänden begrenzten Bereich ist das Geschwindigkeitspotential im Punkte P, das von einer Quelle in Q herrührt, nach Amplitude und Phase gleich dem Geschwindigkeitspotential in Q, das von einer gleichen Quelle in P herrührt [208]).

β) Der zahlreichen Anwendungen wegen notieren wir hier noch verschiedene *typische Lösungen* von (171).

Ist die *Bewegung eindimensional*, so hat man

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + k^2\varphi = 0, \\ \varphi = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}. \end{cases} \tag{179}$$

Jeder Term stellt ein System fortschreitender Wellen dar [209]).

---

206) *H. Helmholtz*, J. f. Math. 57 (1860), p. 24 = Ges. Abh. 1, p. 329.

207) *H. Weber*, J. f. Math. 69 (1868), p. 222.

208) *H. Helmholtz*, loc. cit. Einen etwas abweichenden Beweis giebt *Lord Rayleigh*, Sound, § 294. Zudem ist der Satz von *Rayleigh* erheblich erweitert worden (Nr. **1** a).

Für *zweidimensionale Bewegungen* gilt die Gleichung

$$(180)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + k^2\varphi = 0,$$

deren typische Lösung in Cartesischen Koordinaten

$$(181)\qquad \varphi = \sum C e^{ipx + iqy}, \quad p^2 + q^2 = k^2$$

ist. Transformiert man auf Polarkoordinaten, so nimmt die Gleichung die Form von (108) an, und die typische Lösung lautet

$$(182)\qquad \varphi = \{\alpha J_n(kr) + \beta K_n(kr)\} \cos(n\theta + \varepsilon),$$

wo $J_n(kr)$ die gewöhnliche Besselsche Funktion und $K_n(kr)$ irgend eine andere unabhängige Lösung von (108) [210]. Für Punkte, die vom Koordinatenanfang weit entfernt sind, drückt sich φ bequemer in der Form aus [211]

$$(183)\qquad \varphi = \{A D_n(kr) + B D_n(-kr)\} r^n \cos(n\theta + \varepsilon),$$

wo

$$(184)\qquad \begin{cases} D_n(\zeta) = \left(-\dfrac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n D_0(\zeta), \\ D_0(\zeta) = -\left(\dfrac{\pi}{2i\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\zeta}\left\{1 - \dfrac{1^2}{1\cdot 8i\zeta} + \dfrac{1^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot (8i\zeta)^2} - \cdots\right\}. \end{cases}$$

Für manche Zwecke ist es wesentlich, die Beziehungen zwischen den Konstanten in (182) und (183) zu kennen. Im Falle eines divergenten Wellensystems hat man $B = 0$, und es zeigt sich, dass folgende Ent-

---

209) Der Term Ae^{-ikx} (für $x > 0$) entspricht einer gleichförmigen Verteilung einfacher Quellen über die Ebene $x = 0$, *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 19 (1888), p. 504 = Papers 3, p. 44; Sound, 2. Aufl., § 342.

210) So kann man setzen

$$K_n(\zeta) = \zeta^n \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n K_0(\zeta),$$

$$J_n(\zeta) = \zeta^n \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n J_0(\zeta),$$

wo

$$J_0(\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\zeta\sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(\zeta\cosh u)\, du,$$

$$K_0(\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(\zeta\cosh u)\, du = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\zeta\cos\theta)\, d\theta + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\zeta\sinh u}\, du.$$

211) Im wesentlichen bei *G. G. Stokes*, London Trans. 1868, p. 449 = Papers 4, p. 299; *Lord Rayleigh,* Sound, § 341.

wickelung nach Potenzen von ζ gilt[212]):

$$(185)\quad \begin{cases} D_0(\zeta) = \left(\gamma + \log \frac{1}{2} i\zeta\right) J_0(\zeta) + \frac{s_1}{2^2}\zeta^2 - \frac{s_2}{2^2 \cdot 4^2}\zeta^4 + \frac{s_3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\zeta^6 - \cdots, \\ s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Was *dreidimensionale Bewegungen* anbetrifft, so ergiebt sich für (171) zunächst die Lösung

$$(186)\qquad \varphi = \sum C e^{ipx + iqy + irz}, \quad p^2 + q^2 + r^2 = k^2.$$

Die Lösung von (171) in räumlichen Polarkoordinaten ist von verschiedenen Schriftstellern diskutiert worden[213]). Die bündigste Form ist

$$(187)\qquad \varphi = \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{A_n e^{-i\zeta} + B_n e^{i\zeta}}{\zeta} \cdot r^n S_n, \quad \zeta = kr,$$

wo S_n eine Kugelflächenfunktion von der Ordnung n. Die beiden Terme stellen Wellen dar, die bezüglich nach aussen und nach innen fortschreiten. Fordert man Endlichkeit im Koordinatenanfang, so hat man $A_n = -B_n$ und daher

$$(188)\quad \begin{cases} \varphi = C\psi_n(kr)\, r^n S_n, \\ \psi_n(\zeta) = \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{\sin\zeta}{\zeta} \\ \qquad = \frac{1}{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}\left(1 - \frac{\zeta^2}{2(2n+3)} + \frac{\zeta^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} - \cdots\right). \end{cases}$$

6d. Wellen von endlicher Amplitude. Der Fall ebener Wellen von endlicher Amplitude wurde von *S. D. Poisson*[214]) behandelt, welcher zeigte, dass unter Voraussetzung des *Boyle*schen Gesetzes das

212) Die Bezeichnungsweise ist übernommen von *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (4) 43 (1897), p. 259 = Papers 4, p. 283. Die Funktion $D_0(kr)$ ist das Potential einer gleichförmigen Reihe einfacher Quellen längs der z-Achse, $D_1(kr) r \cos\theta$ das einer Reihe von Doppelquellen; *Lord Rayleigh,* Sound, § 342.

213) *Laplace,* Conn. des temps pour 1823 (1820); *S. D. Poisson,* Théorie mathématique de la chaleur, Paris 1835, chap. 6; *G. G. Stokes,* London Trans. 1868, p. 447 = Papers 4, p. 299; *Lord Rayleigh,* London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 93 = Papers 1, p. 138; *H. Lamb,* Hydrodynamics, 3. Aufl., § 287. Die *Stokes*sche Form der Lösung ist

$$\varphi = f_n(ikr) e^{-ikr} S_n + f_n(-ikr) e^{ikr} S_n',$$

wo

$$f_n(i\zeta) = 1 + \frac{n(n+1)}{i\zeta} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4\,(i\zeta)^2} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}{2 \cdot 4 \ldots 2n (i\zeta)^n}.$$

214) J. éc. polyt. 7 (1808), p. 319. Eine Näherungstheorie, die die Glieder *zweiter* Ordnung umfasst, ist von *Lagrange,* Taurin. Misc. 2^2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 151, entwickelt worden.

Geschwindigkeitspotential der Gleichung genügt [215])

$$(189)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}.$$

Poisson erhält zwei spezielle Integrale dieser Gleichung und schliesst, dass eine beliebige Störung, die anfangs auf einen endlichen Bereich von x beschränkt ist, sich in zwei Wellen auflöst, die in entgegengesetzten Richtungen fortschreiten. Für die positive Welle findet er

$$(190)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=f\left(x-ct-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}t\right),\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+c\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=0,\end{cases}$$

wo die Funktion f willkürlich ist. Dies Resultat ist folgendermassen zu deuten: Jeder einzelne Wert der Geschwindigkeit $\partial\varphi/\partial x$ pflanzt sich mit der Geschwindigkeit $c+\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ fort; die Form der Welle ändert sich beständig, indem die dichteren Teile schneller fortschreiten als die dünneren, bis schliesslich der Wert von $\partial\varrho/\partial x$ an irgend einer Stelle unendlich wird [216]). Über das, was hiernach eintritt, geben die Formeln keinen Aufschluss.

Eine andere Untersuchung, die nicht an die Voraussetzung isothermer Vorgänge gebunden ist, wurde von *B. Riemann* [217]) gegeben. Indem er setzt

$$f(\varrho)=\int\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d\varrho}{\varrho},\quad 2r=f(\varrho)+u,\quad 2s=f(\varrho)-u,$$

findet er

$$(191)\qquad \begin{cases}dr=\dfrac{\partial r}{\partial x}\left\{dx-\left(u+\sqrt{\dfrac{dp}{d\varrho}}\right)dt\right\},\\[2mm] ds=\dfrac{\partial s}{\partial x}\left\{dx-\left(u-\sqrt{\dfrac{dp}{d\varrho}}\right)dt\right\};\end{cases}$$

diese Gleichungen zeigen, dass r für einen (geometrischen) Punkt, der mit der Geschwindigkeit $\sqrt{dp/d\varrho}+u$ fortschreitet, konstant ist, während s für einen Punkt, der mit der Geschwindigkeit $\sqrt{dp/d\varrho}-u$ rückwärts sich bewegt, konstant ist. Eine begrenzte Anfangsstörung löst sich demgemäss in zwei Wellen auf, von denen jede eine bestimmte Beziehung zwischen u und ϱ aufweist. Die ständige Änderung, die infolgedessen der Typus jeder Welle erfährt, ähnelt der-

215) Die genaue Gleichung für drei Dimensionen ist aufgestellt von *Lagrange*, Méc. anal. 12me sect.

216) *G. G. Stokes,* Phil. Mag. 33 (1848), p. 349 = Papers 2, p. 51.

217) Gött. Abh. 8 (1860) 43 = Werke, 2. Aufl. Leipzig 1892, p. 156.

jenigen, die die *Poisson*sche Lösung angiebt[218]). Die Abhandlung beschäftigt sich ferner mit der allgemeinen Lösung des Problems; die Grössen r und s werden als unabhängige Veränderliche eingeführt und die Lösung auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung zurückgeführt[219]) [220]).

Fast gleichzeitig wurde das Problem von *S. Earnshaw*[221]) behandelt; dieser geht von der Gleichung aus[222])

$$(192)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big/ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma+1},$$

wo y die Koordinate zur Zeit t des Teilchens, dessen ungestörte Lage x ist. Es werden partikuläre Lösungen vom Typus

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

untersucht[222a]). Im Falle des Boyleschen Gesetzes ($\gamma = 1$) hat man z. B.

$$(193)\qquad \begin{cases} y = \alpha x + (C \pm c \log \alpha) t + \varphi(\alpha), \\ 0 = \alpha x \pm ct + \alpha \varphi'(\alpha), \end{cases}$$

wo die Funktion φ willkürlich ist. Wählt man eines der beiden Vorzeichen, so erhält man eine einzige fortschreitende Welle, in der $\varrho = \varrho_0 e^{\mp u/c}$. Diese Ergebnisse stimmen mit den *Poisson*schen überein. *Earnshaw* bemerkt, dass eine Welle nur dann ohne Änderung des Typus fortschreiten könnte, wenn die Beziehung zwischen p und ϱ von der Form wäre[223])

$$(194)\qquad p + m^2/\varrho = \text{const.}$$

---

218) Eine ähnliche Untersuchung hatte *A. M. Ampère*, J. éc. polyt. 11 (1820), p. 1 für den Fall des Boyleschen Gesetzes unternommen; vgl. *B. Riemann-H. Weber*, Part. Diff.gl. 2, Kap. 23.

219) Vgl. hierüber IV 19, Nr. 6 (*G. Zemplén*). *B. Riemanns* Methode lässt sich auf den Fall ebener horizontaler Wellen in einer der Schwere unterworfenen Atmosphäre ausdehnen. Die Übertragung auf Kugelwellen oder zylindrische Wellen scheint nur dann zu gelingen, wenn eine äussere Kraft von speziellem künstlichen Typus eingeführt wird; *R. Lipschitz*, J. f. Math. 100 (1887), p. 89; *C. V. Burton*, Phil. Mag. (5) 35 (1893), p. 317.

220) Eine mehr physikalische Erklärung der Änderung des Typus giebt *Lord Rayleigh*, Sound, § 251.

221) London Phil. Trans. 150 (1860), p. 133.

222) *J. F. W. Herschel*, Encycl. Metrop. Art. „Sound", p. 757 (für den isothermen Fall $\gamma = 1$).

222a) Dieselbe Untersuchung giebt bereits *Poisson*, Corresp. éc. polyt. 2 (1813), p. 410 selber, der damit einen Teil der *Earnshaw*schen Resultate anticipiert.

223) Dies lässt sich sehr einfach durch Zurückführung des Problems auf

Die Tatsache, dass bei wirklichen Verhältnissen die Werte von $\partial u/\partial x$ und $\partial \varrho/\partial x$ schliesslich unendlich werden müssen, hat verschiedene Autoren [217] [221] [223] zur Untersuchung der Bedingungen geführt, unter denen Unstetigkeitswellen sich fortpflanzen können. Es ergiebt sich z. B., dass, wenn links von einer bestimmten Fläche $\varrho = \varrho_1$, $u = u_1$ und rechts von ihr $\varrho = \varrho_2$, $u = 0$, die Bedingung der Konstanz der Masse und der Impulssatz durch den Ansatz

$$(195)\qquad u_1 = U \pm \left\{\frac{(p_1 - p_2)(\varrho_1 - \varrho_2)}{\varrho_1 \varrho_2}\right\}^{\frac{1}{2}},\qquad U = \left\{\frac{p_1 - p_2}{\varrho_1 - \varrho_2}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

befriedigt werden, wo U die Geschwindigkeit bedeutet, mit der die Unstetigkeitsfläche fortschreitet und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\varrho_1 \gtrless \varrho_2$. [224]

Über die neueren hierher gehörigen Untersuchungen berichtet *G. Zemplén* in IV 19 *(Unstetige Bewegungen in Flüssigkeiten).*

7. Spezielle Probleme betreffend Luftschwingungen.

7a. Reflexion und Brechung des Schalls. Die Reflexion von Schallwellen an einer starren ebenen Wand lässt sich leicht nach der Methode der Bilder behandeln [225]. Das Problem der Reflexion ebener Wellen an der ebenen Grenzfläche zweier Flüssigkeiten wurde von *G. Green* [226] gelöst. Es ergiebt sich, dass die Gesetze der Reflexion und der Brechung dieselbe Form wie in der Optik (V 21, *A. Wangerin*) haben und die Amplitude der reflektierten und der durchgehenden Welle zu der der einfallenden Welle in dem Verhältnis

$$\frac{\varrho_1 \operatorname{tg} \theta_1 - \varrho \operatorname{tg} \theta}{\varrho_1 \operatorname{tg} \theta_1 + \varrho \operatorname{tg} \theta}$$

steht, wo ϱ, ϱ_1 die Dichtigkeiten und θ, θ_1 der Einfalls- und der

---

das einer stationären Bewegung beweisen, *W. J. M. Rankine,* London Phil. Trans. 160 (1870), p. 277 = Papers, p. 530. *Lord Rayleigh,* Sound, § 253; *Rankine* hat ferner einen speziellen Wellentypus untersucht, bei dem diese Beziehung erhalten bleibt, wenn Wärmeleitung berücksichtigt wird.

224) Die Bedingung der Konstanz der Energie wird jedoch nur dann befriedigt, wenn $p_1, \varrho_1, p_2, \varrho_2$ durch die Beziehung (194) mit einander verknüpft sind: *Lord Rayleigh*, Sound, § 253. Dies würde bei einer idealen Substanz der Fall sein, deren Adiabaten gerade Linien wären. *H. Lamb*, Hydrodynamics, 3. Aufl., § 280.

225) *Euler,* Berlin Hist. 1765, p. 355; *S. D. Poisson,* Fussn. 190.

226) Cambridge Phil. Soc. Trans. 6 (1837), p. 303 = Papers, p. 231; *Lord Rayleigh,* Sound, § 270. Eine minder vollständige Untersuchung lieferte *S. D. Poisson,* Paris Mém. 3 (1819), p. 305, und 10 (1831), p. 317.

Brechungswinkel. Bei senkrechtem Einfall ($\theta = \theta_1 = 0$) wird dies

$$\frac{\varrho_1 c_1 - \varrho c}{\varrho_1 c_1 + \varrho c}.$$

Im Falle zweier gasförmigen Medien von gleicher Elastizität reduziert sich der Ausdruck auf

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta_1)}{\operatorname{tg}(\theta + \theta_2)},$$

wonach es für $\theta + \theta_1 = \frac{1}{2}\pi$ keine reflektierte Welle giebt. Dieselbe Beziehung hat man in der Optik im Falle senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichtes.

Die Erscheinung der totalen Reflexion tritt ein, wenn $c_1 > c$ und $\sin\theta > c/c_1$. Steht die x-Axe senkrecht zur Grenzfläche, so ist die Störung im zweiten Medium vom Typus

$$(196)\quad \begin{cases} \varphi = Ce^{-\beta x}\cos(by + \sigma t + \varepsilon), \\ \beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{c^2}{c_1^{\,2}}}, \end{cases}$$

wo λ die Wellenlänge im ersten Medium.

Die Reflexion von Wellen an einer gewellten Oberfläche ($z = c\cos px$, wo pc klein) ist von *Lord Rayleigh*[227]) untersucht worden. Sowohl wenn die Oberfläche starr ist, wie wenn sie die Begrenzung gegen eine andere Flüssigkeit bildet, ergiebt sich, dass die Reflexion merklich dieselbe ist wie bei ebener Begrenzung, falls die Wellenlänge $2\pi/p$ der Riffelungen an der Oberfläche klein ist gegen die der einfallenden Luftwellen; anderenfalls ist die direkt reflektierte Welle von schrägen Wellen begleitet, analog der Erzeugung seitlicher Spektren durch ein Beugungsgitter in der Optik[228]).

Die Ausbreitung des Schalls in einer ungleichförmigen Atmosphäre ist theoretisch von *S. D. Poisson*[190]) und *Lord Rayleigh*[229]) unter der beschränkenden Voraussetzung behandelt worden, dass die Temperatur gleichförmig ist und die Expansionen nach dem isothermen Gesetz erfolgen. Die Schallgeschwindigkeit ist dann überall die gleiche; und für hinreichend rasche Schwingungen sind die allgemeinen Gesetze der Ausbreitung des Schalls dieselben wie im Falle gleichmässiger Dichte, nur dass die Amplitude einer Störung, die von einem Punkt A nach einem Punkt B fortgepflanzt wird, sich im Verhältnis $e^{z/2H}$ ändert,

227) Sound, 2. Aufl., § 272a.

228) Die Reflexion von Schallwellen an einem parabolischen Spiegel diskutiert *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 190.

229) Phil. Mag. (5) 29 (1890), p. 173 = Papers 3, p. 335.

wo z der Höhenunterschied zwischen A und B und H die Höhe einer homogenen Atmosphäre. Die Energie bleibt hierbei ungeändert[229]).

Ist die Temperatur nicht gleichförmig, so ändert sich die Schallgeschwindigkeit mit der Höhe, und die Wellen werden gebrochen[230]). Etwas Ähnliches wird bei Windbewegung durch die Überlagerung der Geschwindigkeit der Luft über die des Schalls bewirkt. Wenn die Windgeschwindigkeit nach oben hin zunimmt, so werden Klänge an der Erdoberfläche besser in Richtung des Windes als gegen dieselbe zu hören sein[231]).

7b. **Beugung.** α) Die Theorie der Beugung von Schallwellen durch Hindernisse oder Öffnungen in Schirmen ist ebenfalls analog der Theorie der entsprechenden optischen Probleme, aber einfacher, erstens weil die zu bestimmende veränderliche Grösse (φ) eine Skalar- und nicht eine Vektorgrösse ist, zweitens weil die Randbedingungen genau bestimmt und wohlbekannt sind. Andererseits bringt der Umstand, dass die Wellenlänge λ gegen die Abmessungen der Hindernisse oder Öffnungen oft gross statt klein ist, bedeutende Unterschiede in dem allgemeinen Charakter der Lösungen mit sich; auch vereinfacht er erheblich die Deutung der analytischen Ausdrücke, wenn solche erhalten werden können, und ermöglicht überdies Näherungsrechnungen, in Fällen, wo die strenge Lösung bisher nicht gelungen ist.

Die Beugung ebener Wellen durch eine feste starre Kugel[232]) lässt sich nach der Formel (187) behandeln. Nimmt man den Koordinatenanfang im Mittelpunkt an, so ist das Geschwindigkeitspotential eines in der negativen x-Richtung einfallenden Systems ebener Wellen[233])

$$(197) \qquad \varphi = e^{ikx} = \sum (2n+1)(ikr)^n \psi_m(kr) P_n(\cos\theta),$$

wo $\cos\theta = x/r$, ψ_n die in (188) definierte Funktion und P_n die ein-

230) Die allgemeine Erklärung hierfür gab *O. Reynolds*, London Roy. Soc. Proc. 22 (1874), p. 295, 531 = Scientific papers 1, Cambridge 1900, p. 89, und London Phil. Trans. 166 (1876), p. 315 = Papers 1, p. 157. Weitere Untersuchungen betreffend siehe *Lord Rayleigh*, Sound, § 288.

231) *G. G. Stokes*, Brit. Assoc. Rep. 1857, p. 22 = Papers 4, p. 110; *O. Reynolds*, loc. cit.; *Lord Rayleigh*, Sound, § 289.

232) *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 253; Sound 2, § 334.

233) *Lord Rayleigh*, loc. cit. und London Phil. Trans. (A) 203 (1904), p. 87; *E. Heine*, Theorie der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Berlin 1878, p. 82; *Lord Rayleigh* betrachtet auch den Fall einer in endlicher Entfernung gelegenen Schallquelle; vgl. *A. Clebsch*, J. f. Math. 61 (1863), p. 195.

fache Kugelfunktion. Die gebeugten Wellen werden vom Typus (187), wobei $B_n = 0$, sein, und die Werte der A_n bestimmen sich durch die Bedingung $\partial\varphi/\partial r = 0$ für $r = a$, wo φ jetzt das vollständige Geschwindigkeitspotential bezeichnet[234]). Wenn ka klein ist, lautet der Ausdruck für die gebeugten Wellen in grosser Entfernung r

$$\varphi = -k^3a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\frac{e^{-ikr}}{kr}, \tag{198}$$

und die in der Zeiteinheit nach aussen tretende Energie beträgt $\frac{7}{9}k^4a^4$ der Energie, die in den ursprünglichen Wellen durch ein Flächenstück πa^2 tritt[235]).

Bei dem analogen Problem der Beugung ebener Wellen durch ein zylindrisches Hindernis, dessen Längsrichtung den Wellenflächen parallel ist, hat man für die einfallenden Wellen[236])

$$\begin{aligned}\varphi = e^{ikx} = J_0(kr) + 2iJ(kr)\cos\theta + \cdots \\ + 2i^nJ_n(kr)\cos n\theta + \cdots.\end{aligned} \tag{199}$$

Wenn ka klein ist, so lautet der Ausdruck für die gebeugten Wellen in einiger Entfernung[237])

$$\varphi = -k^2a^2\left(\frac{1}{2} + \cos\theta\right)\sqrt{\frac{\pi}{2ikr}}\,e^{-ikr}. \tag{200}$$

Das Problem der Beugung durch ebene Hindernisse oder durch Öffnungen in ebenen Schirmen wurde streng zum ersten Male von *A. Sommerfeld*[238]) behandelt. Man denke sich in Analogie zur Überdeckung einer Ebene durch eine zweiblättrige *Riemann*sche Fläche den Raum doppeltüberdeckt und den Übergang von dem einen Exemplar des Raumes in das andere durch gewisse „Übergangsflächen" vermittelt. Diese Übergangsflächen entsprechen den Übergangslinien der *Riemann*schen Fläche, ihre Berandung als „Verzweigungskurven" den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche. Liegt nun z. B. der Schirm in der Ebene $y = 0$ und sind mit S diejenigen Teile der Ebene bezeichnet, die durch den Schirm überdeckt sind, so hat man sich vorzustellen, dass eben diese Teile für den doppeltüberdeckten Raum Übergangsflächen werden, d. h. ein Punkt, der S durchsetzt, geht von

234) *Lord Rayleigh* behandelt auch den Fall eines gasförmigen Hindernisses.

235) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 375 = Papers 4, p. 397.

236) *E. Heine*, Fussnote 233.

237) *Lord Rayleigh*, Sound, § 343.

238) Gött. Nachr. 1894, p. 338 [im Inhaltsverzeichnis des Bandes nicht vermerkt]; Math. Ann. 47 (1896), p. 317; London Math. Soc. Proc. 28 (1897), p. 395.

dem einen Exemplar des Raumes in das andere über. Der erste Teil des akustischen Problems besteht in der Bestimmung einer Funktion φ_P, die in allen Punkten des so eingeführten Doppelraumes der Gleichung (171) genügt, im Unendlichen verschwindet und nur in einem Punkt P wie e^{-ikr}/r unendlich wird. Nun bilde man sich $\varphi_{P'}$, wo P' das Bild von P bezüglich der Ebene $y=0$, das in dem zweiten Exemplar des doppeltgedachten Raumes zu denken ist, wenn P sich im ersten befindet. Dann wird $\varphi = \varphi_P + \varphi_{P'}$ das Geschwindigpotential des bei dem ursprünglichen Probleme aus der Quelle in P entspringenden Wellensystems. Die Lösung ist vollständig durchgeführt für den Fall eines Schirms von der Form einer unendlichen Halbebene, zunächst für eine im Unendlichen gelegene Quelle[239]), sodann auch für eine im Endlichen gelegene Quelle[240]).

Aus der Lösung für die Halbebene lässt sich die für einen Spalt, der von parallelen Geraden begrenzt ist, durch successive Approximationen ableiten, vorausgesetzt, dass es sich um ebene Wellen handelt[241]).

β) Eine Anzahl wichtiger Probleme, die sich auf das direkte Auftreffen von Wellen auf Platten oder mit Öffnungen versehene Schirme beziehen, lässt sich, wie *Lord Rayleigh*[242]) gezeigt hat, nach *Näherungsmethoden* behandeln.

Fallen ebene Wellen in Richtung der negativen x-Axe auf einen *Schirm*, der in der yz-Ebene gelegen ist und *eine oder mehrere Öffnungen* besitzt, so kann man ansetzen

$$(201) \qquad \begin{cases} \varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \psi, & [x > 0], \\ \varphi = \psi', & [x < 0], \end{cases}$$

wo das Glied e^{ikx} die einfallenden Wellen und e^{-ikx} die regelmässig reflektierten Wellen darstellt, während ψ und ψ' die nach beiden Seiten gebeugten Wellen darstellen. Diese letzteren Funktionen müssen auf dem Schirm den Bedingungen $\partial\psi/\partial x = \partial\psi'/\partial x = 0$ und in den Öffnungen den Bedingungen $\psi = -1$, $\psi' = 1$, $\partial\psi/\partial x = \partial\psi'/\partial x$ ge-

239) *A. Sommerfeld*, loc. cit. Der optischen Analogie entsprechend giebt es einen Schallschatten. Die Intensitätsänderungen in der Nähe des Schattenrandes in grosser Entfernung vom Schirm ähneln denjenigen, die die bekannten *Fresnel*schen Methoden ergeben. *P. Drude*, Lehrbuch der Optik, Leipzig 1900, hat die Methode der *Cornu*schen Spiralen auf die Diskussion der *Sommerfeld*schen Resultate angewendet. Einen einfachen Beweis der *Sommerfeld*schen Formel giebt *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. (2) 4 (1906), p. 190; Hydrodynamik, Leipzig 1907, § 301a.

240) *H. S. Carslaw*, London Math. Soc. Proc. 30 (1899), p. 121.

241) *K. Schwarzschild*, Math. Ann. 55 (1901), p. 177.

242) Phil. Mag. (5) 43 (1897), p. 259 = Papers 4, p. 283.

nügen. Für eine isolierte Öffnung, deren Abmessungen klein sind gegen die Wellenlänge, kann man von der Formel (177) Gebrauch machen. Es ergiebt sich, dass die Funktionen ψ, ψ' in der Nähe der Öffnung gleich dem positiven oder negativen Wert des Potentials sind, das von einer elektrisierten, auf dem Potential 1 gehaltenen Metallscheibe von der Form der Öffnung herrührt. In grosser Entfernung r von der Öffnung ist daher

(202) $$\psi = -M\frac{e^{-ikr}}{r},$$

wo M die elektrostatische Kapazität der Scheibe. Für eine kreisförmige Öffnung vom Radius a ist $M = 2a/\pi$.

Für Wellen, die auf *eine ebene Platte* einfallen, hat man

(203) $$\begin{cases} \varphi = e^{ikx} + \psi, & [x > 0], \\ \varphi = e^{ikx} + \psi', & [x < 0], \end{cases}$$

mit den Grenzbedingungen $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial x' = -ik$ auf der Platte und $\psi = \psi' = 0$, $\partial\psi/\partial x = \partial\psi'/\partial x$ in dem übrigen Teil der yz-Ebene. Nahe an der Platte sind die Bedingungen bis auf den Faktor $-ik$ dieselben wie beim hydrodynamischen Problem einer Scheibe, die sich mit der Geschwindigkeit 1 senkrecht zu sich selbst in einer reibungslosen Flüssigkeit bewegt. Ist A der Trägheitskoeffizient bei letzterem Problem, so hat man in grosser Entfernung r[242])

(204) $$\psi = \frac{ikA}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{ikA}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta.$$

Für eine Kreisscheibe ist $A = \frac{8}{3}a^2$. Es ist bemerkenswert, dass die Amplitude der von der Scheibe gebeugten Wellen viel kleiner ist als die der durch eine Öffnung von den gleichen Abmessungen hindurchgelassenen Wellen[242]).

Dasselbe Verfahren, angewendet auf den Fall zweier Dimensionen zeigt[242]), dass die Wellen, die durch einen *Spalt* von der Breite b in einem ebenen Schirm gebeugt werden, gegeben sind durch

(205) $$\psi = -\frac{1}{\gamma + \log\frac{1}{4}ikb}\sqrt{\frac{\pi}{2ikr}}\,e^{-ikr},$$

während im Falle eines schmalen Schirms von der Breite b

(206) $$\psi = \frac{1}{2}k^2b^2\sqrt{\frac{\pi}{2ikr}}\,e^{-ikr}\cos\theta.$$

Wenn ebene Wellen auf Hindernisse in Gestalt von *Ellipsoiden* oder *elliptischen Zylindern*[243]) stossen, deren (endliche) Abmessungen

243) *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 28 = Papers 4, p. 305.

klein sind im Vergleich zu λ, so stellen wie im Falle (198) der Kugel die Glieder, die die Kugelfunktionen von der Ordnung 0 und 1 enthalten, eine hinreichende Approximation dar. Bei allen diesen Problemen ergiebt sich, dass die Hindernisse nur einen sehr kleinen Bruchteil der Energie zerstreuen, die durch den von ihnen eingenommenen Raum treten würde, wenn sie nicht vorhanden wären.

Die *Rayleigh*sche Methode ist auch auf den Fall eines *Gitters* angewendet worden, das aus gleichen parallelen Streifen von der Breite b gebildet wird, die durch gleiche leere Zwischenräume von der Breite a getrennt sind[244]). Nimmt man den Koordinatenanfang in der Mitte eines Streifens und die y-Axe senkrecht zu seiner Längsrichtung an, so hat man bei der gleichen Bezeichnungsweise wie in (201)

$$(207)\qquad \begin{cases} \psi = C_0 e^{-ikx} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n x} \cos \dfrac{2n\pi y}{a+b}, \\ \lambda_n^2 = \dfrac{4n^2\pi^2}{(a+b)^2} - k^2, \end{cases}$$

während $\psi'(-x, y) = -\psi(x, y)$. Es ergiebt sich, dass

$$(208)\qquad C_0 = -\frac{1}{1+ikc}, \quad c = \frac{a+b}{\pi} \log \sec \frac{\pi b}{2(a+b)}.$$

Ist die Intensität der ursprünglichen Wellen gleich 1, so sind die Intensitäten J, J' der reflektierten und der hindurchtretenden Wellen gleich

$$(209)\qquad J = \frac{k^2c^2}{1+k^2c^2}, \quad J' = \frac{1}{1+k^2c^2}.$$

Vorausgesetzt ist, dass $k(a+b)$ klein ist; ist diese Bedingung erfüllt, so zeigt sich, dass durch eine Reihe schmaler Spalte mit verhältnismässig breiten undurchlässigen Zwischenräumen der ursprüngliche Schall zum weitaus grössten Teil hindurchzutreten vermag[245]).

Bei einem Gitter aus zylindrischen Drähten vom Radius b, deren Axen in gleichen Abständen a angeordnet sind, verhalten sich die Intensitäten der reflektierten und der hindurchtretenden Wellen wie in (209), wobei $c = \pi b^2/a$ [244]).

7c. **Normalschwingungen begrenzter Luftmassen. Mitteilung von Schwingungen.** α) Vom mathematischen Standpunkt aus besteht das

244) *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 29 (1898), p. 523 und Hydrodynamics, 3. Aufl., §§ 300, 301.

245) So findet man z. B. $J = 0{,}121$, $J' = 0{,}879$ für $\lambda = 10\,(a+b)$, $a = \frac{1}{10}\,b$.

Problem der Normalschwingungen begrenzter Luftmassen in der Ermittelung derjenigen Lösungen von (171), die an der Oberfläche der Bedingung $\partial\varphi/\partial n = 0$ oder $\varphi = 0$ genügen. Es zeigt sich, dass dies nur für eine gewisse Reihe von Werten von k möglich ist, aus denen sich die entsprechenden Frequenzen bestimmen (II A 7c, Nr. **9**, *A. Sommerfeld*).

Die Theorie *der Längsschwingungen in zylindrischen Röhren* geht zurück auf *D. Bernoulli*[245a]), *Euler*[245b]) und *Lagrange*[245c]). Für eine stehende Schwingung gilt

$$\varphi = A \cos kx + B \sin kx,$$

wo A, B reell sind. Man erhält eine Reihe von Knoten ($\partial\varphi/\partial x = 0$) in Abständen von $\frac{1}{2}\lambda$ und mitten zwischen ihnen Bäuche ($\varphi = 0$). Für eine an beiden Enden geschlossene Röhre hat man

$$(211) \quad \begin{cases} \varphi = C \cos \frac{s\pi x}{l} \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad \sigma = s\pi c/l, \\ s = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Für ein offenes Ende wurde der Druck konstant angenommen, nämlich gleich dem der ungestörten Atmosphäre; dies bedingt $\varphi = 0$.[246]) Für eine an beiden Enden offene Pfeife ergiebt sich daher

$$(212) \quad \begin{cases} \varphi = C \sin \frac{s\pi x}{l} \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad \sigma = s\pi c/l, \\ s = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

während für eine bei $x = 0$ geschlossene und bei $x = l$ offene Pfeife

$$(213) \quad \begin{cases} \varphi = C \cos \frac{s\pi x}{2l} \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad \sigma = s\pi c/2l, \\ s = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Für eine geschlossene, *rechteckige Kammer*, von der drei Kanten (α, β, γ) im Koordinatenanfang zusammenstossen, lautet die Lösung[247])

$$(214) \quad \begin{cases} \varphi = C \cos \frac{px}{\alpha} \cos \frac{qy}{\beta} \cos \frac{rz}{\gamma} (\cos \sigma t + \varepsilon), \\ k^2 = \pi^2 \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \frac{r^2}{\gamma^2}\right), \\ p, q, r = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

245a) Paris Mém. de l'Acad. 1762 (64), p. 433.

245b) Petrop. N. Comm. 16 (1771), p. 282.

245c) Misc. Taur. 2 1760/61) = Oeuvres 1, p. 298.

246) Eine strengere Behandlung des Problems der offenen Röhre betreffend siehe Nr. **7** d.

247) *J. Duhamel*, J. de math. **14** (1849) p. 49.

Die Schwingungen der *von einer starren Kugelfläche* $r = a$ *eingeschlossenen Luft* sind gegeben durch (188) mit der Bedingung

$$ka\psi_n'(ka) + n\psi_n(ka) = 0. \tag{215}$$

Im Falle rein radialer Schwingungen ($n = 0$) reduziert sich die Formel auf $\operatorname{tg} ka = ka$, woraus

$$ka/\pi = 1{,}4303;\ 2{,}4590;\ 3{,}4709;\ \ldots;$$

die Werte nähern sich der Form $ka/\pi = s + \frac{1}{2}$. Für $n = 1$ hat man die Gleichung $\operatorname{tg} ka = 2ka/(2 - k^2a^2)$, von der die kleinste in Betracht kommende Wurzel $ka/\pi = 0{,}6625$[248] ist. Sie entspricht der tiefsten aller Normalschwingungen[249].

Für die *Querschwingungen der in einem Kreiszylinder* ($r = a$) *eingeschlossenen Luft* hat man

$$\left\{\begin{aligned}\varphi &= CJ_n(kr)\cos(n\theta + \alpha), \quad J_n'(ka) = 0,\\ & \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\end{aligned}\right. \tag{216}$$

Die Theorie gestaltet sich ähnlich wie die der kreisförmigen Membran (Nr. 4), nur dass die Randbedingungen andere sind. Im Falle der Symmetrie ($n = 0$)[250] sind die niederen Wurzeln

$$ka = 3{,}832;\ 7{,}016;\ 10{,}173;\ \ldots,$$

die Zahlen konvergieren gegen $(s + \frac{1}{4})\pi$. Für $n = 1$ ist

$$ka = 1{,}841;\ 5{,}332;\ 8{,}536;\ \ldots,$$

diese Werte nähern sich der Form $(s - \frac{1}{4})\pi$.[251][252]

Im Falle eines *Kreiszylinders mit ebenen Endflächen* $z = 0$, $z = l$ sind die Normalschwingungen, die nicht rein longitudinal oder

---

248) Die Zahlen geben das Verhältnis des Kugelumfangs zur Wellenlänge an. Das Problem wurde zum ersten Male gelöst von *Lord Rayleigh,* London Math. Soc. Proc. 4 (1872), p. 93; Sound, § 331, wo zahlreiche numerische Einzelheiten mitgeteilt sind.

249) Für den von zwei starren konzentrischen Kugeln begrenzten Raum kann man eine analytische Lösung aus der allgemeinen Formel (187) erhalten. Wenn die Radien annähernd gleich sind, so lässt sich ein davon unabhängiges Verfahren anwenden; *Lord Rayleigh,* Sound, § 333.

250) *J. Duhamel,* J. de math. 14 (1849), p. 49.

251) *Lord Rayleigh,* Sound, § 339, giebt eine Tabelle der Wurzeln. Eine Reihe, mittelst der jede Wurzel sich rasch berechnen lässt, ist aufgestellt von *J. McMahon,* Ann. of math. 9 (1894), p. 23.

252) *Lord Rayleigh,* loc. cit., entwickelt an einem Beispiel die Bestimmung der Amplituden und Phasen der Normalschwingungen aus den Anfangsbedingungen und zwar mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaft der Funktionen $J_n(kr)$.

rein transversal sind, gegeben durch [253])

$$(217)\quad \begin{cases} \varphi = C\cos\frac{s\pi z}{l} J_n(\varkappa r)\cos(n\theta+\alpha), \quad \varkappa^2 = k^2 + \frac{s^2\pi^2}{l^2}, \\ J_n'(\varkappa a) = 0; \\ n, s = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

β) Gehen wir über zu den *erzwungenen Schwingungen einer Luftmasse,* die von einer vorgeschriebenen Normalbewegung der Oberfläche herrühren, so bietet sich als interessantestes Problem das eines schwingenden Körpers dar, der von einer unbegrenzten Atmosphäre umgeben ist.

Die Fälle, wo der schwingende Körper eine *Kugel oder ein Kreiszylinder* ist, sind von *G. G. Stokes* [254]) vollständig erledigt. Schwingt die Oberfläche einer Kugel vom Radius a nach dem Gesetz $r = a + \alpha S_n e^{i\sigma t}$, so sind die divergierenden Wellen vom Typus (187), wenn $B_n = 0$ gesetzt wird:

$$(218)\quad \begin{cases} \varphi = \frac{i\sigma\alpha}{k}\frac{f_n(kr)}{f_n'(ka)} S_n e^{i\sigma t}, \\ f_n(\zeta) = \left(-\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}. \end{cases}$$

Wenn ka hinreichend klein ist, so ist die Energie, die in gegebener Richtung in der Zeiteinheit sich ausbreitet, gleich S_n^2 multipliziert mit einem Faktor, der mit wachsender Ordnungszahl n der Kugelfunktion schnell abnimmt, und diese Abnahme tritt um so schärfer hervor, je kleiner der Wert von ka. Hierin zeigt sich der Einfluss der seitlichen Bewegung an der Oberfläche der Kugel (von Stellen, wo die Teilchen nach aussen schwingen, nach Stellen, wo sie nach innen schwingen), der die Intensität der in die Entfernung fortgepflanzten Wellen abschwächt. Zudem nimmt der in Rede stehende Faktor für einen gegebenen Wert von n und eine gegebene Frequenz mit wachsender Wellengeschwindigkeit c sehr rasch ab. Daraus erklärt es sich, dass eine Glocke in einer Atmosphäre von Wasserstoff viel schwächer klingt als in Luft [254]).

Der Fall $n = 1$ in (218) entspricht den geradlinigen Schwingungen einer starren Kugel. Derselbe war bereits von *S. D. Poisson* [255]) im Zusammenhang mit der Theorie des Pendels behandelt worden [256]).

---

253) *Lord Rayleigh,* Sound, § 340.

254) London Phil. Trans. 154 (1868), p. 447 = Papers 4, p. 299.

255) Paris Mém. 11 (1832), p. 521; siehe auch *G. Kirchhoff,* Mechanik, Vorl. 23, und *Lord Rayleigh,* Sound, § 325. Die Hauptwirkung der umgebenden Luft besteht darin, dass die Trägheit der Kugel um den Betrag

Der allgemeine Ausdruck für die Energie, die in der Zeiteinheit mit dem durch (187) für $B_n = 0$ dargestellten Wellensystem ausgesandt wird, lautet[257])

$$\tfrac{1}{2}\varrho c k^{-2n} |A_n{}^2| \iint S_n{}^2 d\omega,$$

wo $d\omega$ ein räumlicher Elementarwinkel.

In ähnlicher Weise lässt sich die Formel (183), worin $B = 0$ gesetzt ist, auf die Diskussion der Wellen anwenden, die durch die zweidimensionalen Schwingungen eines Kreiszylinders in der umgebenden Luft hervorgerufen werden. Der Fall $n = 1$ schildert die unmittelbare Einwirkung eines schwingenden Drahtes auf die Luft. Ist der Umfang des Querschnitts klein gegen die Wellenlänge, so ist die Amplitude in einiger Entfernung infolge der seitlichen Bewegungen an der Oberfläche des Drahtes ausserordentlich klein[254])[258]).

7d. Theorie der Orgelpfeifen und der Resonatoren. α) Die Näherungstheorie für offene Pfeifen (Nr. 7c) stützt sich auf die Annahme, dass die Verdichtung an einem offenen Ende dauernd null ist. Diese Annahme trägt aber dem Energieverlust der schwingenden Säule keine Rechnung; zudem widerstreiten die Folgerungen betreffend Lage der Knoten u. s. w. dem Experiment. Die strengere Behandlung der *Pfeifen* verdankt man *H. Helmholtz*[259]); sie ist auf die allgemeinen Sätze von Nr. **6**c gegründet.

Eine gerade Röhre, deren seitliche Abmessungen klein sind gegen die Wellenlänge, kommuniziere durch eine Öffnung O in der Ebene

---

$$\frac{2 + k^2a^2}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{4}{3}\pi\varrho a^3$$

vermehrt wird, während von der Energie der Schwingungen der Betrag

$$\frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{2}{3}\pi\varrho a^3 \cdot \sigma\alpha^2$$

pro Zeiteinheit zerstreut wird, wenn α die Amplitude. — Der Fall der geradlinigen Schwingungen eines starren Ellipsoids ist behandelt von *A. Coym,* Über elastische Schwingungen, die durch Ausstrahlung von Energie gedämpft werden, Diss. Berlin 1903.

256) *A. E. H. Love,* London Math. Soc. Proc. (2) 2 (1904), p. 88 hat untersucht, was an der Wellenfront vor sich geht, die sich in ein anfangs ungestörtes Medium fortpflanzt. Er betrachtet insbesondere den Fall von Wellen, die durch ein plötzlich angestossenes, vorher in Ruhe befindliches Pendel erzeugt werden.

257) *Lord Rayleigh,* Sound, § 327; *H. Lamb,* London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 16.

258) *Lord Rayleigh,* Sound, § 341.

259) J. f. Math. 57 (1860), p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 303. Die Einleitung giebt einen vollständigen Bericht über frühere Theorien.

$x = 0$ mit einem offenen Raum, der seinerseits von dem übrigen Teile dieser Ebene als starrer Wand begrenzt wird. Nahe der Mündung mag die Röhre etwas von der zylindrischen Form abweichen. Es wird angenommen, dass in gewisser Entfernung von O die Schwingung im Innern der Röhre von folgendem Typus ist:

$$(219)\qquad \varphi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos kct + \mathfrak{B}\cos kx \sin kct,$$

während man im Aussenraum in grosser Entfernung von O die Kugelwellen

$$(220)\qquad \varphi = \frac{M}{r}\cos k(r - ct) - \frac{M_1}{r}\sin k(r - ct)$$

hat. Die Konstante A kann als gegeben angesehen werden, und die Aufgabe ist, die Werte von B, $\mathfrak{B}$, M, M_1 zu bestimmen, (die in der Näherungstheorie sämtlich gleich Null gesetzt werden). Der Satz (175) dient zunächst zum Beweise, dass angenähert

$$(221)\qquad \mathfrak{B}/A = -kQ/2\pi,\quad M/A = -Q/2\pi,\quad M_1 = 0,$$

wo Q der Querschnitt des geraden Teils der Röhre. Der Quotient B/A bleibt vor der Hand unbestimmt. Schreibt man $kB/A = -\operatorname{tg} k\alpha$, so geht die Formel (219) über in[260])

$$(222)\qquad \varphi = \frac{A}{k\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\cos kct - \frac{kAQ}{2\pi}\cos kx \sin kct.$$

In erster Annäherung ist die Bewegung der Luft im Bereiche der ebenen Wellen dieselbe wie diejenige, die auf Grund der alten elementaren Theorie in der um das Stück α über O hinaus verlängerten Pfeife eintreten würde. Durch Betrachtungen, die sich auf die Gleichung (177) gründen, wird gezeigt, dass α nahezu identisch ist mit einer Grösse, die in der Theorie der Elektrizitätsströmung vorkommt. Für ein Metallstück von der Gestalt des betrachteten Luftraums ist nämlich die Leitfähigkeit zwischen einem Querschnitt des zylindrischen Teils im Abstand l von O und einer Halbkugelfläche von grossem Radius mit dem Mittelpunkt in O gleich der Leitfähigkeit eines zylindrischen Stücks von der Länge $l + \alpha$. Daraus folgt, dass α im allgemeinen mit den seitlichen Abmessungen der Pfeife vergleichbar ist[261]).

---

260) Eine erschöpfende Diskussion der Bewegung in der Pfeife unter Berücksichtigung des zweiten Gliedes in (222) gilt *H. Helmholtz*, loc. cit. Die Ergebnisse hat *M. Brillouin*, J. de phys. (2) 6 (1887), p. 205 graphisch dargestellt.

261) Die Untersuchung ist von *Lord Rayleigh*, Sound, chapt. 16, vereinfacht; siehe auch *L. Lorenz*, J. f. Math. 58 (1861), p. 329 = Oeuvres scientifiques, Kopenhagen 1898/99, 2, p. 22. Methoden zur Abschätzung des Wertes von α sind von *Lord Rayleigh* entwickelt worden; für eine Röhre von kreis-

Rührt die Störung von einer eingeprägten Geschwindigkeit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = G \cos(\sigma t + \varepsilon)$$

im Querschnitt $x = -l$ her, so ergiebt sich

$$\frac{G^2}{A^2} = \frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kl.$$

Die Amplitude erreicht also ein Maximum ungefähr, wenn $\cos k(l+\alpha) = 0$, d. h. wenn die „reduzierte Länge" $l + \alpha$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{4}\lambda$ ist [259]).

Wenn die Röhre bei $x = -l$ durch eine starre Wand geschlossen ist und die Bewegung von einer einfachen Quelle

$$\varphi = \frac{H}{r} \cos(\sigma t - kr + \varepsilon)$$

im Abstand r_1 von O im Aussenraum herrührt, so ergiebt sich, dass die Schwingung draussen von der Bewegung, die eintritt, wenn die Öffnung der Röhre geschlossen ist, sich um ein Glied

$$\varphi = \frac{M}{r} \cos(\sigma t - kr)$$

unterscheidet, wo

$$\frac{M}{H} = -\frac{kQ}{r_1} \sin kl : \sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kl}.$$

Wie vorhin tritt das Maximum für $\cos k(l+\alpha) = 0$ ein, und zwar ist dann $M/H = -2/kr_1$. [262]) Ist der Abstand der Quelle von der Öffnung klein gegen die Wellenlänge, so kann der Quotient M/H sehr gross sein. Der Phasenunterschied $kr_1 - \varepsilon$ des Drucks in O in den einfallenden und in den reflektierten Wellen ist dann annähernd gleich $\frac{1}{4}\pi$.

β) Das zuletzt erwähnte Problem ist typisch für die Wirkungsweise der *Resonatoren*. *H. Helmholtz* hat weiterhin die Frequenz der stärksten Resonanz bei beliebig geformten Hohlräumen untersucht, die mit der äusseren Luft durch eine kleine Öffnung in Verbindung stehen [263]). In jedem Augenblick ist die Verdichtung in dem ganzen Hohlraum nahezu gleichförmig, ausser in der Nähe des Lochs. Die Wellenlänge $(2\pi/k)$ der stärksten Resonanz bestimmt sich durch

(223) $$k^2 = \pi M/S,$$

---

förmigem Querschnitt ergiebt sich, dass α zwischen $0{,}785\,a$ und $0{,}849\,a$ liegen muss, wenn a der Radius. Die zweidimensionale Form des Orgelpfeifenproblems diskutiert *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. (6) 8 (1904), p. 481.

262) Der starren unendlichen Ebene wegen wird das Verhältnis, in dem die Amplitude durch Resonanz vergrössert wird, genauer durch $M/2H = -1/kr_1$ gegeben.

263) Vgl. *G. Kirchhoff,* Mechanik, Vorl. 24.

wo S das Volumen des Hohlraums und M die elektrostatische Kapazität einer Scheibe von der Form der Öffnung; für ein kreisförmiges Loch ist z. B. $M = 2a/\pi$, wo a der Radius. Die Rechnungen setzen voraus, dass λ gross ist gegen die Abmessungen von S.

Von *Lord Rayleigh*[264]) wurde die Fundamentalschwingung eines Resonators in anderer Weise untersucht. Ist X das gesamte Luftvolumen, das bis zur Zeit t durch die Öffnung geströmt ist, so ist die Verdichtung im Innern merklich gleich X/S, während im Aussenraum die Änderung der Dichte verhältnismässig klein sein wird, die potentielle Energie ist daher annähernd gleich

$$(224) \qquad W = \tfrac{1}{2}\varrho c^2 X^2/S.$$

Andererseits kommt von der kinetischen Energie hauptsächlich diejenige in Betracht, die die mit geringer Dichteänderung durch die Öffnung strömende Luft besitzt; dieselbe lässt sich schreiben

$$(225) \qquad T = \tfrac{1}{2}\varrho \dot{X}^2/C,$$

wo C eine der Leitfähigkeit in der Elektrodynamik analoge lineare Grösse. Die Konstanz von $T + W$ fordert

$$(226) \qquad \ddot{X} + \frac{c^2 C}{S} X = 0,$$

was auf eine Schwingung von der Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi \sqrt{S/C}$$

deutet. Es zeigt sich, dass $C = \pi M$, wo M dieselbe Bedeutung hat wie vorhin; das Ergebnis deckt sich daher mit (223).

Die Theorie, soweit sie bisher entwickelt wurde, zieht den Energieverlust am Resonator nicht in Betracht. Die strengere Gleichung der freien Schwingung, die diesem Umstand Rechnung trägt, lautet[265])

$$(227) \qquad \ddot{X} + \frac{cC^2}{2\pi S}\dot{X} + \frac{c^2 C}{S} X = 0,$$

und die Schwingung ist daher vom Typus

$$(228) \qquad X = Ae^{-t/\tau}\cos(\sigma t + \varepsilon), \quad \sigma^2 = c^2 C/S, \quad \tau = cC^2/4\pi S.$$

---

264) London Phil. Trans. 161 (1871), p. 77 = Papers 1, p. 33; Sound, chapt. 16. Die Theorie wurde mit Hilfe der *Lagrange*schen Gleichungen auf Fälle mehrfacher Resonanz (wie z. B. Resonanz von zwei oder mehr Hohlräumen, die durch enge Öffnungen mit einander und mit der äusseren Luft in Verbindung stehen) und auch auf den Fall von Resonatoren mit zylindrischem Hals ausgedehnt.

265) Sound, § 311. Ein ähnliches Resultat lässt sich aus der *Helmholtz*schen Theorie ableiten.

Eine sorgfältige Untersuchung der Resonanzerscheinungen vom allgemeinen dynamischen Gesichtspunkt verdankt man *Lord Rayleigh* [266]). Es wurde bereits erwähnt, dass im Falle einer einfachen Quelle, die sich im Abstand r_1 von der Mündung des Resonators befindet, die Amplitude in einiger Entfernung im Verhältnis $1/kr_1$ vergrössert wird; bei einer Doppelquelle hat das Verhältnis den viel grösseren Wert $1/k^2r_1^2$. Die Verstärkung des Schalls bedingt natürlich nicht, dass Energie geschaffen wird; der Energievorrat der ursprünglichen Quelle wird einfach rascher verbraucht [267]).

7e. **Störende Einflüsse.** Es sollen hier die verschiedenen Ursachen von Energiezerstreuung bei Schallwellen betrachtet werden.

Die Wirkungen der *Wärmestrahlung* wurden von *G. G. Stokes* [268]) behandelt. Für ebene Wellen gelten ausser den hydrodynamischen Gleichungen

$$(229) \qquad \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

die thermischen Beziehungen

$$(230) \qquad p = \varkappa \varrho (1 + s + \alpha \vartheta), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\gamma - 1}{\alpha} \frac{\partial s}{\partial t} - q\vartheta,$$

wo ϑ die Temperatur und q der Strahlungskoeffizient. Wird in der Ebene $x = 0$ eine Schwingung $s = A \cos \sigma t$ unterhalten, so lautet die Lösung

$$(231) \qquad \begin{cases} s = A e^{-\mu x \sin \psi} \cos(\sigma t - \mu x \cos \psi), \\ \mu^4 = \frac{\sigma^4}{\varkappa^2} \frac{q^2 + \sigma^2}{q^2 + \gamma^2 \sigma^2}, \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{(\gamma - 1)\sigma q}{\gamma \sigma^2 + q^2}. \end{cases}$$

Der Exponentialfaktor zeigt eine ständige Abnahme der Amplitude beim Fortschreiten der Welle an, auch besteht ein Einfluss auf die Wellengeschwindigkeit, die gleich $\sigma/\mu \cos \psi$ ist. Ist q/σ sehr klein oder sehr gross, so konvergiert die Wellengeschwindigkeit gegen den Laplaceschen Wert $\sqrt{\gamma\varkappa}$ bzw. gegen den Newtonschen Wert $\sqrt{\varkappa}$; in beiden Fällen ist der Dämpfungskoeffizient sehr klein. Wäre q/σ nicht sehr klein bzw. sehr gross, so würde die Wirkung auf die

266) Sound, § 318.

267) Die Zerstreuung der Energie von Schallwellen durch eine oszillierende Kugel, deren Eigenschwingung nahezu dieselbe Periode besitzt wie die Schallwellen, behandeln *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 32 (1900), p. 11, und *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (6) 3 (1902), p. 97.

268) Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 305 = Papers 3, p. 142; vgl. *Lord Rayleigh*, Sound, § 247 und Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 308 = Papers 4, p. 376. In der letztgenannten Abhandlung schliesst *Lord Rayleigh* auf Grund von Experimenten, dass der Strahlungseffekt tatsächlich unmerklich ist.

Wellengeschwindigkeit und die Amplitude bei Schallwellen von gewöhnlicher Frequenz viel grösser sein, als mit der Beobachtung vereinbar wäre.

Der Einfluss der *inneren Reibung* (Viskosität) wurde gleichfalls von *G. G. Stokes*[269]) zum ersten Mal behandelt. Die Gleichungen für ebene Wellen lauten:

$$(232)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{4}{3}\mu'\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ p = \varkappa\varrho(1+\gamma s), \end{cases}$$

wo μ' der kinematische Reibungskoeffizient (IV 15 Nr. **13**, *A. E. H. Love*). Wird in der Ebene $x = 0$ eine erzwungene Schwingung $u = a\cos\sigma t$ unterhalten, so hat man

$$(233)\qquad u = ae^{-x/l}\cos\sigma\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad l = \frac{3}{2}\,c^3/\mu'\sigma^2,$$

wobei das Quadrat von $\mu'\sigma/c^2$ vernachlässigt ist[270]).

Nach der dynamischen Theorie der Gase sind die Wirkungen der *Reibung und Wärmeleitung* von derselben Grössenordnung. Gleichungen der kleinen Bewegung, in denen beide Einflüsse in Rechnung gesetzt sind, wurden von *G. Kirchhoff*[271]) aufgestellt und auf die Fortpflanzung von Schallwellen in freier Luft, sowie in einer engen Röhre angewendet. Im ersteren Falle ist die Wirkung dieselbe, wie wenn in dem Wert von l in Formel (233) μ' durch

$$\frac{3}{4}\left(\mu' + \mu'' + \frac{\gamma - 1}{\gamma}k\right)$$

zu ersetzen wäre, wo μ', μ'' zwei Reibungskoeffizienten[272]) und k das Temperaturleitungsvermögen der Luft. Wenn Schall eine Röhre vom Radius R durchläuft, so reduziert sich die Wellengeschwindigkeit im Verhältnis[273])

$$1 - \frac{\gamma'}{\sqrt{2\sigma}\,R}, \quad \text{wo} \quad \gamma' = \sqrt{\mu'} + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{k}.$$

---

269) Cambridge Phil. Soc. Trans. 8 (1845), p. 302 = Papers 1, p. 100.

270) Der Einfluss der Reibung auf die freien Schwingungen der in einer Hohlkugel eingeschlossenen Luft und auf die Querschwingungen in einem Kreiszylinder wurde berechnet von *H. Lamb*, London Math. Soc. Proc. 16 (1884), p. 27.

271) Ann. Phys. Chem. 134 (1868), p. 177 = Ges. Abh. 1, p. 540. Der Einfluss der Wärmeleitung allein bei ebenen Wellen wurde unabhängig von *Lord Rayleigh*, Sound, § 247 untersucht.

272) Nach der *Maxwell*schen Theorie wird $\mu'' = \frac{1}{3}\mu'$. Bezüglich dieser Frage siehe *G. G. Stokes*, Papers 3 (1901), p. 136.

273) Für den Fall $k = 0$ war dies Resultat beweislos angegeben von *H. Helmholtz*, Verh. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg 3 (1863), p. 16

Die Rechnung setzt voraus, dass $\mu'/\sigma R^2$ klein ist; in diesem Fall sind die Wellen merklich eben ausser an den Wänden der Röhre. Das entgegengesetzte Extrem kann in sehr feinen Röhren vorkommen. Dies hat *Lord Rayleigh*[274]) untersucht; er findet, dass längs der Röhrenaxe

(234) $$u = a e^{-\beta x} \cos(\sigma t - \beta x), \quad \beta^2 = 4\gamma \mu' \sigma / c^2 R^2,$$

so dass die Amplitude innerhalb einer Strecke von der Grösse der veränderten Wellenlänge $(2\pi/\beta)$ im Verhältnis 0,00187 verkleinert wird. Die Expansionen sind praktisch isotherm, und nur die Reibung kommt in Frage. Diese Ergebnisse werden angewendet, um die Absorption des Schalls durch poröse Körper zu erläutern.

Den Einfluss des Wärmeaustausches zwischen der tönenden Luft und der Röhrenwandung auf die Schallgeschwindigkeit hat *J. Sturm*[275]) festgestellt.

Noch ein weiterer Umstand, der allerdings keine Zerstreuung der Energie bewirkt, kann die Geschwindigkeit des Schalls in einer Röhre gegenüber der im offenen Raum verändern, nämlich das elastische *Nachgeben der Wände*[276]). Bei Luft ist der Einfluss unbedeutend, sehr beträchtlich dagegen im Falle, wo die Röhre mit Wasser gefüllt ist. Die Formel lautet[277]):

$$c^2 = \frac{c_0^2}{1 + 2\varkappa R/hE},$$

wo $\varkappa$ die Volumelastizität des Wassers, E der Wert des Youngschen Moduls für das Material der Wand und h die Wanddicke.

= Wiss. Abh. 1, p. 383; vgl. *Lord Rayleigh,* Sound, § 347. Die Formel ist experimentell annähernd bestätigt befunden von *H. Schneebeli*, Ann. Phys. Chem. 136 (1869), p. 296; *A. Seebeck,* Ann. Phys. Chem. 139 (1890), p. 104; *H. Kayser,* Ann. Phys. Chem. 2 (1877), p. 218; *J. W. Low,* Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 641; *H. Stevens,* Ann. Phys. 7 (1902), p. 285; *J. Müller,* Ann. Phys. 11 (1903), p. 331. Letzterer stellt jedoch auch eine Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Rauhigkeit der Wand fest. Für sehr enge Röhren und tiefe Töne findet *F. A. Schulze,* Ann. Phys. 13 (1904), p. 1060, bedeutende Abweichungen des Wertes von γ vom theoretischen Wert. Nach *J. Sturm,* Ann. Phys. 14 (1904), p. 822 ist die *Kirchhoff*sche Formel überhaupt unzutreffend; seine Experimente bezogen sich jedoch gleichfalls auf sehr enge Röhren, so dass zweifelhaft erscheint, ob die Voraussetzungen der *Kirchhoff*schen Theorie erfüllt waren.

274) Phil. Mag. (5) 16 (1883), p. 181 = Papers 2, p. 220; Sound, 2. Aufl, § 351.

275) loc. cit.

276) *H. Helmholtz,* Fortschr. d Phys. 4 (1848), p. 114; Wiss. Abh. 1, p. 246.

277) *D. J. Korteweg,* Ann. Phys. Chem. 5 (1878), p. 525; *H. Lamb,* Manchester Mem. 42 (1898), Nr. 9. Vorausgesetzt ist, dass h/R klein ist. Den allgemeinen Fall betrachtet *H. Lamb,* loc. cit.

8. Schwingungen elastischer fester Körper.

8a. Wellen in einem unbegrenzten elastischen Medium. α) In einem von äusseren Kräften freien Medium gelten für *isotrope Körper* die Grundgleichungen[278])

$$(235)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \varrho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v, \quad \Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \\ \varrho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w. \end{cases}$$

Setzt man

$$\xi, \eta, \zeta = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

so ergiebt sich durch Differentiation

$$(236)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Theta, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \xi, \quad \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = b^2 \Delta \eta, \quad \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = b^2 \Delta \zeta, \\ \text{mit} \\ a^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\varrho}, \quad b^2 = \dfrac{\mu}{\varrho}. \end{cases}$$

Die Dilatation Θ breitet sich daher mit der konstanten Geschwindigkeit a aus, während die Rotationen ξ, η, ζ sich mit der kleineren Geschwindigkeit b fortpflanzen[279]). Das einfachste Beispiel liefert der Fall ebener Wellen; etwa

$$u = f(at - x), \quad v = 0, \quad w = 0;$$

$$\text{bzw.} \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = f(bt - x).$$

Diese Gleichungen stellen longitudinale bzw. transversale Verschiebungswellen dar.

Die Werte von Θ, ξ, η, ζ zur Zeit t, ausgedrückt durch ihre Werte zur Zeit 0, werden durch das *Poisson*sche Integral (163) der Gleichung (161) gegeben; die nachfolgende Bestimmung von u, v, w geschieht in der in IV 14, Nr. **10** von *M. Abraham* dargelegten

278) Für den Fall $\lambda = \mu$ decken sich die Gleichungen (235) mit den Grundgleichungen von *C. L. M. H. Navier*, Paris Mém. 7 (1827) [1821], p. 375; vgl. betreffs ihrer Aufstellung IV 23 (*C. H. Müller-A. Timpe*) und ihrer allgemeinen Integrationstheorie IV 24, Abschnitt III (*O. Tedone*).

279) *G. G. Stokes*, Cambr. Phil. Trans. 9 (1849), p. 1. = Papers 2, p. 243.

Weise. Ist die anfängliche Störung auf einen endlichen Bereich beschränkt, so kann man sich um sämtliche Punkte der Oberfläche dieses Bereiches Kugeln vom Radius at beschrieben denken; die Enveloppe dieser Kugeln wird bei hinreichend grossem t aus einer inneren und einer äusseren Schale bestehen, die die Begrenzung des Raumes bilden, innerhalb dessen zur Zeit t $\Theta \neq 0$ ist. Entsprechend kann man, indem man Kugeln vom Radius bt beschreibt, den Bereich bestimmen, innerhalb dessen $\xi, \eta, \zeta \neq 0$. In grosser Entfernung vom Störungsursprung hat man zwei Wellen, eine Dilatationswelle, die mit der Geschwindigkeit a fortschreitet, und eine Rotationswelle, die sich mit der Geschwindigkeit b ausbreitet; die Verschiebungen sind bei der ersteren Welle annähernd normal, bei der letzteren annähernd transversal [280]).

Ein etwas abweichendes Integrationsverfahren geht aus von dem Ansatz [281])

$$(237)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z}, \\[2ex] v = \dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x}, \\[2ex] w = \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}$$

wo P der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta P$$

und U, V, W der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \varphi$$

genügen.

Die Schwingungen, die in einem unbegrenzten Medium von einer „Quelle“ hervorgerufen werden, d. h. von einer endlichen äusseren Kraft, die in einem unendlich kleinen Bereich konzentriert ist [282]), sowie andere Spezialfälle sind hauptsächlich in der Optik von Interesse,

280) Im Falle $b^2 = \frac{1}{3} a^2$ ist die Integration behandelt von *S. D. Poisson*, Paris Mém. 8 (1829), p. 623; 10 (1831), p. 592; *A. Ostrogradsky*, Petersburg Mém. (6) 1 (1831), p. 455; 2 (1833) p. 339; doch sind die Ergebnisse nicht weiter interpretiert. Vgl. den Bericht über die älteren Untersuchungen bei *H. Burkhardt*, Bericht über Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen, § 63 u. 64, sowie § 70 bis § 72 (insb. *A. L. Cauchy* u. *P. H. Blanchet*).

281) *A. Clebsch*, J. f. Math. 61 (1863), p. 195; *P. Duhem*, Bordeaux Mém. (5) 3 (1899), p. 317; J. de math. (5) 6 (1900), p. 215. Vgl. auch IV 24, Nr. **16**b (*O. Tedone*).

282) *G. G. Stokes*, Fussn. 279; *Lord Rayleigh*, Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 107 = Papers 1, p. 87; Sound, 2. Aufl., §§ 375, 378; *W. Voigt*, J. f. Math. 89

weswegen für weitere Ausführungen hierüber auf die Referate V 21—23 über Optik verwiesen sei.

β) Die Theorie ebener Wellen in einem *krystallinischen Medium*, dessen Energiefunktion ganz allgemeinen Charakter besitzt und daher 21 Koeffizienten enthält, wurde von *G. Green*[283]) und *A. L. Cauchy*[283a]) behandelt. Für eine bestimmte Stellung der Wellenfläche (d. h. für eine bestimmte Normalenrichtung) giebt es drei mögliche Wellengeschwindigkeiten und drei entsprechende Schwingungsrichtungen. Es sind dies die Richtungen der Hauptaxen eines bestimmten Hilfsellipsoids, und die Wellengeschwindigkeiten sind der Länge dieser Axen umgekehrt proportional. In einem isotropen Medium erhält man ein Umdrehungsellipsoid, dessen Symmetrieaxe zur Wellenfläche senkrecht ist und dessen Form für alle Stellungen der Wellenfläche dieselbe ist[283]). Wie ferner gezeigt wird, muss die Zahl der elastischen Konstanten sich überhaupt auf sieben reduzieren, wenn für jede Stellung der Wellenfläche eine der Hauptverschiebungen in die Richtung der Normale fällt; und das Medium hat dann drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen. Auf diese Ebenen bezogen hat die Energiefunktion die Form

$$(238) \quad 2W = \lambda(a + b + c)^2 + L(f^2 - bc) + M(g^2 - ca) + N(h^2 - ab),$$

wo a, b, c, 2f, 2g, 2h die sechs Formänderungskomponenten sind[284]). Die Wellen, deren Verschiebungen in die Ebene der Wellenfläche fallen, folgen dann den *Fresnel*schen Gesetzen. Vgl. auch hier die Ausführungen zur Optik in V 21—23. Man bezeichnet in diesem Fall das Medium zuweilen als *Greensches Medium*.

Dieselbe Frage hat *E. B. Christoffel*[285]) von einem anderen Gesichtspunkt aus behandelt. Er untersucht zunächst den Vorgang der Ausbreitung eines unstetigen Formänderungszustandes; es zeigt sich, dass, wenn die Formänderungen und Formänderungsgeschwindigkeiten anfangs auf einen gewissen Bereich beschränkt sind, die Grenzen dieses Bereiches sich nach allen Seiten in Richtung der Normalen

(1880), p. 288; *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 90 (1881), p. 34 = Ges. Abh. 2, p. 17; *Lord Kelvin*, Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 480; 48 (1899), p. 227, 388.

283) Cambridge Phil. Soc. Trans. 7 (1839), p. 121 = Papers, p. 293. Vgl. *G. Kirchhoff*, Berlin Abh. 1876, phys. Kl., Abt. 2, p. 57 = Ges. Abh. 1, p. 352.

283a) Exerc. de math. 5 (1830) = Oeuvres (2) 9; vgl. im übrigen *Burkhardt*, Bericht, § 62.

284) Die Bezeichnung ist dieselbe wie die in IV 15, Nr. 7 (*A. E. H. Love*).

285) Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 81, 193. Siehe auch *A. E. H. Love*, London Math. Soc. Proc. (2) 1 (1903), p. 37.

mit Geschwindigkeiten ansbreiten, die gleich der Geschwindigkeit ebener Wellen in den betreffenden Richtungen sind. Wie die weitere Untersuchung der Unstetigkeitswellen zeigt, sind die drei Wellengeschwindigkeiten, die einer gegebenen Stellung der Wellenebene entsprechen, reell und jedenfalls nicht für alle Stellungen der Ebene sämtlich einander gleich. Zwei Wurzeln werden für alle Stellungen der Ebene nur dann einander gleich sein, wenn sich die Energiefunktion auf die Form reduzieren lässt

$$(239)\quad 2W = (\lambda_1 \mathrm{a} + \lambda_2 \mathrm{b} + \lambda_3 \mathrm{c})^2 + \mu(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{bc} - 2\mathrm{ca} - 2\mathrm{ab} + 4\mathrm{f}^2 + 4\mathrm{g}^2 + 4\mathrm{h}^2).$$

Hierin ist der Fall der Isotropie ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) eingeschlossen.

Konstruiert man ein System von Ebenen, deren Abstände vom Koordinatenanfang den entsprechenden Wellengeschwindigkeiten proportional sind, so ist ihre Enveloppe eine aus drei Schalen bestehende Fläche, die sogenannte „Zentral"- oder „Wellenfläche". In einem isotropen Medium artet sie in drei konzentrische Kugeln aus, von denen die beiden inneren zusammenfallen. Die Singularitäten dieser Wellenfläche werden von *Christoffel* im einzelnen diskutiert. Vgl. übrigens auch hierzu die Darstellung bei *O. Tedone* in IV 24, Nr. 17.

8b. **Wellen in einem begrenzten festen Körper. Reflexion.** α) Die *Reflexion ebener Wellen* an der ebenen Grenzfläche eines isotropen festen Körpers wurde von *G. Green*[286]) behandelt. Ihm verdankt man die Feststellung, dass eine aus Längsschwingungen bestehende einfallende Welle zu zwei reflektierten Wellen Anlass giebt, von denen die eine longitudinal, die andere transversal ist, und entsprechend, wenn die einfallenden Schwingungen transversal sind. Die Untersuchungen von *Green*, die zur Optik in Beziehung stehen, befassen sich insbesondere mit der Reflexion an der gemeinsamen Grenzfläche zweier Medien, die sich nur in der Dichte unterscheiden. Von grösserem Interesse vom Gesichtspunkt des gegenwärtigen Referats ist das Problem der Reflexion an einer freien Oberfläche[287]); es ergiebt sich, dass eine Dilatationswelle ausser im Falle senkrechten Einfalls zu zwei reflektierten Wellen Anlass giebt; einer Schiebungswelle, bei der die Schwingungen in der Einfallsebene vor sich gehen, entsprechen ebenfalls zwei reflektierte Wellen, ausser wenn der Einfallswinkel die speziellen Werte 0^0 und 45^0 hat. Eine Welle, deren Schwingungen

286) Cambridge Trans. 7 (1838), p. 1 = Papers, p. 245; vgl. *Lord Kelvin*, Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 414, 500.

287) *H. Poincaré*, Élasticité, chap. 6.

senkrecht zur Einfallsebene sind, giebt zu einer einzigen reflektierten Welle von demselben Charakter Anlass [288]).

β) Die *Fortpflanzung von Oberflächenwellen* längs der ebenen Grenzfläche eines isotropen festen Körpers hat Lord *Rayleigh* [289]) behandelt; bei diesen Wellen nimmt die Amplitude mit wachsender Tiefe nach dem Gesetz einer Exponentialfunktion ab. Für $\lambda = \infty$ ist die Wellengeschwindigkeit gleich $0{,}9554\, b$, für $\lambda = \mu$ ist sie gleich $0{,}9194\, b$, wo $b = \sqrt{\mu/\varrho}$. Wellen, die durch einen isolierten Impuls an der Oberfläche eines unendlichen isotropen Halbraumes hervorgerufen werden, hat *H. Lamb* [290]) in Hinblick auf die Theorie der Erdbeben untersucht. Er findet, dass der Hauptcharakter der Erscheinung in grosser Entfernung von dem Störungszentrum durch eine Ringwelle gegeben ist, die dieselben Eigenschaften und Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, wie die gerade genannten, von Lord *Rayleigh* betrachteten Wellen. Der Einfluss der Schwere [291]) auf derartige Wellen (die ebene Grenzfläche als horizontal vorausgesetzt) stellt sich für solche Werte der Wellenlänge und der elastischen Konstanten, wie sie im Falle der Erde vorkommen dürften, als ziemlich klein heraus.

γ) Das nächsteinfache Problem ist das der *Schwingungen einer unendlichen Schicht*, die von zwei parallelen freien Ebenen begrenzt wird. Die zweidimensionalen Schwingungen zerfallen in zwei Klassen. Bei denen der ersten Klasse ist die Mittelfläche eine Symmetrieebene und die Schwingungen ähneln (wenn die Wellenlänge gross ist gegen die Dicke [292])) den Dehnungsschwingungen dünner Platten. Bei den Schwingungen der anderen Klasse befindet sich die Mittelfläche in Wellenbewegung, und die Schwingungen erhalten den Charakter von Biegungsschwingungen.

δ) In der Theorie der *Wellen in einem zylindrischen Stabe* [293]) werden die Gleichungen auf Zylinderkoordinaten (r, θ, z) transformiert und die Verschiebungskomponenten als Funktionen von r, multi-

---

288) Die Gesetze der Reflexion von Unstetigkeitswellen an der gemeinsamen Grenzfläche zweier krystallinischen Medien werden von *E. B. Christoffel* loc. cit. untersucht.

289) London Math. Soc. Proc. 17 (1885), p. 4 = Papers 2, p. 441.

290) London Phil. Trans. A 203 (1903), p. 1. Wegen der ausführlicheren Theorie der Erdbebenwellen, insbesondere auch wegen der neueren Untersuchungen sei auf VI 8 *(E. Wiechert)* verwiesen.

291) *T. J. I. Bromwich*, London Math. Soc. Proc. 30 (1899), p. 98.

292) *Lord Rayleigh*, London Math. Soc. Proc. 20 (1889), p. 225 = Papers 3, p. 249.

293) *L. Pochhammer*, J. f. Math. 81 (1876), p. 324.

pliziert mit einem Faktor vom Typus $e^{i(\sigma t + kx)} \cos s\theta$, angesetzt. Zwei Fälle sind besonders wichtig, nämlich erstens der, bei dem $s = 0$ und die Bewegung demgemäss von θ unabhängig ist, und zweitens der Fall $s = 1$. Ist die Wellenlänge $(2\pi/k)$ gross im Vergleich zum Radius (c), so liefern die Schwingungen im ersten Falle Longitudinalwellen (Nr. **3** a), und in erster Annäherung erhält man den üblichen Ausdruck $\sqrt{E/\varrho}$ für die Wellengeschwindigkeit. Eine zweite Annäherung ergiebt[294])

$$\sqrt{E/\varrho}\,(1 - \tfrac{1}{4}\eta^2 k^2 c^2),$$

wo η die Poissonsche Konstante. Im Falle $s = 1$ ist die Bewegung für hinreichend grosse Wellenlängen den Biegungsschwingungen (Nr. **3** b) eines Stabes ähnlich, und in erster Annäherung kommt man auf die für sie geltende Formel zurück; es lässt sich dann auch eine zweite Annäherung erzielen[295]).

8c. **Normalschwingungen eines endlichen festen Körpers. Schwingungen einer Kugel.** α) Die analytische Theorie der freien Schwingungen eines festen Körpers von endlichen Abmessungen gestaltet sich nach den in Nr. **1** gezeichneten Richtlinien, wozu insbesondere die Ausführungen von *O. Tedone* in IV 24, Nr. **15** zu vergleichen sind. Wie sich beweisen lässt, sind die Frequenzen der Normalschwingungen sämtlich reell[296]) und bilden jedenfalls eine endlose steigende Wertfolge; sind ferner u_r, v_r, w_r und u_s, v_s, w_s die Verschiebungskomponenten in zwei Normalschwingungen von verschiedener Frequenz, so gilt die Orthogonalitätsbeziehung[296])

$$\iiint \varrho\,(u_r u_s + v_r v_s + w_r w_s)\,dx\,dy\,dz = 0. \tag{240}$$

Eine von *G. Lamé*[297]) vertretene Ansicht, wonach die freien Schwingungen eines begrenzten isotropen festen Körpers in zwei Klassen zerfallen: solche, bei denen die Rotationen ξ, η, ζ verschwinden, und solche, bei denen $\Theta = 0$, ist irrig[300]).

β) Der einzige Körper, für den die Normalschwingungen vollständig

---

294) Dasselbe Ergebnis wurde, unabhängig von *Pochhammer* sowie von *C. Chree*, Quart. J. of math. 21 (1886), p. 287, und (etwas verallgemeinert) 24 (1890), p. 340, erhalten.

295) Die Normalschwingungen eines Zylinders von endlicher Länge sind bisher noch nicht genau ermittelt worden. Der besondere Fall der Drillungsschwingungen gestaltet sich sehr einfach.

296) *A. Clebsch*, Elastizität, § 20; *H. Poincaré*, Élasticité, p. 102.

297) Élasticité, 11me leçon.

erforscht sind, ist die *Kugel.* Am klarsten drücken sich die Ergebnisse mittelst der in Gleichung (188) definierten Funktionen $\psi_n(\zeta)$ aus.

Der einfachste Fall ist der der rein radialen Schwingungen[298]), wo die Verschiebung mit $\psi_1(hr)$ proportional ist und die Frequenzengleichung folgendermassen lautet:

$$(241)\quad \begin{cases} 4(\lambda + 2\mu)\psi_0'(ha) + \mu h a \psi_0(ha) = 0, \\ \sigma^2 = (\lambda + 2\mu)h^2/\varrho. \end{cases}$$

Die niedersten Wurzeln sind im Falle $\lambda = \mu$[299])

$$ha/\pi = 0{,}8160; \quad 1{,}9285; \quad 2{,}9539; \quad \ldots.$$

Die allgemeine Klassifikation der Normalschwingungen der Kugel gaben *P. Jaerisch*[299]) und *H. Lamb*[300]). Liegt der Koordinatenanfang im Mittelpunkt, so hat man zunächst eine Klasse von Schwingungen, die man als transversal bezeichnen könnte, da sie $xu + yv + zw = 0$ machen, nämlich

$$(242)\quad \begin{cases} u = \psi_n(kr)\left(y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_n, \\ v = \psi_n(kr)\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\varphi_n, \quad k^2 = \sigma^2\varrho/\mu, \\ w = \psi_n(kr)\left(x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_n, \end{cases}$$

wo φ_n eine räumliche Kugelfunktion n^{ten} Grades; die Frequenzengleichung lautet:

$$(243)\quad ka\psi_n'(ka) + (n-1)\psi_n(ka) = 0.$$

Die Teilchen, die auf irgend einer mit der Oberfläche konzentrischen Kugel liegen, schwingen längs der Konturlinien der Kugelflächenfunktionen φ_n/r^n. Im Falle $n = 1$ schwingt jede dieser Flächen als Ganzes. — Die andere Klasse von Normalschwingungen ist gegeben durch die Formeln[300])

$$(244)\quad \begin{cases} \Theta = \psi_n(hr)\omega_n, \\ u = -\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + (n+1)\psi_{n-1}(kr)\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x} - n\psi_{n+1}(kr)k^2 r^{2n+3}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ v = -\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + (n+1)\psi_{n-1}(kr)\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y} - n\psi_{n+1}(kr)k^2 r^{2n+3}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ w = -\dfrac{1}{h^2}\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + (n+1)\psi_{n-1}(kr)\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial z} - n\psi_{n+1}(kr)k^2 r^{2n+3}\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\varphi_n}{r^{2n+1}}, \\ h^2 = \sigma^2\varrho/(\lambda + 2\mu), \quad k^2 = \sigma^2\varrho/\mu, \end{cases}$$

---

298) Zuerst von *S. D. Poisson*, Paris Mém. 8 (1829), p. 405, für den Fall $\lambda = \mu$ behandelt; vgl. *A. Clebsch,* loc. cit. § 19.

299) J. f. Math. 88 (1879), p. 131; die Untersuchung ist in Polarkoordinaten durchgeführt.

300) *H. Lamb,* London Math. Soc. 13 (1882), p. 189.

wo ω_n, φ_n räumliche Kugelfunktionen, deren Verhältnisse mitsamt den entsprechenden Werten von σ für die verschiedenen Normalschwingungen durch die Bedingung bestimmt sind, dass die Oberfläche $r = a$ spannungsfrei ist. Die Schwingungen sind teils radial, teils transversal, und zwar sind die transversalen Komponenten senkrecht zu den Kegeln $\varphi_n/r^n = \text{const.}$ Im Falle der Inkompressibilität ($\lambda = \infty$) vereinfacht sich die Frequenzengleichung, und die niederen Wurzeln berechnen sich für $n = 1$, $n = 2$ ohne Schwierigkeit [300]. Die wichtigste Gruppe ergiebt sich für $n = 2$, insbesondere wenn φ_n eine einfache Kugelfunktion darstellt. Die niederste Wurzel ist dann $ka/\pi = 0{,}823$; für $\lambda = \mu$ beträgt sie ungefähr 0,840. Die Schwingung ist symmetrisch in Bezug auf eine Durchmesserebene, und ihre Frequenz ist die kleinste von allen Eigenfrequenzen der Kugel [301] [302].

Die Methoden lassen sich auf den Fall einer von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Schale ausdehnen; die numerischen Rechnungen werden jedoch, ausser für eine sehr dünne Schale (Nr. **5**c) ziemlich verwickelt.

Den Einfluss der wechselseitigen Gravitation auf die Schwingungen einer gleichförmigen Kugel hat (unter Annahme der Inkompressibilität) *T. J. I. Bromwich* [291] untersucht. Er findet, dass die Frequenzen, ausgenommen die der Transversalschwingungen, sämtlich gesteigert werden [303].

Für Kreiszylinder und zylindrische Schalen giebt es eine Theorie der (zum Querschnitt parallelen) zweidimensionalen Schwingungen [304]. Die Ergebnisse sind denen für die Kugel analog, aber einfacher.

8d. Theorie des physikalischen Stosses. Die klassische Theorie des Stosses, die von *Huygens*, *Wallis*, *Wren* und *Newton* herrührt (vgl. IV 6, Nr. **52** (*P. Stäckel*), gründet sich auf die Gleichungen

$$(245)\qquad \begin{cases} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ \qquad v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2), \end{cases}$$

---

301) Diagramme der Bewegungslinien für diese und einige andere Fälle giebt *H. Lamb,* loc. cit.

302) Bezüglich der erzwungenen Schwingungen, die von periodischen Oberflächenspannungen oder Massenkräften herrühren, siehe *A. E. H. Love,* London Math. Soc. 19 (1888), p. 170; *C. Chree,* Cambridge Phil. Soc. Trans. 16 (1896), p. 14.

303) Die Schwingungen einer der Schwere unterworfenen, kompressiblen Kugel hat *Lord Rayleigh,* London Roy. Soc. Proc. A 77 (1906) mit besonderer Berücksichtigung der Stabilitätsfragen untersucht.

304) *C. Chree,* Cambridge Trans. 14 (1887), p. 250; *P. Jaerisch,* J. f. Math. 104 (1889), p. 177; *A. B. Basset,* London Math. Soc. Proc. 21 (1889), p. 53.

von denen die erste die Erhaltung der Bewegungsgrösse ausdrückt, die zweite als Erfahrungssatz angenommen wird (e ist der sogenannte Restitutionskoeffizient). Als Resultat des Stosses tritt ein augenscheinlicher Energieverlust vom Betrage

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(v_1-v_2)^2$$

auf. Derselbe verschwindet, wenn $e=1$; setzt man umgekehrt voraus, dass kein Energieverlust eintritt, so wird man auf das Gesetz von der Erhaltung der Relativgeschwindigkeit geführt: $v_2'-v_1'=v_1-v_2$.

Die Formeln (245) lassen sich auch aus der Annahme ableiten, dass die Formänderungen elastischer Körper den Spannungen proportional sind, vorausgesetzt, dass man noch die Stossdauer als konstant annimmt[305]).

Eine rationellere Theorie des Stosses haben verschiedene Autoren[306]) für den offenbar einfachsten Fall zu entwickeln versucht, dass zwei gleichförmige zylindrische Stäbe in der Längsrichtung auf einander stossen. Die zusammenprallenden Flächen werden als genau eben vorausgesetzt, so dass die beiden Stäbe während der Berührung als *ein* Stab behandelt werden können; die Theorie gründet sich dann auf die Annahme longitudinaler Wellen, die mit der Geschwindigkeit $\sqrt{E/\varrho}$ fortschreiten (Nr. **3**a). Sind die Stäbe aus demselben Material und von gleichem Querschnitt, so sind die Gleichungen (245) für $e=m_1/m_2$ erfüllt, wenn m_1 die Masse des kürzeren Stabes. Die Zeit, während der die Stäbe Druck auf einander ausüben, ist dabei gleich der Zeit, in der eine Welle die Länge des kürzeren Balkens zweimal durchläuft, mithin für dieselben zwei Stäbe konstant. Der augenscheinliche Energieverlust wird dadurch wett gemacht, dass der längere Stab in einem Zustand der Schwingung verharrt.

Da diese Schlüsse betreffend den Wert von e und die Konstanz der Stosszeit durch das Experiment keineswegs bestätigt werden[307]), so hat man andere Stosstheorien vorgeschlagen. Die „statische" Theorie des Stosses von *H. Hertz*[308]) geht aus von der Annahme, dass die Stossdauer gross sei im Vergleich zu der Zeit, die die

305) Am einfachsten durch Betrachtung der Bewegung relativ zu den Massenmittelpunkten; vgl. *Thomson-Tait,* § 302.

306) *B. de Saint-Venant,* J. de math. (2) 12 (1867), p. 237; *F. Neumann,* Vorl. über die Theorie der Elastizität, Leipzig 1895, p. 332.

307) Siehe insbesondere *W. Voigt,* Ann. Chem. Phys. 19 (1883), p. 44, der hier auch eine verbesserte Theorie entwickelt.

308) J. f. Math. 92 (1882), p. 156 = Ges. Werke 1, Leipzig 1895, p. 155. Vgl. auch die Darstellung in IV 25, Nr. **15**b *(O. Tedone-A. Timpe).*

elastischen Wellen brauchen, um die grössten Abmessungen der zusammenstossenden Körper zu durchlaufen[309]) Die Beziehung zwischen den Drucken, mit denen die sich berührenden Flächen auf einander wirken, und der Deformation in der unmittelbaren Umgebung ist dann praktisch dieselbe, wie wenn es sich um das statische Problem handelte. Nun ergiebt sich, dass wenn auf ein begrenztes Stück einer ebenen Oberfläche eines elastischen Körpers ein normaler Druck p wirkt, die Normalverschiebung u in einem beliebigen Punkte dieser Oberfläche gegeben ist durch die Formel[310])[311])

(246) $$u = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \iint \frac{p\,dS}{r},$$

wo r der Abstand des Flächenelementes dS von dem Punkte, für den der Wert von u gesucht wird. Für einen Gesamtdruck P, der über ein kreisförmiges Flächenstück nach dem Gesetz

$$p = \frac{3P}{2\pi a^3}\sqrt{a^2 - r^2}$$

verteilt ist, findet man

$$u = \frac{3}{16}\,\frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}\,\frac{P}{a}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right), \quad [r < a].$$

Diese Ergebnisse lassen sich ohne merklichen Fehler auf den Fall krummer Flächen anwenden, vorausgesetzt, dass die Haupt krümmungen klein sind gegen $1/a$. Es zeigt sich, dass, wenn der wechselseitige Druck zwischen zwei (nicht notwendig aus gleichem Material bestehenden) Kugeln gleich P ist, die Mittelpunkte um einen mit $P^{\frac{2}{3}}$ proportionalen Betrag gegen einander genähert sind und dass der Radius des kreisförmigen Berührungsflecks mit $P^{\frac{1}{3}}$ proportional ist. Wendet man diese Betrachtungen auf den Fall des Stosses an, so ergiebt sich, dass die Stossdauer sich wie $(v_1 - v_2)^{-\frac{5}{2}}$ verhält, also unbegrenzt wächst, wenn die relative Geschwindigkeit vor dem Stoss abnimmt[308]). Der Natur der zu Grunde gelegten Voraussetzungen zufolge tritt Energieverlust nicht ein; die Verhältnisse werden also dadurch geschildert, dass in (245) $e = 1$ zu setzen ist.

---

309) Dies hat genauer Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (6) 11 (1906), p. 283, untersucht.

310) Das statische Problem wurde zum ersten Mal gelöst von *J. Boussinesq,* Paris C. R. 86 (1878), p. 1260; 87 (1878), p. 402; 88 (1879), p. 741.

311) Der Fall eines elliptischen Berührungsfleckes wird gleichfalls von *H. Hertz,* loc. cit., betrachtet.

(Abgeschlossen im Juli 1906.)

IV 27. FESTIGKEITSPROBLEME IM MASCHINENBAU.

Von

TH. v. KÁRMÁN

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

13. Stabilitätsprobleme.

a) Stabilität des Gleichgewichts.

b) Stabilität rotierender Wellen.

Litteratur.

1. Lehrbücher.

C. Bach, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1889/90; 5. Aufl., Berlin 1905.

— Die Maschinenelemente, Stuttgart 1881; 10. Aufl., Leipzig 1908.

J. A. Ch. Bresse, Cours de mécanique appliquée, 3 vols, Paris 1859/65.

A. Brauer, Festigkeitslehre, Leipzig 1905.

W. H. Burr, Elasticity and resistance of the materials of engineering, 6. ed., New-York 1903.

A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862.

— Théorie de l'élasticité des corps solides, traduit par *B. de St. Venant* et *A. Flamant*, avec des notes de *B. de St. Venant*, Paris 1883.

Ch. Duguet, Déformation des corps solides, 2 vols, Paris 1882—5.

J. A. Ewing, The strength of materials, Cambridge 1899, 2. ed. Cambridge 1903.

A. Flamant, Stabilité des constructions. Résistance des matériaux. (Enc. des travaux publics), Paris 1886, 2. éd. 1897.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Leipzig, Bd. 3: Festigkeitslehre, 1897, 3. Aufl. 1910. Bd. 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie, 1907.

J. Goodman, Mechanics applied to engineering, New-York 1899.

F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, 2. Aufl. des Werkes: Die Festigkeitslehre, Berlin 1866.

A. E. H. Love, Mathematical treatise on elasticity, 2 vols., Cambridge 1892/93; 2 ed. Cambridge 1906; deutsch von *A. Timpe*, Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907.

M. Merriman, Mechanics of materials, New York 1885, 10. ed. New York 1905.

A. Morin, Résistance des matériaux, Paris 1853, 2. éd. Paris 1857.

L. Navier, Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, 3 éd. avec des notes et des appendices de *B. de St. Venant*, 2 vols, Paris 1864.

J. Poncelet, Cours de mécanique industrielle, Metz 1829, 3. éd. (Introduction à la mécanique industrielle physique ou expérimentale) Paris 1870.

W. J. M. Rankine, A manual of applied mechanics, London 1858, 15. ed. London 1898.

J. Résal, Résistance des matériaux (Enc. des travaux publics), Paris 1898.

A. Ritter, Lehrbuch der techn. Mechanik, Hannover 1864; 7. Aufl., Leipzig 1896.

L. v. Tetmajer, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Zürich 1889, 3. Aufl. Wien 1905.

C. W. Unwin, Elements of machine designe, London 1870, 11. ed. London 1901/2.

J. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 2 Bde., Braunschweig 1850/1, 5. Aufl., 1.—2. Teil, 3 Bde. 1875—1887.

E. Winkler, Die Lehre von der Elastitität und Festigkeit, Prag 1867.

2. Monographien.

C. Bach, Abhandlungen und Berichte, Stuttgart 1897.

P. Barlow, A treatise on the strength of timber, cast iron, malleable iron and other materials, London 1837.

A. Castigliano, Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern, deutsch von *R. Totz*, Wien 1888.
A. Considère, Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions, Paris 1886; auch Annales des ponts et chaussées 9 (1885) u. 11 (1896).
Ch. A. Coulomb, Essai sur une application des règles de maximis et minimis, Paris, Mém. prés. par div. sav. 7 (1776) [1773].
E. Hodgkinson, Experimental researches on the strength of pillars, Lond. Phil. Trans. 130 (1840).
G. Lamé et *E. Clapeyron*, Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes, J. für Math. 7 (1831) und Paris, Mém. prés. par div. sav. 4 (1833) [1828].
O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906.
F. Reuleaux, Konstruktion und Berechnung der für den Maschinenbau wichtigsten Federarten, Winterthur 1857.
— Abriss der Festigkeitslehre für den Maschinenbau, Braunschweig 1904.
B. de St. Venant, Mémoire sur la torsion des prismes, Paris, Mém. prés. par div. sav. 14 (1857).
A. Stodola, Die Dampfturbinen, Berlin 1903, 3. Aufl. Berlin 1905.
L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Biegungsfestigkeit, Zürich 1896, 3. Aufl. Wien 1903.
Th. Tredgold, A practical essay on the strength of cast iron, London 1822. 5. ed. with notes of *E. Hodgkinson*, 2 vols, London 1842—6.

3. Zeitschriften.

Annales des mines. Paris 1817 ff. — Fortsetzung von: Journal des mines, Paris 1794 ff.
Annales des ponts et chaussées. Paris 1831 ff.
Bulletin de la société d'encouragement de l'industrie nationale. Paris 1802 ff.
Centralblatt der Bauverwaltung. Berlin 1881 ff.
Civilingenieur. Freiberg 1853 ff. Fortsetzung von: Der Ingenieur. Freiberg 1848 ff.
Dinglers polytechn. Journal. Stuttgart 1874 ff. Fortsetzung von: Polytechn. Journal, Stuttgart 1820 ff.
Engineering. London 1866 ff.
Jahrbücher der Schiffbautechn. Gesellschaft. Berlin 1900 ff.
Le Génie civil. Paris 1880 ff.; früher: Annales du Génie civil, Paris 1862 ff.
Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Berlin 1901 ff.
Mitteilungen aus den königl. Versuchsanstalten Berlin. Berlin 1883 ff.
Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der techn. Hochsch. in München. München 1874 ff.
Minutes of proceedings of the Institution of Civil Engineers. London 1837 ff.
Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Birmingham 1847 ff.
Revue de Mécanique. Paris 1897 ff.
Schiffbau. Berlin 1899 ff.
Schweizerische Bauzeitung. Zürich 1883 ff. Fortsetzung von: Die Eisenbahn, Zürich 1874 ff.
Transactions of the Institution of Naval Architects. London 1860 ff.
— of the American Society of Civil Engineers. New-York 1852 ff.
— of the American Society of Mechanical Engineers. New-York 1880 ff.

Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. Berlin 1822 ff.

Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover. Hannover 1855. Von 1896 an: Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen.

— (bis 1892 Wochenschrift) des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines. Wien 1876 ff.

— des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1856 ff.

Einleitung. Die *Festigkeitsberechnung der Maschinenkonstruktionen* fusst einerseits auf der *mathematischen Elastizitätstheorie*, andererseits auf der *physikalischen Festigkeitslehre.* Die erstere (siehe Art. IV 24 u. 25 *O. Tedone* und *O. Tedone-A. Timpe*) soll uns zur Kenntnis der *Spannungszustände* verhelfen, welche unter der Wirkung der zu erwartenden Kräfte in den einzelnen Konstruktionsteilen entstehen, während die andere (siehe unten den Art. Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre von *L. Prandtl*) darüber Aufschluss zu geben hat, ob der so ermittelte Spannungszustand genügende *Sicherheit* gewährleistet.

Die in der Praxis vorkommenden Konstruktionsteile sind meistens viel komplizierter gestaltet, die äusseren Kräfte viel mannigfaltiger verteilt, als dass man — ausser in wenigen Ausnahmefällen — auf eine strenge Integration der Gleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie rechnen könnte; man ist daher lediglich auf *Näherungstheorien* angewiesen. Da die Rücksicht auf Festigkeit zumeist gerade bei solchen Konstruktionsteilen eine Rolle spielt, bei denen wenigstens *eine* Abmessung gegen die übrigen als klein betrachtet werden kann, so kommt man in vielen Fällen schon mit Hilfe der vereinfachten Theorie der dünnen *Stäbe*, *Seile*, *Platten*, *Schalen* usw. zu genügend genauen Resultaten. Gegen eine Übertreibung der mathematischen Genauigkeit spricht schon der Umstand, dass auch die äusseren Kräfte sehr oft nur schätzungsweise in Rechnung gesetzt werden können. Immerhin bleibt die Aufgabe übrig, den *Anwendungsbereich* und *Genauigkeitsgrad* der Näherungstheorien zu prüfen und zwar entweder *durch Vergleich mit der genaueren Rechnung* in einfachen typischen Fällen, für welche diese vollständig und streng durchführbar ist, oder durch unmittelbare *Messung der Formänderungen*[1]). Es mag bemerkt werden, dass aus Bruchvorgängen auf die Richtigkeit der Näherungstheorien nicht unmittelbar geschlossen werden darf, da diese nur innerhalb der Elastizitätsgrenze Geltung haben, während zwischen der Elastizitäts-

1) In neuerer Zeit sind auch optische Versuche zur Untersuchung der Spannungsverteilung herangezogen worden. Vgl. Fussnote 73).

grenze und dem Bruch meist grosse nicht elastische Formänderungen liegen; indessen ist dieser Umstand oft übersehen worden.

In dem vorliegenden Artikel soll vorzugsweise über jene Näherungstheorien berichtet werden, welche in der Berechnung von Maschinenkonstruktionen zur Anwendung gelangen; es war jedoch kaum zu vermeiden, dass einzelne Fragen berührt werden, die — als zu den gemeinsamen Grundlagen der technischen Festigkeitslehre gehörend — auch in der Festigkeitslehre der Baukonstruktionen Platz finden könnten. Andererseits musste manches wiederholt werden, was schon mehr oder weniger vollständig in den Artikeln über mathematische Elastizitätstheorie behandelt wurde. Während jedoch in den letzteren der Gesichtspunkt vorherrschend war, *strenge Lösungen* zu finden, steht in den folgenden Ausführungen die Frage nach der *Brauchbarkeit der annähernden Lösungen* im Vordergrund.

In Nr. **1** sind die grundlegenden Annahmen und Festsetzungen zusammengestellt, die zur Beurteilung der Sicherheitsfrage vorgeschlagen und angewendet wurden, alsdann werden in Nr. **2**—**10** ruhende Konstruktionsteile unter *statischer* (ruhender) *Belastung* behandelt; die Resultate gelten in erster Annäherung auch für bewegte Körper und wechselnde Belastung, falls die Bewegung bzw. die Änderung der Belastung genügend langsam vor sich geht, um die Trägheitskräfte vernachlässigen zu können. Eine zweite Annäherung erhält man, indem man jene Trägheitskräfte berücksichtigt, die von der Bewegung des als starr gedachten Körpers herrühren. Die entsprechenden Zusatzspannungen bezeichnen wir als *kinetostatische Beanspruchung* (Nr. **11**). Eine genauere Theorie hat ausser diesen Kräften auch die von der elastischen Deformation herrührenden Trägheitskräfte zu berücksichtigen; diese Ausführung geben wir unter dem Titel *Beanspruchung durch Schwingungen* (Nr. **12**).

Die in Nr. **2**—**12** berichteten Untersuchungen prüfen die Sicherheit der Konstruktionsteile lediglich daraufhin, ob die Beanspruchung innerhalb ihrer zulässigen Grenzen bleibt. Dies ist jedoch für die Sicherheit nur dann hinreichend, wenn das Gleichgewicht oder der Bewegungszustand stabil ist. Aus diesem Grunde sind die *Stabilitätsuntersuchungen* der Elastizitätstheorie (IV 25, *Tedone-Timpe*, Nr. **21**) für die Festigkeitslehre von hoher Bedeutung. Die Anwendungen dieser Stabilitätsuntersuchungen fassen wir unter Nr. **13** zusammen.

In dem vorliegenden Artikel sind die in der technischen Litteratur üblichen Bezeichnungen angenommen worden. Zum Vergleich mit den Bezeichnungen der mathematischen Elastizitätstheorie, welche namentlich in den Artikeln IV 24—26 benutzt sind, dient die folgende Zusammenstellung:

		Mathematische Litteratur	Technische Litteratur
Spannungs-komponenten	in rechtw. Koordinaten	$X_x, Y_y, Z_z; X_y, Y_z, Z_x$	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
	in Zylinder-koordinaten	$R_r, \Omega_\vartheta, Z_z; R_\vartheta, \Omega_z, Z_r$	$\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z; \tau_{r\vartheta}, \tau_{\vartheta z}, \tau_{zr}$
Form-änderungs-komponenten	in rechtw. Koordinaten	$x_x, y_y, z_z; x_y, y_z, z_x$	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z; \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
	in Zylinder-koordinaten	$r_r, \vartheta_\vartheta, z_z; r_\vartheta, \vartheta_z, z_r$	$\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_z; \gamma_{r\vartheta}, \gamma_{\vartheta z}, \gamma_{zr}$
Beziehungen zwischen Elastizitätskonstanten		$E = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}$, Elastizitätsmodul $m = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda}$, Poissonsche Verhältniszahl $G = \mu = \frac{m}{2(m+1)} E$, Gleitmodul	

1. Grundlegende Annahmen. Man bezieht im allgemeinen die Sicherheit eines Spannungszustandes auf die *Bruchgrenze* oder, falls der Bruch erst nach erheblichen bleibenden Formänderungen erfolgt[2]) bei bildsamen Stoffen auf die *Elastizitätsgrenze* des Materials [3]). Beide Grenzen sind als Gesamtheit von *Grenzzuständen* zu verstehen, wobei allerdings stillschweigend vorausgesetzt wird, dass für den Beginn des Bruches resp. der bleibenden Formänderungen nur der Spannungszustand in dem Punkte selbst massgebend ist. Das Grundproblem, wodurch diese Grenzzustände bedingt werden, welche Funktion der Spannungskomponenten man daher als Maass der Beanspruchung anzusehen hat, fand bisher keine endgültige Erledigung. Über die

2) Man nennt ein Konstruktionsmaterial *spröde,* falls bis zum Bruche keine erheblichen Dehnungen auftreten, im entgegengesetzten Falle *bildsam* oder *zähe.* Unter den wichtigsten Konstruktionsmaterialien dürfen Gusseisen, Bausteine, Beton, Zement als spröde, schmiedbares Eisen, Stahl, Kupfer und die meisten Kupferlegierungen als bildsam bezeichnet werden. Leder, Hanf, Holz lassen sich in diese Gruppen nicht richtig einordnen. Vgl. *C. Bach,* Maschinenelemente, 10. Aufl., Leipzig 1908, Einleitung.

3) Man unterscheidet eine *Proportionalitäts*grenze (Grenze für das lineare Spannungsgesetz), eine *Elastizitäts-* und eine *Fliessgrenze* (ev. obere und untere Fliessgrenze). Da bleibende Formänderungen mit genügend genauen Messinstrumenten bei den kleinsten Belastungen wahrzunehmen sind, ist man übereingekommen, als Elastizitätsgrenze jenen Zustand zu bezeichnen, in welchem die bleibende Änderung $^1/_{1000}$ v. H. beträgt, als Fliessgrenze dagegen jenen Zustand, bei dem zuerst ohne wesentliche Spannungserhöhung grosse plastische Formänderungen vor sich gehen. Vgl. Art. unten *Prandtl.*

diesbezüglichen Untersuchungen wird im Art. *Prandtl* berichtet; an dieser Stelle wollen wir nur die üblichsten Annahmen zusammenstellen, welche man zu Grundlagen der praktischen Berechnung vorschlug und teilweise auch noch heute benützt:

a) Nach der ältesten Annahme, die lediglich von *Lamé* und *Clapeyron*[4]) herrührt und die auch von *A. Clebsch*[4]) übernommen wurde, ist für die Grenzzustände nur die *grösste der drei Hauptspannungen* maassgebend. Nach dieser Annahme existieren für jeden Stoff zwei charakteristische Werte: die *Zug-* und die *Druckfestigkeit* und diese sollen unabhängig von den übrigen Hauptspannungen die Grenzzustände bestimmen. Dies trifft nach der Erfahrung *nicht* zu.

b) Nach *J. V. Poncelet*[5]) und *B. de St. Venant*[6]) soll die *grösste positive Hauptdehnung* die Grenzzustände festlegen. Daraus folgt, dass der grösste der drei Ausdrücke $\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$ (σ_1, σ_2, σ_3 Hauptspannungen, m Verhältniszahl der Querkontraktion zur Längsdehnung bei einfachem Zug) für alle Grenzzustände einen konstanten positiven Wert annimmt. Die Grösse $\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$ heisst die *reduzierte Spannung* und wird in den meisten technischen Lehrbüchern als *Maass der Beanspruchung* betrachtet. Der den Grenzzuständen entsprechende Wert der reduzierten Spannung heisst die *gefährliche red. Spannung*; man setzt zumeist einen Bruchteil derselben, als *zulässige red. Spannung* fest. Das Verhältnis der beiden wird *Sicherheitsfaktor* genannt.

c) Nach einer dritten Annahme, die in ihrer allgemeinsten Form von *O. Mohr*[7]) entwickelt wurde, sind für die Grenzzustände nur die *zwei extremen Hauptspannungen* maassgebend; auf die Grösse der mittleren Hauptspannung käme es dabei gar nicht an. Die Grenzzustände sind danach im allgemeinen durch eine Beziehung $f(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ festgelegt (σ_1 und σ_3 die beiden extremen Hauptspannungen), welche

---

4) *G. Lamé* und *E. Clapeyron*, Paris, Mém. prés. par div. savants 4 (1833) [1828], p. 465 = J. f. Math. 7 (1831), p. 150. *A. Clebsch*, Theorie der Elastizität, Leipzig 1862, p. 134.

5) *J. V. Poncelet*, Cours de mécanique appliquée 1839 (vgl. *St. Venant*, Fussn. 6)).

6) Résumé des leçons sur l'application de la mécanique par *Navier*, 3. éd. avec des notes & des appendices de *B. de St. Venant*, Paris (1864) I, 1, p. CCI; ferner *St. Venant*, cours lithographiés (1837—8). Sowohl *Poncelet* als *St. Venant* sind der Ansicht, dass nur eine *positive* Dehnung zum Bruche führt. Später hat *F. Grashof* auch für die negative Dehnung einen Grenzwert eingeführt.

7) *O. Mohr*, Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, p. 187. Civilingen. 28 (1882), p. 112.

experimentell zu ermitteln ist. Die *Mohr*sche Annahme ist lediglich eine Verallgemeinerung der *Coulomb*schen Theorie des Bruches. *Coulomb*[8]) untersuchte die Möglichkeit der Verschiebung in einem mit Kohaesion und mit innerer Reibung (von der Art der Reibung fester Körper) behafteten Medium. Auf Grund seiner Überlegungen gelangt man zu der Bedingung $\sigma_1 - \lambda\sigma_3 = C$ (λ und C Konstanten); diese Bedingung entspricht dem wichtigsten und von *Mohr* ausführlich betrachteten Spezialfalle der obigen allgemeinen Beziehung (gerade Linie, als Umhüllende der Spannungskreise). Für vollkommen plastische Stoffe soll $\lambda = 1$ gesetzt werden; so gelangt man zur Annahme der grössten Schubspannung (maximum stress-difference theory[9])). Die *Coulomb*sche Theorie haben später besonders *Ch. Duguet*[10]), *A. Mesnager*[10]), *P. Ludwik*[10]) weiter entwickelt.

Es ist klar, dass nach dem *Coulomb-Mohr*schen Ansatz $\sigma_1 - \lambda\sigma_3$ bez. $\sigma_1 - \sigma_3$ als *Maass der Beanspruchung* und die Verhältniszahl der *zulässigen* Beanspruchung zu der *gefährlichen* gleichfalls als *Sicherheitsfaktor* betrachtet werden kann.

d) Es wurde auch vorgeschlagen — hauptsächlich von Autoren, die die Frage von dem mathematischen Standpunkte aus betrachteten[11]) —, die „*Energiedichte*", d. h. die in der Volumeinheit aufgespeicherte elastische Energie, als Maass der Beanspruchung anzusehen. Demnach wären die Grenzzustände Spannungszustände von gleicher Energiedichte und den Festigkeitsberechnungen könnte ein *zulässiger maximaler Wert der Energiedichte* zugrunde gelegt werden. Die Annahme steht jedoch mit den Erfahrungen nicht im Einklang.

Die verschiedenen Annahmen liefern für eine *gegebene Konstruktion* im allgemeinen verschiedene Sicherheitskoeffizienten oder sie führen bei *Neuberechnung* von Konstruktionsteilen zu verschiedenen Abmessungen. In den Fällen einfachster Beanspruchung — namentlich wenn nur eine der Hauptspannungen von Null verschieden ist — laufen allerdings sämtliche Annahmen auf die erste Hypothese a) hinaus, so dass man schlechthin von zulässiger Spannung sprechen kann. Bei zu-

---

8) *Ch. A. Coulomb,* Mém. prés. par divers savants, Paris 7 (1776) [1773], p. 343.

9) Vgl. *W. Thomson and P. G. Tait,* Treatise on natural philosophy I 2, Cambridge 1882, p. 422.

10) *Ch. Duguet,* Limite d'élasticité et résistance à la rupture, Paris 1885; *A. Mesnager*, Paris C. R. 126 (1898) p. 515; *P. Ludwik*, Technologische Mechanik, Wien 1910.

11) Vgl. *E. Beltrami,* Ist. Lombardo Rendiconti 18 (1885), auch Math. Ann. 57 (1903), p. 94. *R. Girtler*, Ber. Wien 116 (1907), p. 509, ferner Oest. pol. Zeitschr. (1907).

sammengesetzter Beanspruchung scheinen neuere Versuche wenigstens bei plastischen Stoffen für die *Mohr*schen Annahmen zu sprechen[12]). Für spröde Körper liegen zuverlässige Versuchsergebnisse zur Zeit noch nicht in genügender Anzahl vor. Den Versuchen, die die *Mohr*sche Auffassung bekräftigen, stehen andere gegenüber, die mit ihr im Widerspruche stehen[13]).

In der technischen Litteratur findet man immer noch die Annahme von der grössten Dehnung als die am meisten verbreitete Grundlage der Festigkeitsberechnung, vielleicht unter Einfluss der Autorität *St. Venants* und *Grashofs*, deren theoretische Entwickelungen für die späteren technischen Lehrbücher am meisten maassgebend waren. Die Grösse der zulässigen Beanspruchung hängt in erster Linie von dem Materiale ab; aber auch bei demselben Stoff macht man den Sicherheitsfaktor von der Art der Belastung, von Betriebsverhältnissen, und von vielen durch die Eigenart der Konstruktion gebotenen Umständen abhängig, die an dieser Stelle kaum erörtert werden können. Sehr wesentlichen Einfluss hat der Umstand, ob die betreffende Konstruktion der Hauptsache nach konstanter, oder wechselnder Belastung ausgesetzt wird. Man ist im Maschinenbau nach dem Vorschlage von *C. Bach*[13a]) mehr oder weniger allgemein übereingekommen, folgende drei Typen der Belastung zu unterscheiden:

α) ruhende Belastung,

β) wechselnde Belastung zwischen dem spannungslosen Zustand und einer Maximalbelastung,

γ) wechselnde Belastung zwischen zwei, dem absoluten Wert nach gleichen Grenzen mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die zulässige Beanspruchung soll mit Rücksicht auf die dynamischen Wirkungen, auf deren genaue Ermittelung zumeist verzichtet wird, und auf die durch Versuche festgestellte Verminderung[13b]) der Widerstandsfähigkeit der Materiale unter Wirkung der schwingungsartigen Belastung in den drei Fällen im Verhältnisse 3 : 2 : 1 gewählt werden. Allerdings schlägt man neuerdings in gewissen Zweigen der

12) Vgl. *J. J. Guest*, Phil. Mag. 50 (1900), p. 69. *E. L. Hancock*, Phil. Mag. 11 (1906), p. 276. ibid. 418. ibid. 15 (1908), p. 214. ibid. 16 (1908), p. 720. *W. A. Scoble*, Phil. Mag. 12 (1906), p. 533.

13) Vgl. *P. Roth*, Diss. Techn. Hochsch. Berlin 1903, Z. f. Math. Phys. 48 (1903), 285.

13a) *C. Bach*, Maschinenelemente, 10. Aufl., Stuttgart 1908. Einleitung.

13b) Zuerst zahlenmässig festgestellt durch die *Wöhler*schen Versuche, Z. f. Bauwesen 16 (1866), p. 67 und 20 (1870), p. 74; vgl. unten den Art. *L. Prandtl.*

Maschinentechnik (z. B. Automobilbau, Dampfturbinenbau, Bau von Flugapparaten usw.), wo man besonders geringes Gewicht anzustreben hat, den Weg ein, dass man nur Materiale verwendet, die sich bei speziellen dynamischen Proben als vorzüglich erweisen, für diese aber wesentlich höhere Beanspruchungen annimmt, als es nach der obigen Regel zulässig wäre.

Oft ist ausser der zulässigen Beanspruchung auch die elastische Formänderung von Belang; so wählt man z. B. bei langen Wellen die Spannung geringer als die zulässige Grenze, damit die elastische Durchbiegung einen gewissen Betrag nicht überschreite; dagegen strebt man bei federnden Maschinenteilen geradezu eine beträchtliche elastische Formänderung an und wählt zu diesem Zwecke die zulässige Spannung entsprechend höher, als sonst (vgl. Nr. **6**).

Es wurde schliesslich schon darauf hingewiesen, dass die Belastung in vielen Fällen dadurch begrenzt ist, daß bei gewisser Belastung das Gleichgewicht labil wird. (Vgl. Nr. **13**).

2. Gerade Stäbe.

Der Berechnung von Maschinenteilen, die als gerade Stäbe betrachtet werden können, wird allgemein eine einfache Näherungstheorie zugrunde gelegt, welche teilweise aus älteren Arbeiten von *Jakob Bernoulli*, *L. Euler*, *L. Navier*, teilweise aus der *St. Venant*schen Theorie der Biegung und Torsion zylindrischer Balken entstammt (siehe Art. IV 25, *Tedone-Timpe* Nr. **13**). Es wird dabei der Anwendungsbereich der den strengeren Theorien entnommenen Resultate in zweifacher Richtung erweitert:

α) die für *zylindrische* Stäbe gewonnenen Resultate werden annäherungsweise auf Stäbe mit *nicht allzu rasch veränderlichem Querschnitte* übertragen,

β) die einfache Art der Spannungsverteilung, die die strengere Theorie für Querschnitte liefert, welche *von den Balkenenden*, bzw. von den Angriffspunkten der äusseren Kräfte *genügend weit entfernt sind* (*St. Venant*sches Prinzip s. Art. IV 25, *Tedone-Timpe* Nr. **15**b) wird auch in den *Querschnitten in unmittelbarer Nähe der Last* als Annäherung angenommen.

Durch diese Übertragung der in einfachen Fällen erhaltenen Resultate auf verwickeltere Fälle kann man erreichen, dass man die Spannungsverteilung in erster Annäherung für jeden Querschnitt allein — unabhängig von der sonstigen Gestaltung des Stabes und der Verteilung der Lasten — anzugeben vermag, falls nur die *resultierende Kraft* und *das resultierende Moment* bekannt sind, welche die äusseren

Kräfte und die Auflagerkräfte in bezug auf den betreffenden Querschnitt liefern.

Es soll die X-Axe mit der Zentrallinie des Stabes (Verbindungslinie der Querschnittsmittelpunkte), die Y- und Z-Axen mit den Hauptträgheitsaxen des Querschnittes zusammenfallen, ferner sollen X, Y, Z die Komponenten der resultierenden Kraft nach diesen Axen, M_x, M_y, M_z die Komponenten des resultierenden Moments bedeuten, wobei zwischen diesen Grössen die Gleichgewichtsbedingungen

$$Y = -\frac{dM_z}{dx}$$

$$Z = \frac{dM_y}{dy}$$

bestehen müssen. Die Kraft X wird als die *Zug-* bzw. *Druckkraft*, Y und Z als die Komponenten der *Scherkraft*, M_x als das *Torsionsmoment*, M_y und M_z als die Komponenten des *Biegungsmomentes* bezeichnet. Alsdann ergeben sich folgende einfache Fälle:

a) $Y = Z = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0$ reine *Normalbeanspruchung*,

b) $X = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0$ reiner *Schub*,

c) $X = Y = Z = 0, \quad M_y = M_z = 0$ reine *Torsion*,

d) $X = Y = Z = 0, \quad M_x = 0$ reine *Biegung*.

Man bezeichnet oft diese Fälle als *einfache*, ihre Kombinationen als *zusammengesetzte Beanspruchung*.

2a. Normalbeanspruchung gerader Stäbe. Die *mittlere Zug- bzw. Druckspannung* beträgt

$$(1) \qquad \sigma_x = \frac{X}{F},$$

wo F die Querschnittsfläche bezeichnet. Diese einfache Formel dient z. B. zur Berechnung von Zug- und Druckstangen; bei den letzteren ist noch zu berücksichtigen, dass bei zunehmender Last das Gleichgewicht labil werden kann und der Stab „ausknickt“ (s. Nr. **13**).

Die Spannungen werden in genügender Entfernung von den Stabenden und bei homogenem Materiale wenig von der mittleren Spannung abweichen. Den Einfluss der Enden untersuchte *G. Filon*[14]), falls an den Enden die Querdehnung gehindert wird, wie dies z. B. bei Druckversuchen vorkommt. *G. Kirsch*[15]) untersuchte die Spannungsverteilung

---

14) *G. Filon,* Lond. Phil. Trans. (A) 198 (1902), p. 147; vgl. auch *R. Girtler,* Ber. Wien 116 (1907), p. 509.

15) *G. Kirsch,* Z. d. Ver. d. Ing. 42 (1898), p. 797.

in der Nähe eines kreisförmigen Loches, dessen Radius klein ist gegen die Breite des als dünne Lamelle gedachten Zugstabes. Die Rechnung gewährt Einsicht in die Verhältnisse, wie sie infolge Materialfehlern in Zugstäben auftreten können; die grösste Zugspannung tritt am Rande der Bohrung auf und erreicht das 3-fache der mittleren Spannung. *A. Leon*[16]) behandelt den Einfluss eines kugelförmigen Hohlraums, ferner den Fall, dass im Grundstoff ein Teilchen von anderer elastischer Beschaffenheit eingeschlossen ist.

2b. Schubbeanspruchung gerader Stäbe. Die Schubbeanspruchung ist in der Wirklichkeit stets mit Biegung verbunden, da jedoch bei kurzen Stäben die Biegungsspannungen oft klein sind gegen die Schubspannungen, so werden solche Stäbe nur „auf Schub berechnet“. Die mittlere Schubspannung beträgt

$$\tau = \frac{\sqrt{Y^2 + Z^2}}{F}. \tag{2}$$

Nach der Annahme der grössten Dehnung (vgl. Nr. 1) wird die zulässige Schubspannung[17])

$$\tau = \frac{m}{m+1}\sigma_z,$$

wo σ_z die zulässige reduzierte Zugspannung bedeutet. Nach dem *Coulomb-Mohr*schen Ansatze $\sigma_1 - \lambda\sigma_2 = C$ wird[18])

$$\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma_z\sigma_d}$$

(σ_z und σ_d die zulässige Zug- bzw. Druckspannung bei einfacher Normalbeanspruchung).

Auf reine Schubbeanspruchung werden z. B. *Niete* berechnet; Versuche zeigen jedoch, dass Gl. 2) insbesondere bei warm eingesetzten Nieten für τ zu grosse Werte liefert. *A. Considère*[19]) und *C. Bach*[19])

16) *A. Leon*, Öst. Woch. für d. öff. Baudienst (1908), p. 163 und ibid. (1909), p. 507.

17) Vgl. *Navier*, Résumé des leçons I 1, Paris 1864, p. 203.

18) *O. Mohr*, Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, p. 187. *P. Roth*, Diss. techn. Hochsch. Berlin 1903.

19) *A. Considère*, Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions, Paris 1886, auch Annales des ponts et ch. 9 (1885), p. 574 u. 11 (1886), p. 5; *C. Bach*, Z. d. Ver. d. Ing. 36 (1892), p. 1141. Maschinenelemente 10. Aufl., Leipzig 1908, p. 181; über die Festigkeit von Nietverbindungen vgl. ferner *W. C. Unwin*, Bericht über Nietverbindungen, deutsch v. *F. Löwe*, Wien 1880; *J. Barba*, Étude sur l'emploi de l'acier, Paris 1875, p. 29 ff.; *L. v. Tetmajer*, Angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Wien 1905, p. 302 ff.; *Ch. Frémont*, Étude expérimentale de rivetage 1906, Paris, Mém. publiés par la société d'encouragement; ferner unten den Art. über Eisenkonstruktionen.

nehmen an, dass für die Widerstandsfähigkeit der Nietverbindungen nicht die Festigkeit der Niete gegen Abscherung, sondern die Reibung zwischen den genieteten Blechen selbst und zwischen Nietkopf und Blech massgebend sei. [Vgl. auch IV 10b, *R. v. Mises*, Nr. 7.] Dies wird auch dadurch bestätigt, dass längere Niete, trotzdem sie im allgemeinen erhebliche Biegungsbeanspruchungen erleiden müssen, grössere Widerstandsfähigkeit besitzen, als kürzere; man kann dieses Verhalten damit erklären, dass sie infolge der bei der Erkaltung auftretenden stärkeren Zusammenziehung die Bleche stärker zusammenpressen und dadurch die Reibung vermehren.

2c. Torsion gerader Stäbe.

α) Reine Torsion zylindrischer Stäbe. Behufs der verschiedenen Lösungen des Torsionsproblems sei auf Art. IV 25 gewiesen. Zu einer direkten Ermittelung der Spannungsverteilung gelangt man am einfachsten durch den Ansatz einer Spannungsfunktion Ψ nach *L. Prandtl*[20])

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

wodurch die Gleichgewichtsgleichung

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllt ist. Die Rücksicht auf die Kompatibilität der Formänderungskomponenten verlangt dann, dass die Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = C$$

befriedigt sei. Die Konstante C hat man dabei so zu bestimmen, dass, falls Ψ eine der Randbedingung $\Psi = 0$ genügende Lösung bedeutet, das Torsionsmoment gleich dem Integrale über den Querschnitt

$$M_x = \iint \Psi \, dx \, dy$$

sei. Der Drallwinkel ϑ beträgt, falls G den „Gleitmodul“ bezeichnet,

$$\vartheta = \frac{C}{2G}.$$

Der Bruch $\frac{M_x}{\vartheta}$ heisst die *Torsionssteifigkeit* des Querschnittes.

Für einen kreisförmigen Querschnitt ist die Torsionssteifigkeit

20) *L. Prandtl*, Phys. Zeitschrift 4 (1903), p. 758; ferner D. Math. Ver. Jahresberichte 13 (1904), p. 31.

GJ_p, wo J_p das *polare Trägheitsmoment* in bezug auf den Schwerpunkt bezeichnet. Dies wurde früher irrtümlicher Weise für alle Querschnitte verallgemeinert; die richtige Lösung stammt von *B. de St. Venant*[21]). Für die Torsionssteifigkeit eines Stabes mit elliptischem Querschnitt erhält man $\frac{G}{\frac{1}{J_x}+\frac{1}{J_y}}$. Für rechteckige Querschnitte hat man keine Lösung in endlicher Form; bedient man sich einer Entwickelung für Ψ nach Potenzen von y und z und bricht nach den Gliedern vierten Grades ab, so erhält man die Spannungskomponenten[22]) (für ein Rechteck von den Seitenlängen $2b$ und $2c$)

$$(4)\qquad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{3}{4}\,\frac{M_x z}{J_y}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \\ \tau_{xz} &= \frac{3}{4}\,\frac{M_x z}{J_z}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Da diese Ausdrücke die Gleichgewichtsgleichung streng befriedigen, wurde es in der technischen Litteratur oft übersehen, dass die den so berechneten Spannungskomponenten entsprechende Formänderung geometrisch nicht möglich ist[23]). Dementsprechend liefern die Gl. (4) für verschiedene Punkte verschiedene Werte für den Drallwinkel. Einen Mittelwert erhält *A. Föppl*[22]) durch Berechnung der Formänderungsarbeit eines Stabteiles von der Länge 1,

$$A = \frac{1}{2} M_x \vartheta = \frac{1}{2G}\iint\limits_{[F]} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)\, dx\, dz.$$

Die Theorie der Torsionsfestigkeit findet ihre wesentlichste Anwendung bei der Festigkeitsberechnung von *Wellen. G. Filon*[24]) untersucht den Einfluss von *Keilnuten*, indem er die Spannungsverteilung für einen kreisförmigen Querschnitt mit viereckigem Einschnitt zu ermitteln sucht. *J. Larmor*[25]) und *A. E. H. Love*[25]) untersuchen den Einfluss von Materialfehlern, indem sie in dem Innern des tordierten Stabes eine elliptische Bohrung, bzw. einen kugelförmigen Hohlraum annehmen, deren Abmessungen gegen die Querschnittsabmessungen

21) *B. de St. Venant*, Paris, Mém. prés. par div. sav. 14 (1855), p. 233.

22) Vgl. *A. Föppl*, Vorlesungen über technische Mechanik Bd. 3, p. 299. Für die strenge Lösung vgl. die Reihenentwickelungen bei *St. Venant* (Navier, Resumé des leçons I 2. Paris 1864, p. 291 ff.); auch *A. Föppl*, Vorlesungen über techn. Mechanik, Bd. 5, p. 145 ff. Numerische Lösungen bei *R. Goetzke*, Z. d. V. d. Ing. 53 (1909), p. 935.

23) Vgl. *L. Henneberg*, Z. f. Math. u. Phys. 51 (1904), p. 225; *C. Runge*, ibid. p. 431.

24) *G. Filon*, Lond. Phil. Trans. 193 (1900), p. 309.

25) *J. Larmor*, Phil. Mag. 33 (1892), p. 76; *A. E. H. Love*, ibid. p. 76.

klein sind. Am Rande des Loches können erheblich grössere Spannungen entstehen, als in den übrigen Teilen der Axe.

Die Versuche von *G. Wertheim*[26]) und *J. Bauschinger*[26]) zeigten, dass die *St. Venant*sche Theorie der Torsion die Verhältnisse in genügender Entfernung von den Stabenden richtig wiedergiebt[27]).

Es sei bemerkt, dass in neuerer Zeit die Messung des Drallwinkels zur Ermittelung des durch eine Welle übertragenen Drehmoments und namentlich dadurch zur Bestimmung der effektiven Leistung von Schiffsmaschinen benützt wird.[28]) [IV 10b Nr. **13** (*R. v. Mises*)].

β) *Stäbe mit veränderlichem Querschnitt.* Bei allmählicher Änderung des Querschnittes erhält man eine erste Annäherung, indem man die Torsionssteifigkeit als Funktion von x betrachtet. Bei rascher Querschnittsänderung können jedoch bedeutend grössere, als die sich so ergebenden Spannungen auftreten und dies fordert einige Vorsicht in der Gestaltung der Wellen, besonders an den Stellen plötzlicher Querschnittsänderung.

Die strengere Theorie wurde für *Umdrehungskörper* von *A. Föppl*[29]) und *F. A. Willers*[30]) entwickelt. Bei konstantem Drehmoment darf man ausser $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{rz} = 0$ setzen, so dass nur die beiden Komponenten $\tau_{r\varphi}$ und $\tau_{z\varphi}$ stehen bleiben. Die Gleichgewichtsgleichung lautet

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{z\varphi}) = 0$$

und die Kompatibilitätsgleichung

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau_{z\varphi}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tau_{r\varphi}}{r}\right) = 0.$$

---

26) *G. Wertheim*, Ann. de chimie et de phys. 50 (1857), p. 195. *J. Bauschinger*, (1907), Civilingenieur 27 (1881), p. 115.

27) *A. Hempelmann*, Diss. Karlsruhe (1907), auch Dinglers pol. Journ. 322 (1907) p. 772, findet den Drall durchaus kleiner, als wie ihn die Theorie mit $m = 3 \sim 4$ und

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} = 0{,}375 \sim 0{,}4\,E$$

liefert. Er findet dagegen die Theorie bestätigt mit $m = 5 \sim 6$, was jedoch den direkten Messungen über die Grösse von m widerspricht. Um über die Richtigkeit der Theorie bzw. der der Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen ein Urteil sich bilden zu können, erscheinen indess die *Hempelmann*schen Versuche nicht sicher und zahlreich genug.

28) *A. Denny*, Inst. of. Nav. Arch. Trans. 49 (1907), p. 121; *J. H. Gibson*, ibid. p. 126; *Föttinger*, Mitteil. über Forschungsarbeiten, Heft 25 (1905), p. 41.

29) *A. Föppl*, Münch. Ber. 35 (1905), p. 249; Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), p. 1032.

30) *F. A. Willers*, Diss. Göttingen (1908), Z. f. Math. u. Phys. 55 (1907), p. 225.

Man kann je einen der Ansätze benutzen

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad \Bigg| \qquad \tau_{r\varphi} = r\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$\tau_{z\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad \Bigg| \qquad \tau_{z\varphi} = r\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

die je eine der Gleichungen (5) bzw. (6) identisch befriedigen, und erhält die Gleichungen

(7) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0$$

bzw.

(8) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^3\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0$$

mit den Randbedingungen $\Phi = \text{const.}$, bzw. $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$. Die Linien $\Phi = \text{const.}$ stellen die Spannungslinien, die Linien mit $\Psi = \text{const.}$ die Linien gleicher Winkelverschiebung dar. (Die Umdrehungsflächen $\Psi = \text{const.}$ werden ohne Formänderung verdreht.) Das Torsionsmoment beträgt

$$M_x = 2\pi\overline{\Phi},$$

falls Φ so bestimmt wird, dass für $r = 0$ $\Phi = 0$ gilt, und $\overline{\Phi}$ den Randwert bedeutet. Einige von den wichtigsten Spezialfällen hat *Willers* mit Hilfe graphischer Integration der Gl. (7) ausführlich behandelt.

γ) *Torsion mit Zug, Druck oder Schub.* Diese Fälle bieten kein besonderes Interesse, da man die Spannungen, solange es sich um kleine Formänderungen handelt, einfach superponieren darf. Die reduzierte Spannung (vgl. Nr. **1**), die oft als Maass der Beanspruchung betrachtet wird, beträgt, falls alle Spannungskomponenten ausser σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} verschwinden[31]),

$$\sigma = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)}.$$

Über die Stabilität des gedrückten und gleichzeitig gedrillten Stabes s. Nr. **13**.

2d. Biegung gerader Stäbe. Die übliche Näherungstheorie der Biegung geht von den beiden Annahmen[32]) aus, daß

31) Vgl. z. B. *F. Grashof,* Theorie d. Elast. u. Festigkeit, Berlin 1878, p. 38.

32) Die beiden Annahmen können im allgemeinen gleichzeitig nicht erfüllt werden. Die Abweichungen nehmen jedoch mit dem Abstande des betreffenden Querschnitts von den Balkenenden bzw. von den Angriffspunkten der Last ab. Siehe die Kritik der üblichen Biegungstheorie bei *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe*, Leipzig 1907, p. 398.

1. die *Normalquerschnitte eben und senkrecht zur Zentrallinie bleiben,*
2. die *Spannungskomponenten* σ_y, σ_z, τ_{yz} *verschwinden.*

Auf Grund der ersten Annahme wird die Dehnung ε_x in dem Punkte y, z des Querschnittes

(9) $$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \beta y + \gamma z,$$

wo ε_0 sowie β und γ nur Funktionen von x sind und namentlich ε_0 die Dehnung der Zentrallinie, β, γ ihre Krümmungskomponenten bedeuten.

Die zweite Annahme liefert — falls man sich auf den Fall eines linearen Formänderungsgesetzes beschränkt — mit E als Elastizitätsmodul des Materials:

(10) $$\sigma_x = E\varepsilon_x.$$

Alsdann bestimmen die statischen Bedingungen

(11) $$\int \sigma_x dF = X, \qquad \int \sigma_x y\, dF = -M_z, \qquad \int \sigma_x z\, dF = M_y,$$

die Werte ε_0, β, γ für jeden Querschnitt. Die Spannung wird daraus

(12) $$\sigma_x = \frac{Y}{F} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z$$

und die Differentialgleichungen der gebogenen Zentrallinie $\eta = \eta(x)$, $\zeta = \zeta(x)$:

$$J_z E \frac{d^2\eta}{dx^2} = -M_z,$$

$$J_y E \frac{d^2\zeta}{dx^2} = M_y,$$

wo J_z und J_y die Trägheitsmomente des Querschnitts in bezug auf die beiden Schwerpunkts-Hauptträgheitsaxen bezeichnen.

α) *Reine Biegung zylindrischer Stäbe.* Ist $X = 0$, so bleibt eine gerade Linie durch den Schwerpunkt — *die neutrale Axe* — spannungslos; sie fällt mit der Drehaxe des Moments zusammen, falls die letztere eine Hauptträgheitsaxe ist. Im allgemeinen fallen neutrale Axe und der Durchschnitt der Ebene des Biegungsmoments in konjugierte Richtungen in bezug auf die Schwerpunktsträgheitsellipse des Querschnitts (s. Figur 1). Die Spannung σ_x ist proportional dem senkrechten Abstande von der neutralen Linie. Das Biegungsmoment ist gleich dem Produkt der maximalen Spannung in das „Widerstands-

moment“ des Querschnitts in bezug auf die betreffende neutrale Axe [vgl. IV 4 Nr. 23 (*Jung*) „Widerstandsmodul“]; die Widerstandsmomente in bezug auf die Hauptträgheitsaxen sind $\frac{J_y}{|z|_{max}}$ und $\frac{J_z}{|y|_{max}}$.

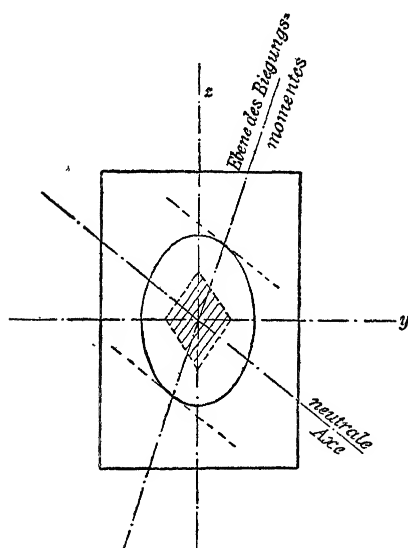


Fig. 1.

Eine Erweiterung der Biegungstheorie für nichtlineare Formänderungsgesetze machte vorzüglich das Verhalten des im Maschinenbau vielbenutzten *Gusseisens* nötig, welches dem *Hooke*schen Gesetze schon bei rein elastischen Formänderungen nicht gehorcht. Hält man an der Annahme fest, daß die ebenen Querschnitte eben bleiben, so bleibt Gl. (9) bestehen, und nur an die Stelle der Gl. (10) tritt die allgemeine, durch reine Zug- bzw. Druckversuche zu ermittelnde Beziehung

$$\sigma_x = f(\varepsilon_x).$$

E. Hodgkinson[33]) fand für Gusseisen die Beziehung

$$\sigma_x = \alpha \varepsilon_x - \beta \varepsilon_x^m,$$

wo α, β, m Konstanten sind und m nahezu gleich 2 ist, und rechnet die diesem Ansatze entsprechende Spannungsverteilung aus. *B. de St. Venant*[34]) setzt

$$\sigma_x = \alpha[1 - (1 - \beta \varepsilon_x)^m]$$

und untersucht den Einfluss des Exponenten m. Das Biegungsmoment, welches dieselbe maximale Spannung hervorruft, fällt desto größer aus, je rascher die Dehnungen mit wachsender Spannung zunehmen; für den Grenzfall $m = \infty$ erhält man als Verhältnis des Biegungsmoments durch die maximale Spannung bei rechteckigem Querschnitt (b Breite, h Höhe) $\frac{bh^2}{2}$ gegen $\frac{bh^2}{6}$ für das lineare Formänderungsgesetz. Dementsprechend zeigen Gusseisenstäbe eine Biegungsfestigkeit, die den auf Grund des linearen Elastizitätsgesetzes berechneten Wert 2 bis 3 mal übertrifft[35]).

---

33) *E. Hodgkinson*, Experimental researches on the strength and other properties of cast iron, London 1846, p. 483.

34) *Navier*, Résumé des leçons sur l'application de la mécanique 3. éd., Paris 1864, p. 175.

35) Die Abweichung zwischen der auf dem linearen Elastizitätsgesetz

Später fand *C. Bach*[36]), dass das Formänderungsgesetz für die elastischen Dehnungen des Gusseisens und mancher anderer Stoffe durch den Ansatz

$$\sigma = \alpha \varepsilon^m$$

mit genügender Genauigkeit ausgedrückt wird (mit verschiedenen Werten von α und m für $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$). Die entsprechenden Rechnungen für verschiedene Querschnittsformen führten *R. Latowsky*[37]), *L. Geusen*[38]), *W. Schüle*[39]) aus. Auch bei einem beliebigen empirisch gegebenen Formänderungsgesetze lassen sich die Integrale (11) durch graphisch-rechnerische Verfahren auswerten — wie *A. Considère*[40]), *F. Engesser*[40]), *E. Meyer*[40]) zeigten —, und man ist in der Lage, die Spannungsverteilung für ein gegebenes Biegungsmoment zu bestimmen; *H. Herbert*[42]) löste die entgegengesetzte Aufgabe, indem er aus den Biegungsversuchen das Formänderungsgesetz des Materials zu ermitteln suchte. *W. Schüle*[39]) fand durch das „Potenzgesetz" alle Unstimmigkeiten der früheren Versuche behoben. *C. Bach*[41]) selbst fand das Potenzgesetz für die Verfolgung der Durchbiegung bis zum Bruche nicht hinreichend, gelangte aber durch das oben angedeutete *Considère*sche Verfahren zu genügender Übereinstimmung zwischen Zug- und Biegungsfestigkeit. Nach *Pinegin's*[43]) Versuchen bleibt die aus Biegeversuchen ermittelte Zugfestigkeit trotz Berücksichtigung der Nichtlinearität des Formänderungsgesetzes noch etwa mit 15—20 v. H. grösser als der aus direkten Zugversuchen ermittelte Wert. *H. Herbert*[42]) sucht diese bei seinen Versuchen ebenfalls erscheinende Abweichung durch Annahme von Gussspannungen

---

fussenden Theorie und den Versuchsergebnissen wurde, als „Paradoxon der Balkentheorie" hauptsächlich in der englischen technischen Litteratur viel besprochen. Vgl. *E. Hodgkinson*, l. c., *H. Cox*, Cambridge Phil. Trans. 9 (1856), p. 177; Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures, London 1849; *W. H. Barlow*, London Phil. Trans. 145 (1855), p. 225; ibid. 147 (1857), p. 463.

36) *C. Bach*, Z. d. V. d. Ing. 32 (1888), p. 198 u. p. 1089. Abhandlungen und Berichte, p. 60.

37) *R. Latowsky*, Z. d. V. d. Ing. 41 (1897), p. 941.

38) *L. Geusen*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 463.

39) *W. Schüle*, Dingler's pol. Journ. 317 (1902) p. 149.

40) *A. Considère*, Mém. sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions, Paris 1886; auch Annales d. ponts et ch. 9 (1885), p. 572 u. 11 (1886), p. 5. *F. Engesser*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 903, Centralblatt der Bauverw. (1898), p. 274. *E. Meyer*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 167; Phys. Zeitschr. 8 (1907), p. 827.

41) *C. Bach*, Elastizität und Festigkeit, 4. Aufl., Berlin 1902, p. 241.

42) *H. Herbert* Diss. Göttingen (1909).

infolge ungleichmässiger Abkühlung bei Herstellung der Stäbe zu erklären.

β) Stäbe mit veränderlichem Querschnitt. Solange der Querschnitt längs des Stabes nicht allzu rasch veränderlich ist, wendet man die Gleichung (12) auch auf Stäbe mit veränderlichem Querschnitte an, indem man J_y und J_z als gegebene Funktionen von x betrachtet. Ist der Stab so beschaffen, dass die Spannung für jeden Querschnitt denselben Höchstwert erreicht, so wird er als *„Stab gleicher Biegungsfestigkeit“* bezeichnet[44]).

J. Résal[45]) untersucht die Biegung eines Stabes mit viereckigem Querschnitt von konstanter Breite und veränderlicher Höhe $2h = 2h(x)$, um den Fehler abzuschätzen, den man in der Anwendung der Gleichung (12) begeht. Um zu einer weiteren Annäherung zu gelangen, nimmt er an, dass die eine der Hauptspannungen in die Tangente der Linien $\frac{z}{h} = \text{const.}$ fällt und die anderen verschwinden. Wird die Hauptspannung mit σ, der Neigungswinkel der Tangente mit φ bezeichnet, so sind die Spannungskomponenten in bezug auf die Normalquerschnitte

$$\sigma_x = \sigma \cos^2 \varphi$$
$$\tau_{xz} = \sigma \sin \varphi \cos \varphi.$$

Die Hauptdehnung längs der Tangente beträgt bei undeformiert bleibenden Querschnitten

$$\varepsilon = \frac{z}{\varrho} \cos \varphi,$$

und die statische Bedingung liefert

$$\sigma = \frac{Mz}{J'},$$

wo

$$J' = \int_{-h}^{h} b z^2 \cos^3 \varphi \, dz$$

eine Art reduziertes Trägheitsmoment bedeutet. Die Abweichung von der üblichen Formel (12) ist von der Grössenordnung $\left(\frac{dh}{dx}\right)^3$.

γ) Biegung und Zug (Druck). So lange die *Durchbiegung der Zentrallinie klein ist gegen die Querschnittsabmessungen* des Stabes,

43) *Pinegin*, Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), p. 2029, Mitteil. über Forschungsarb. 48 (1907), p. 43.

44) Vgl. z. B. *F. Grashof*, Theorie der Elastizität und Festigkeit. 2. Aufl. Berlin 1878, p. 113; der Gedanke, Stäbe von gleicher Festigkeit zu bestimmen, rührt bereits von *Galilei* her.

45) *J. Résal*, Résistance des matériaux, Paris 1898, p. 393.

dürfen Zug- und Biegungsspannungen superponiert werden. Praktisch wichtig erscheint der Fall *exzentrischer Zug- und Druckbelastung*, d. h. der Fall, dass das Biegungsmoment durch eine einzige axiale, jedoch exzentrische Zug- (Druck-)kraft erzeugt wird. Die Lage der neutralen Axe ist in diesem Falle unabhängig von der Grösse der Kraft und fällt in die *Antipolare* des Angriffpunktes in bezug auf die Schwerpunktsträgheitsellipse. Die Antipolarfigur des Querschnittsumrisses schliesst den sog. „Querschnittskern" ein (schraffiert in Figur 1); liegt der Angriffspunkt innerhalb des Kerns, so liegt die neutrale Axe ausserhalb des Querschnittes. Vgl. IV 4, Nr. **13** (*Jung*).

Die Theorie der exzentrischen Druckbelastung wurde von *F. Engesser*[46]) auf Stoffe mit beliebigem Formänderungsgesetze übertragen.

Ist die Durchbiegung der Zentrallinie *nicht klein gegen die Querschnittsabmessungen*, so liefert sie einen merklichen Beitrag zum Hebelarm der axialen Kraft. So lange sie aber noch klein ist gegen die *Stablänge*, darf man den angenäherten Ansatz für die Krümmung beibehalten und hat die Differentialgleichung für die elastische Linie (bei ebener Biegung in der xy Ebene)

$$JE\frac{d^2\eta}{dx^2} - X\eta = M,$$

wo M das Moment der äusseren Kräfte *in bezug auf die undeformierte Zentrallinie* bedeutet.

Für einen Stab von der Länge $2l$ mit drehbar gestützten Enden, belastet durch die axiale zentrische Kraft X und die gleichmäßig verteilte senkrechte Last p — so wie dies bei schweren Zug- und Druckstangen vorkommt, die durch Eigengewicht oder Trägheitskräfte belastet werden —, wird nach *J. Perry*[47]) und *M. Tolle*[48]) die Durchbiegung in der Mitte (vgl. Figur 2)

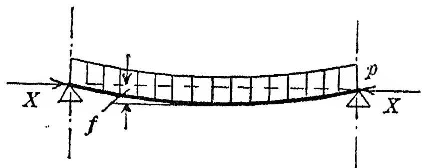


Fig. 2.

$$f = \frac{pl^4}{2JE}\,\frac{2 + (\lambda^2 - 2)\,\mathfrak{Cos}\,\lambda}{\lambda^4\,\mathfrak{Cos}\,\lambda} \quad \text{für Zug},$$

$$f = \frac{pl^4}{2JE}\,\frac{2 - (\lambda^2 + 2)\cos\lambda}{\lambda^4\cos\lambda} \quad \text{für Druck},$$

wo $\lambda^2 = \left|\frac{Xl^2}{JE}\right|$ ist. Im allgemeinen wird durch Zug die Durchbiegung

46) *F. Engesser*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 463.
47) *J. Perry*, Phil. Mag. 33 (1892), p. 269.
48) *M. Tolle*, Z. d. V. d. Ing. 41 (1897), p. 855

vermindert, durch Druck vergrössert[49]). In erster Annäherung wird

$$f = \frac{5}{24}\frac{pl^4}{JE}\frac{1}{1 \pm \frac{61}{150}\frac{Xl^2}{JE}}$$

gegen $\frac{5}{24}\frac{pl^4}{JE}$ nach dem Superpositionsgesetz. *Ph. Forchheimer*[50]) bemerkte, dass man zu genügend genauen Approximationen gelangt, wenn man die elastische Linie durch eine Sinuslinie ersetzt.

Für den Fall, dass das Biegungsmoment von einer, mit der „ursprünglichen Exzentrität" η_0 angreifenden axialen Druckkraft herrührt, lautet die Formel für die Durchbiegung in der Mitte[51])

$$f = \eta_0 \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{Xl^2}{JE}\right)} - 1\right].$$

δ) *Biegung und Schub.* Schubspannungen treten stets auf, falls das Biegungsmoment längs des Stabes veränderlich ist; wesentlich für die Beanspruchung des Materials sind sie jedoch nur bei Stäben, deren Querschnittsabmessungen gegen die Länge nicht klein sind. Eine genaue Ermittelung der Schubspannungen ist nur in einzelnen einfachen Fällen möglich (s. Art. IV 25, *Tedone-Timpe* Nr. **13**). Für die Näherungstheorie beschränkt man sich auf die Ermittelung gewisser *Mittelwerte aus den Gleichgewichtsgleichungen*, einstweilen ohne Rücksicht auf die Kompatibilitätsgleichungen, bzw. auf den Zusammenhang mit den Formänderungen.

Die Gleichgewichtsgleichung für die Kräfte in der x-Richtung lautet

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

mit der Randbedingung $\tau_n = 0$ (τ_n die auf den Rand senkrechte Komponente der Schubspannung). Mit

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{J_y E} + \frac{M_y z}{J_z E}$$

---

49) Die Formel für Druck gilt nur, so lange $\frac{Xl^2}{JE}$ klein ist gegen $\frac{\pi}{2}$, da bei grösseren Werten von $\frac{Xl^2}{JE}$ die Durchbiegung so anwächst, dass die Annäherung für die Krümmung $\frac{1}{\varrho} \sim \frac{d^2\eta}{dx^2}$ nicht mehr zulässig ist. In diesem Falle ist man auf die Theorie endlicher Durchbiegungen (Theorie der Elastica) angewiesen. Vgl. Art. IV 25, Nr. 18 (*Tedone-Timpe*).

50) *Ph. Forchheimer*, Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), p. 58.

51) Vgl. *L. v. Tetmajer*, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit, Zürich 1901. p. 19 usf.

und

$$Y = -\frac{d M_z}{dx},$$

$$Z = \quad \frac{d M_y}{dx}$$

wird

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\left(\frac{Yy}{J_z E} + \frac{Zz}{J_y E}\right).$$

Daraus folgt für das Randintegral um eine beliebige geschlossene Kurve

$$\int \tau_n ds = -\frac{Y}{J_z E}\int y dF - \frac{Z}{J_y E}\int z dF.$$

Wir beschränken uns auf die Biegung von Stäben mit symmetrischem Querschnitt in der Symmetrieebene. Alsdann erhält man[52]), da τ_n an der Randkurve verschwindet, für den Mittelwert von τ_{xz} längs geraden Linien parallel zur Y-Axe ($\overline{AB}$ in Figur 3)

$$(14) \qquad \overline{\tau_{xz}} = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b} \tau_{xz}\, dy = -\frac{Z}{2b J_y E}\int_{[F]} yz dz,$$

wo die Integration über die schraffierte Fläche zu erstrecken ist. $\overline{\tau_{xz}}$ erreicht ihren Höchstwert in der neutralen Axe.

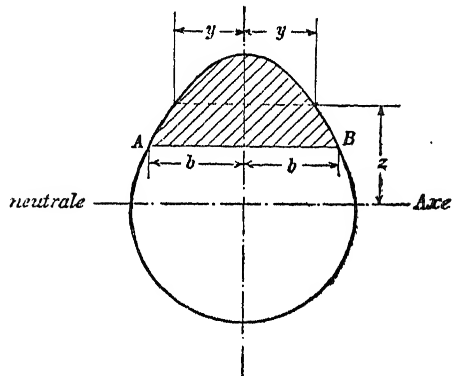


Fig. 3.

Man geht oft über die Ermittelung des Mittelwertes hinaus, indem man mittelst mehr oder weniger willkürlichen Annahmen die Verteilung von τ_{xz} selbst längs der Geraden AB festlegt. So nimmt *F. Grashof* an, daß die Richtungslinien der resultierenden Schubspannung stets durch einen und denselben Punkt der z-Achse gehen. Es darf diesen oder ähnlichen Hypothesen aber wohl kein besonderer Wert zugeschrieben werden.

Oft will man auch den Einfluß der Schubspannungen auf die Durchbiegung — wenigstens schätzungsweise — angeben. Das Gleichungssystem (11) für die durchgebogene Zentrallinie entspricht der Annahme, dass die Normalquerschnitte *eben* und *senkrecht zur Zentral-*

52) *W. J. M. Rankine,* A manual of applied mechanics, London 1858, p. 338; *Navier*, Résumé des leçons I 1, Paris 1864, p. 208; *F. Grashof*, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl., Berlin 1878, [illegible]

linie bleiben. Man kann nun die zweite Annahme fallen lassen und die Winkeländerung zwischen Querschnitt und Zentrallinie aus den nach Gl. (14) berechneten Werten $\overline{\tau_{xz}}$ abschätzen. Die Krümmung der Zentrallinie wird dann bei ebener Biegung

$$(15) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi_1}{ds} + \frac{d\varphi_2}{ds},$$

wo φ_1 den Kontingenzwinkel der Querschnittsebenen, φ_2 den Winkel zwischen der Querschnittsebene und Normalebene bedeutet. Für $\frac{d\varphi_1}{ds}$ gilt die frühere Gleichung für die Krümmung; für φ_2 setzt *W. J. M. Rankine*[53]), falls das Biegungsmoment in der XZ-Ebene liegt, $\varphi_2 = \frac{1}{G}(\overline{\tau_{xz}})_{z=0}$, wo $G = \frac{mE}{2(m+1)}$ den Gleitmodul bezeichnet. Würde man jedoch dieselbe Überlegung auf andere Fasern anwenden, so kommt man in Widerspruch mit der Annahme ebener Querschnitte. *A. Föppl*[54]) erhält eine bessere Annäherung, indem er den Mittelwert von φ_2 aus der Formänderungsarbeit berechnet:

$$\varphi_2 = \frac{1}{G} \frac{\int \overline{\tau}_{zx}^2 \, dF}{\int \overline{\tau}_{zx} \, dF}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt erhält man nach *Rankine* $\varphi_2 = \frac{3}{2} \frac{Z}{FG}$, nach *Föppl* $\varphi_2 = \frac{4}{5} \frac{Z}{FG}$.

ε) *Biegung und Torsion.* Ist die Durchbiegung der Zentrallinie klein, so können die Normal- und Schubspannungen superponiert werden. Man rechnet oft die reduzierte Spannung aus und beurteilt danach die Anstrengung des Materials. Für einen kreisförmigen Querschnitt erhält man, falls das Biegungsmoment mit M_z und das Torsionsmoment mit M_x bezeichnet wird

$$\sigma = \frac{m-1}{2m} \frac{M_z r}{J_y} \pm \frac{m+1}{2m} \frac{r}{J_y} \sqrt{M_z^2 + M_x^2}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{m-1}{2m} M_z \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{M_z^2 + M_x^2}$$

wird oft „ideelles Biegungsmoment"[55]) genannt.

3. Typische Beispiele für die Anwendung der Theorie gerader Stäbe. Wie schon in Nr. 2 erwähnt wurde, werden die einfachen Resul

53) *W. J. M. Rankine*, A manual of applied mechanics, London 1858, p. 342; *L. Navier*, Résumé des leçons I 1, Paris 1864, p. 208.

54) *A. Föppl*, Vorlesungen über techn. Mechanik, Bd. 3, 3. Aufl. Leipzig 1910, p. 132.

55) Vgl. *F. Reuleaux*, Abriss der Festigkeitslehre für den Maschinenbau. Braunschweig 1904, p. 47.

tate der unter 2a) bis 2d) berichteten Näherungstheorien oft auch für Festigkeitsberechnung von solchen Konstruktionsteilen herangezogen, die nur in sehr erweitertem Sinne als „Stäbe" betrachtet werden können. So verschafft man sich eine Abschätzung über die Materialbeanspruchung in einzelnen Teilen des durch Eigengewicht und Wasserdruck gebogenen *Schiffskörpers*[56]) durch einfache Anwendungen der Biegungstheorie. Ebenfalls werden verschiedene genietete vollwandige Blechkonstruktionen (z. B. Krangerüste), weiterhin Rohre[56a]), falls sie lediglich gebogen oder tordiert werden, als Stäbe behandelt. Die eigentliche Schwierigkeit in der Anwendung der Theorie liegt trotzdem weniger in der komplizierten Form der „Stäbe", als in der Unsicherheit bei der Beurteilung der *Stützung* und der *Verteilung der äusseren Kräfte.* Die meisten Konstruktionsteile sind in einer Weise gestützt, welche zwischen den idealen Fällen der *drehbaren Stützung* und der *vollkommenen Einklemmung* liegt; andererseits greifen die äusseren Kräfte nicht in *einzelnen Punkten* an, sondern sind auf *Berührungsflächen* verteilt, wobei man über die Art der Verteilung zumeist sehr wenig weiß. Als typisches Beispiel sei die durchaus wichtige Frage der Berechnung von *gekröpften Kurbelwellen* angeführt. Diese werden schlechthin als ein System starr verbundener gerader Stäbe betrachtet; nimmt man noch an, dass die Welle in den Lagern, die man sich in einzelnen Punkten vereinigt denkt, drehbar gestützt ist, so kann man nach den Regeln der Statik[57]) die Lagerreaktionen, und daraus die Kraftkomponenten, sowie das Biegungsmoment und Torsionsmoment für

56) Über die Festigkeit der Schiffe vgl. auch IV 22 (*Kriloff*), Nr. 1. Für die Untersuchung der „longitudinalen" Festigkeit hat man die Änderung des Biegungsmomentes und der Schubkraft längs des Schiffskörpers zu ermitteln. *E. J. Reed* gab zunächst ein Verfahren für den Fall, dass das Schiff auf stillem Wasser ruht, dann betrachtete er auch die beiden extremen Fälle, dass der Schiffskörper an den beiden Enden bzw. in der Mitte auf Wellenbergen ruht (Phil. Trans. 161 (1871), p. 413). Eine genauere Untersuchung der durch die Wellen entstehenden zusätzliche Beanspruchung — namentlich unter Berücksichtigung der eigenen Trägheitskräfte des Schiffes — stammt von *Kriloff*, Inst. of Nav. Arch. Trans. 40 (1898), p. 197. Über „transversale" Festigkeit des Schiffskörpers vgl. *T. C. Read* und *P. Jenkins*, Inst. Nav. Arch. Trans. 23 (1882), p. 174, ibid. 31 (1890), p. 179; ferner *J. Bruhn*, Engineering 72 (1901), p. 30, Inst. of Naval. Arch. Trans. (1901), p. 1, Schiffbau 3 (1901), p. 11, ibid. 6 (1904), p. 153; *G. Stieghorst*, Schiffbau 7 (1905), p. 887.

56a) Vgl. z. B. die Untersuchungen von *Th. Donaldson*, Inst. of Civ. Eng. Proc. 135 (1899), p. 283 und *J. Kraft*, Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), p. 1545, über die Beanspruchung von Dampfleitungsrohren durch Wärmeausdehnung.

57) Für die Theorie durchlaufender Träger vgl. unten den Art. über Eisenkonstruktionen.

jeden Querschnitt berechnen. Die übliche Rechnungsweise hat nun den Zweck, der Welle annähernd eine „Form gleicher Festigkeit" zu geben, damit genügende Sicherheit ohne Materialverschwendung erreicht wird. Dazu bedient man sich zumeist geeigneter graphischer Methoden. Eine solche Berechnung setzt jedoch eine Reihe von zumeist wenig geprüften Annahmen voraus; es müsste z. B. geprüft werden, wie weit die Ecken an den Kröpfungen als starre Verbindungen betrachtet werden können, welchen Fehler man durch Vereinigung der Lagerdrücke und der an den Kurbelzapfen verteilten Kräfte in einzelne Punkte begeht, wie weit die Lager die Winkeländerung hindern usw.? Mit diesen Fragen beschäftigen sich wohl eine Reihe von Arbeiten[58]); es scheint jedoch, dass volle Sicherheit nur Versuche an den Konstruktionsteilen selbst[59]) oder an geeigneten Modellen gewährleisten können.

4. Ursprünglich gekrümmte Stäbe.

Die Theorie der Stäbe mit ursprünglich gekrümmter Zentrallinie gestaltet sich anders, je nachdem die Querschnittsabmessungen gegen den Krümmungshalbmesser der Zentrallinie als klein betrachtet werden dürfen oder von derselben Grössenordnung sind.

4a. Stäbe mit schwacher Krümmung. Sind die Querschnittsabmessungen klein gegen den Krümmungshalbmesser und gegen die Bogenlänge der Zentrallinie, so darf die Theorie der unendlich dünnen Stäbe unmittelbar angewendet werden, wie sie in der mathematischen Elastizitätslehre entwickelt wird (vgl. Art. IV 25, *Tedone-Timpe* Nr. 19). Diese Theorie führt lediglich zu dem Ergebnis, dass die *tangentielle Komponente* der Kraft der *Dehnung* der Zentrallinie, das *Torsionsmoment* der Änderung des *Dralls*, die beiden *Biegungsmomente* den Änderungen *der Krümmungskomponenten* proportional sind. Wir benutzen ein Koordinatensystem ξ, η, ζ, welches in jedem Punkte der Zentrallinie so gerichtet ist, dass in jedem Punkte die ξ-Axe mit der Tangente der Zentrallinie, die η- und ζ-Axen mit den Trägheitshauptaxen des Querschnittes zusammenfallen und führen das Koordinatenkreuz zunächst entlang der Zentrallinie des undeformierten Stabes. Die Drehungsgeschwindigkeiten des Koordinatenkreuzes um die drei Axen — falls

58) Für die Litteratur über Kurbelwellen vgl. *W. J. M. Rankine*, Inst. of Naval Arch. Trans. 10 (1869), p. 139; *S. Dunkerley*, ibid. 44 (1902), p. 99 und Engineering 73 (1902), p. 403; *G. Berling*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 495; *M. Ensslin*, Mehrfach gekröpfte Kurbelwellen, Diss. tech. Hochsch. Stuttgart 1901; *G. Duffing*, Beiträge zur Bestimmung d. Formänderungen gekröpfter Kurbelwellen, Berlin 1906.

59) *E. Meyer*, Z. d. V. d. Ing. 53 (1909), p. 295.

die Bogenlänge die Rolle der Zeit spielt — heissen *ursprünglicher Drall* τ_0 und ursprüngliche *Krümmungskomponenten* $\varkappa_0'$ und $\varkappa_0''$ des Stabes. Dieselben Grössen mögen durch die Deformation in τ, $\varkappa'$, $\varkappa''$ übergehen; die Dehnung soll mit ε bezeichnet werden. Alsdann haben wir die Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} \Xi &= FE\varepsilon, \\ M_\xi &= A(\tau - \tau_0), \\ M_\eta &= B(\varkappa' - \varkappa_0'), \\ M_\zeta &= C(\varkappa'' - \varkappa_0''), \end{aligned}$$

(Ξ die Komponente der äusseren Kraft, M_ξ, M_η, M_ζ Komponenten des Moments der äusseren Kräfte nach den betreffenden Axen, F Querschnittsfläche, E Elastizitätsmodul). A heisst die Torsionsfestigkeit, B und C Biegungssteifigkeiten, wobei näherungsweise dieselben Grössen angesetzt werden dürfen, die die übliche Näherungstheorie (s. Nr. 2) für einen geraden Stab mit demselben Querschnitt liefert.

Für *kleine Formänderungen*[60]) können die Grössen ε, τ, $\varkappa'$, $\varkappa''$ linear in den Verschiebungen der Punkte der Zentrallinie u, v, w nach den drei Axen, in der Drehung φ des Querschnitts um die ξ-Axe und in den Differentialquotienten dieser Grössen ausgedrückt werden. Für die ebene Biegung eines Stabes mit ebener Zentrallinie lautet der Ausdruck für die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{\varrho_0}$$

und für die Krümmungsänderung

$$(17)\qquad \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = -\left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{\varrho_0^{\,2}}\right).$$

Für einen Stab von kreisförmiger Zentrallinie mit dem Radius R führen wir Polarkoordinaten $r = R + w$ und ϑ ein und erhalten die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$(18)\qquad \frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2w}{d\vartheta^2} + w\right) = -M,$$

falls M das Moment der äusseren Kräfte bedeutet. Bei technischen Untersuchungen werden meistens die Gleichungen (17) und (18) benutzt

4 b. **Stäbe mit starker Krümmung.** Dieser Abschnitt der Theorie ist in weniger befriedigendem Zustande, als die des geraden

60) Vgl. *A. E. H. Love*, Theorie der Elastizität, deutsch v. *Timpe*, Leipzig 1907, p. 509 usf. Die Einführung der Gleichungen für kleine Deformationen krummer Stäbe in die technische Festigkeitslehre verdankt man *L. Navier*, Annales d. ponts et ch. 1 (1831), p. 428 und *J. A. Ch. Bresse*, Recherches analytiques sur la flexion et la resistance des pièces courbes, Paris 1854.

Stabes oder des dünnen Stabes mit grossem Krümmungshalbmesser. Der annähernde Ansatz einer von der Krümmung der Zentrallinie unabhängigen Biegungssteifigkeit, welcher für Stäbe mit schwacher Krümmung hinreichend genau ist, führt nur zu einer ersten rohen Abschätzung der Spannungen, da die einzelnen Fasern ursprünglich merklich verschiedene Krümmungen besitzen. Wir verfügen zwar über einige strenge Lösungen für einfache Fälle, so z. B. für die gleichmässige Biegung ringfömiger Körper[61]) mit ovalem Querschnitte sowie für die Biegung dünner Lamellen in ihrer eigenen Ebene (ebenes Problem[62])), und man könnte die so gewonnenen Resultate auf schwierigere Fälle übertragen und zu einer Näherungstheorie gelangen. Während jedoch dieses Verfahren bei geraden Stäben durch das *St. Venant*sche Prinzip begründet wird, da die Balkenlänge zumeist gross ist gegen die Querschnittsabmessungen, sind bei den krummen Stäben mit starker Krümmung die Bogenlänge der Zentrallinie und die Querschnittsabmessungen meistens von derselben Grössenordnung. Aus diesem Grunde haftet den in dieser Nummer berichteten Näherungstheorien eine gewisse Unsicherheit an.

Wir beschränken uns auf die ebene Biegung von Stäben mit ebener Zentrallinie. Die einfachste Näherungstheorie, zuerst von *H. Résal*[63]) und *F. Grashof*[64]) entwickelt, übernimmt beide Annahmen der *Navier*schen Theorie gerader Stäbe und setzt voraus, dass

1. die Normalquerschnitte eben und senkrecht zur Zentrallinie bleiben,
2. die Spannungskomponenten σ_y, σ_z, τ_{zy} verschwinden.

Die beiden Voraussetzungen liefern für die Dehnung ε_x und für die Spannung σ_x senkrecht zur Querschnittsebene die Ansätze:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_0 + \alpha \frac{z}{\varrho + z}, \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x \end{aligned}$$

(ε_0 Dehnung der Zentrallinie, ϱ Krümmungshalbmesser derselben, α eine Funktion der Bogenlänge, die die Krümmungsänderung der Zentrallinie angiebt). Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$E\varepsilon_0 \int dF + \alpha E \int \frac{z}{\varrho + z} dF = X,$$

$$\alpha E \int \frac{z^2}{\varrho + z} dF = M.$$

61) *J. H. Michell*, London Math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 130.

62) Vgl. Fussnote 70) u. 71).

63) *H. Résal*, Annales des mines, 1 (1862), p. 617.

64) *F. Grashof*, Theorie der Elast. und Festigkeit, p. 252 usf.

Setzt man $\int \frac{z}{\varrho + z} dF = F'$ („reduzierte Fläche") und berücksichtigt die Gleichung $\int z\,dF = 0$, so wird

$$\sigma_x = \frac{X}{F} - \frac{M}{F\varrho} + \frac{M}{F'\varrho}\frac{z}{\varrho + z}. \tag{20}$$

Zur Anwendung der Gleichung muß das Integral $\int \frac{z}{\varrho + z} dF$ für den betreffenden Querschnitt ausgewertet werden. Dafür sind verschiedene rechnerische und graphische Verfahren angegeben worden, so z. B. von *A. Bantlin*[65]) und *M. Tolle*[66]). Für ein Rechteck[67]) von der Höhe $2h$ lautet

$$F' = F\left(1 - \frac{2\varrho}{h}\lg\frac{\varrho + h}{\varrho - h}\right).$$

Die Spannungsverteilung wird in der XZ-Ebene durch eine Hyperbel dargestellt (vgl. Figur 4); die neutrale Axe ist gegen den Krümmungsmittelpunkt verschoben[68]).

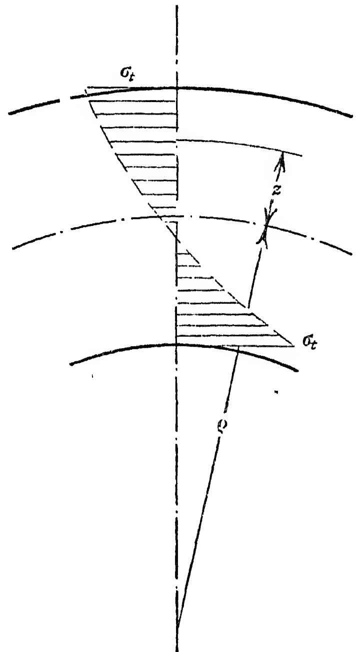


Fig. 4.

Die beiden Annahmen 1) und 2) stehen miteinander im Widerspruch. Einerseits können die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllt werden, falls σ_r überall verschwindet, andererseits ist der Ansatz (19) für ε_x nicht streng, da der Beitrag der radialen Verschiebung w vernachlässigt wird. Beschränken wir uns auf den Fall der reinen Biegung eines Kreissektors (ebenes Problem) und führen Polarkoordinaten $r = \varrho + z$ und ϑ ein, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungskomponenten σ_r, σ_t:

$$\frac{\partial \sigma_t}{d\vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{\varrho + z} = 0. \tag{21}$$

65) *A. Bantlin*, Z. d. V. d. Ing. 45 (1901), p. 164.

66) *M. Tolle*, Z. d. V. d. Ing. 47 (1903), p. 884.

67) *F. Grashof*, l. c.; vgl. Fussn. 64).

68) *H. Léauté* vernachlässigt die Quadrate des Verhältnisses: Trägheitshalbmesser des Querschnittes durch Krümmungshalbmesser der Zentrallinie gegen Eins und gelangt zu dem Satze, daß die neutrale Axe durch das auf den Krümmungsmittelpunkt als Aufhängepunkt bezogene Perkussionszentrum des Querschnittes geht. Vgl. Paris C. R. 98 (1884), p. 1483.

Die strengen Ansätze für die Dehnungskomponenten lauten

$$(22)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_t &= \varepsilon_0 + \alpha \frac{z}{\varrho + z} + \frac{w}{\varrho + z}, \\ \varepsilon_r &= \frac{dw}{dz}, \end{aligned}$$

und die Beziehungen zwischen Dehnungs- und Spannungskomponenten

$$(23)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}\right), \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m}\right). \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems haben *L. Prandtl*[70]) und *A. Timpe*[70]) angegeben. Die Spannungskomponenten σ_r und σ_t sind von der Form

$$\sigma_r = -\frac{A}{(\varrho + z)^2} + B[\lg(\varrho + z) + 1] - C,$$

$$\sigma_t = \frac{A}{(\varrho + z)^2} + B \lg(\varrho + z) - C.$$

Die für das ebene Problem gewonnenen Resultate gelten mit sehr grosser Annäherung auch für die Stäbe mit rechteckigen Querschnitten und bieten vor allem die Möglichkeit, die Genauigkeit der *Grashof*-schen und der daran anknüpfenden Näherungstheorien zu prüfen. Unter den letzteren sind die Berechnungen von *H. Müller-Breslau*[71]), *E. S. Andrews*[71]) und *C. Pfleiderer*[71]) zu nennen. *Müller-Breslau* und später *Andrews* berücksichtigen die Querdehnung ε_x, setzen jedoch durchwegs $\sigma_r = 0$, so dass die Gleichgewichtsbedingungen nicht richtig erfüllt sind; *Pfleiderer* berücksichtigt dagegen die Querspannung σ_r, vernachlässigt jedoch die radiale Verschiebung. Der Vergleich zeigt, dass die einfachste *Grashof*sche Formel (20) zu der strengen Lösung weit näher steht, als die beiden späteren Lösungen; die *Müller-Breslau*-schen Gleichungen liefern für die gefährliche Spannunng zu grosse, die *Pfleiderer*schen zu kleine Werte.

Ähnlich zeigt *S. Timoschenko*[72]) in dem Falle eines Kreisringes, der an zwei diametral entgegengesetzten Punkten gedrückt wird, dass die einfache Näherungstheorie die Spannungsverteilung mit guter Annäherung angiebt. Öfters wurden auch Versuche zur Prüfung der Näherungstheorie unternommen. Es ist vor allem das Verdienst von

---

70) *A. Föppl*, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 5, p. 73. *A. Timpe*, Z. f. Math. u. Physik 52 (1905), p. 348.

71) *H. Müller-Breslau*, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., p. 209. *E. S. Andrews*, Drapers Company Research Memoirs 1 (1904). *C. Pfleiderer*, Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 209 u. 1507.

72) *S. Timoschenko*, Berichte des polyt. Instituts Kiew (1908) (russ.).

C. Bach[74]), dass er die Brauchbarkeit der *Grashof*schen Theorie nachwies und ihre Anwendung in die Praxis einführte. Die optischen Versuche von *O. Hönigsberg*[73]) über Biegung von Glasstäben zeigen im ganzen und grossen auch eine Übereinstimmung mit der Theorie, namentlich zeigen sie deutlich die Verschiebung der neutralen Axe gegen den Krümmungsmittelpunkt hin. *G. A. Goodenough* und *L. E. Moore*[74]) führten bei ringförmigen Körpern eine direkte Messung der elastischen Formänderungen durch und fanden die *Grashof*sche Näherungstheorie gut bestätigt. Es muss jedoch bemerkt werden, dass man sehr verschiedene Spannungsverteilungen angeben kann, welche zu merklich denselben resultierenden Formänderungen führen. *E. S. Andrews*[71]) bestimmt die Last, bei welcher die Elastizitätsgrenze überschritten wird und findet ebenfalls gute Übereinstimmung mit den theoretischen Berechnungen. Dagegen zeigen manche andere Versuche, dass die Elastizitätsgrenze bzw. Bruchgrenze erst bei bedeutend höheren Belastungen erreicht werden, als man nach der Theorie erwartet. Dies kann teilweise durch Abweichung von dem linearen Spannungsgesetz erklärt werden[75]).

5. Typische Beispiele zur Anwendung der Theorie krummer Stäbe.

a) *Stäbe mit schwacher Krümmung.* Die Theorie wird hauptsächlich zur Berechnung von *Federn* (s. Nr. 6) und *ringförmigen Körpern* herangezogen. So untersuchte *H. Résal*[76]) den Spannungszustand in Radkränzen, die durch Speichen mit der Nabe verbunden sind, sowie in den Reifen, die auf die Felgen warm aufgezogen werden. *E. Winkler*[77]) und *F. Grashof*[77]) behandelten die Festigkeit der Schwungräder, ebenfalls mit Berücksichtigung des Einflusses der Radarme[78]). Unter den spezielleren Untersuchungen, die die Theorie krummer Stäbe mit schwacher Krümmung benutzen, seien erwähnt die Arbeit von *Th. Weitbrecht*[79]) über die Festigkeit von Radkränzen mit sehr vielen

73) *O. Hönigsberg*, Z. des öst. Arch. u. Ing. Ver. 58 (1906), p. 489.

74) Vgl. *A. Baumann*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 1400. Für Versuche über die Biegungsfestigkeit gekrümmter Stäbe vgl. *C. Bach*, Elastizität u. Festigkeit. 3. Aufl. Berlin 1898, p. 476 usf. *A. Föppl*, Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München (1898), p. 36.

75) Vgl. *P. Ludwik*, Techn. Blätter 37 (1906). Heft 1 u. 2.

76) *H. Résal*, Annales des mines 16. (1859), p. 271.

77) *E. Winkler*, Civiling. 6 (1860), p. 427). *F. Grashof*, Theorie der Elast. und Festigkeit, 2. Aufl., Berlin (1878), p. 278.

78) Vgl. auch *R. Bredt*, Z. d. V. d. Ing. 45 (1901), p. 267; *v. Glinski*, Verhandlungen des Ver. zur Bef. d. Gewerbfl. 83 (1904), p. 84.

79) *Th. Weitbrecht*, Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 383.

elastischen Speichen und eine Untersuchung von *H. Linsenmann*[80]) über die Beanspruchung der Rahmen grosser Dynamomaschinen, die durch magnetische Kräfte beansprucht werden. Die Beanspruchung raschlaufender Magneträder untersuchte *Ch. A. Werner*[81]), und zwar mit Berücksichtigung der Krümmung des Radkranzes.

Eine eigenartige Aufgabe bieten die im Dampf- und Gasmaschinenbau allgemein benutzten *selbstspannenden Kolbenringe.* Die Theorie — zuerst von *H. Résal*[82]) entwickelt — hat die Gestalt der aufgeschlitzten Ringe in undeformiertem Zustande so zu bestimmen, dass der Ring in den Zylinder eingezwängt, ringsherum mit möglichst gleichmässiger Pressung von vorgeschriebener Grösse anliegen soll und dabei das Material bei der Montierung nicht überanstrengt werde.

Von anderen speziellen Untersuchungen sei die von *H. Léauté*[83]) erwähnt über den Einfluss der Biegungssteifigkeit auf das Verhalten der meistens als vollkommen biegsam betrachteten Bremsbänder.

Unter den Versuchen, die mit dünnen Ringen unternommen wurden, seien die von *E. Roussel*[84]) und *A. Mesnager*[84]) genannt; sie fanden die Formänderungen bei Zusammendrückung an zwei diametral entgegengesetzten Punkten wesentlich geringer, als wie sie die Theorie ergiebt.

b) Stäbe mit starker Krümmung. Typische Beispiele liefern die *Kettenglieder,* deren Festigkeit zuerst von *E. Winkler*[85]) und *H. Résal*[85]) theoretisch untersucht wurde. Die Berechnung verschieden gestalteter *Last-* und *Kupplungshaken*[86]) bildete ebenfalls Gegenstand vieler Arbeiten. Da bei diesen Konstruktionen weder die Krümmung der Zentrallinie, noch der Querschnitt des Stabes konstant ist, darf man von der Theorie nur eine erste Abschätzung der Spannungen erwarten. In der Praxis richtet man sich zumeist nach Versuchsergebnissen und Erfahrungen an bewährten Konstruktionen.

---

80) *H. Linsenmann,* Zeitschr. Math. Phys. 53 (1906), p. 245. auch *J. Schenk,* Diss. techn. Hochsch. München 1903.

81) *Ch. A. Werner,* Diss. techn. Hochsch. Aachen (1908).

82) *H. Résal*, Annales des mines, 5 (1874), p. 38; Paris C. R. 73 (1871), p. 542; vgl. auch *F. Grashof*, Theorie der Elast. u. Festigkeit, p. 268; *E. Reinhardt,* Z. d. V. d. Ing. 45 (1901), p. 232; *O. C. Reymann*, ebd. 40 (1896), p. 85.

83) *H. Léauté*, C. R. Paris 97 (1883), p. 894; ibid. 98 (1884), p. 41 u. 219.

84) *E. Roussel,* Revue de métallurgie 1904, p. 460; *A. Mesnager,* ibid., p. 458.

85) *E. Winkler,* Civiling. 4 (1858), p. 232. *H. Résal*, Annales des mines 1 (1862), p. 617; Journal des math. 1 (1875), p. 43; Paris C. R. 73 (1871), p. 424. Vgl. auch *W. C. Burr*, Amer. Soc. Civ. Eng. Trans. 6 (1878), p. 127.

86) *J. Grashof,* Theorie der Elast. u. Festigkeit, p. 289; *E. Bagge*, Z. d. V. d. Ing. 29 (1885), p. 11; *Ph. Bredt,* ibid., p. 283. Versuche findet man bei *J. Goodman,* Engineering 72 (1901), p. 537; ferner *E. S. Andrews,* s. Fussnote 71).

Grössere Versuchsreihen über die Festigkeit der bei Eisenbahnkupplungen benutzten Haken sind von *A. Föppl*[87]), über Festigkeit von Kettengliedern u. a. von *G. A. Goodenough* und *L. E. Moore*[88]) unternommen worden.

Verschiedene andere Anwendungen der Näherungstheorie auf die Berechnung von Ösen, Lagerdeckeln und anderen Konstruktionsteilen sind von *R. Blumenfeld*[89]) und *A. Baumann*[90]) ausgearbeitet worden.

6. Theorie der Federn. Die Federn dienen im Maschinen- und Apparatenbau teilweise zur Kraftmessung, teilweise zum Ausgleich von Stössen und Schwingungen. Dementsprechend hat die Theorie[91]) einerseits die Beziehung zwischen Kraft und Federung zu ermitteln und insbesondere zu prüfen, wie weit Proportionalität besteht, andererseits die Abmessungen so zu bestimmen, dass bei den zu erwartenden Kraftwirkungen das Material nicht überanstrengt wird. Die Arbeitsmenge, die die Feder ohne Überanstrengung des Materials als potentielle Energie aufzunehmen vermag, heisst ihre *Arbeitsfähigkeit* (resilience).[92]) Als Maass für die Ausnützung des Materials[93]) kann man das Verhältnis der Arbeitsfähigkeit zu dem Produkt $V \times A$ betrachten, wo V das Volumen, A die Arbeitsmenge bedeutet, die in der Volumeinheit ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze aufgespeichert werden kann. Es wurde schon erwähnt, dass man, um grössere Wege zu erhalten, bei Federn bedeutend höhere Spannungen als zulässig erachtet, als bei sonstigen Maschinenteilen; dies wird dadurch ermöglicht, dass man bei Herstellung der Federn die Elastizitätsgrenze meist durch Härtung wesentlich erhöht.

In den folgenden Zeilen sind nur die Ergebnisse der Theorie für die wichtigsten Typen zusammengestellt.

a) Lamellenfedern. Für die einfache Lamelle, als Biegungsfeder, gelten die einfachen Formeln der Theorie dünner Stäbe, so lange die Breite des Streifens nicht gross ist gegen die Dicke. Wird die Breite

---

87) *A. Föppl*, Mitteilungen aus dem mech. techn. Lab. München 26 (1898).

88) *G. A. Goodenough* und *L. E. Moore*, Bull. of Illionis Univ. 18 (1907), berichtet von *A. Baumann*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 1400.

89) *R. Blumenfeld*, Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 1426.

90) *A. Baumann*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 337.

91) Für die allgemeine Literatur über Federn vgl. *F. Releaux*, Konstruktion und Berechnung der für den Maschinenbau wichtigsten Federarten, Winterthur 1857; *A. Castigliano*, Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern, deutsch v. *R. Totz*, Wien 1888, und die angegebenen Lehrbücher der Festigkeitslehre.

92) Vgl. *W. J. M. Rankine*, A Manual of applied mechanics, London 1858, p. 273.

93) Vgl. *B. Kirsch*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 429.

gross, so wächst das Biegungsmoment stärker, als die Krümmung.[94]) Es beträgt (für einen Streifen von der Dicke b und Höhe h)

$$M = \frac{m^2}{m^2-1}\frac{JE}{\varrho}\left(1 - \frac{\lambda}{m^2 \lambda b}\frac{\mathfrak{Cos}(\lambda b) - \cos(\lambda b)}{\mathfrak{Sin}(\lambda b) - \sin(\lambda b)}\right),$$

wobei

$$\lambda^4 = 3\frac{m^2-1}{m^2}\frac{1}{h^2\varrho^2}.$$

Die Theorie der zusammengesetzten Lamellenfedern (*Schichtenfedern*), die hauptsächlich bei Eisenbahnfahrzeugen benützt werden, hat *E. Phillips*[95]) entwickelt. Er zeigt, dass die Durchbiegung solcher Federn mit der Kraft proportional wächst und unabhängig ist von der ursprünglichen Krümmung der einzelnen Blätter vor ihrer Vereinigung, falls nur alle dieselbe Krümmung hatten. Das Material wird am besten ausgenützt, falls bei der maximalen Last die Feder gerade platt gedrückt wird. *Phillips* behandelt auch den Fall, dass einzelne Blätter nur erst bei grösserer Belastung herangezogen werden; er vernachlässigt jedoch die Reibung zwischen den Blättern, die für die dämpfende Wirkung dieser Federn sehr wesentlich ist.

Als eine Art Torsionszugfeder kann ein dünner breiter Streifen dienen, dem man einen permanenten Drall erteilt hat. Wird ein solcher Streifen gezogen, so erleidet er zwar nur eine geringe Verlängerung, es tritt aber eine erhebliche Entwindung ein. Die Theorie dieser Art der Deformation wurde von *J. Perry*[96]) und *G. H. Bryan*[97]) entwickelt.

An dieser Stelle wollen wir auch die früher an Eisenbahnfahrzeugen benutzten *Belleville-Federn* erwähnen, die aus hohlen, dünnwandigen, mit ihren Grundflächen gegeneinander gestützten Stumpfkegeln bestehen[98]).

b) *Spiralfedern.* (Vgl. auch Art. VI 2, 4, *Caspari*, Nr. 4). Zur Untersuchung der Spiralfedern wird lediglich die Biegungstheorie dünner Stäbe mit ebener Zentrallinie herangezogen; ihre Theorie wurde zuerst von *E. Phillips*[99]) und *H. Résal*[100]) entwickelt, mit besonderer Rück-

94) *H. Lamb*, Phil. Mag. 31 (1891), p. 182.

95) *E. Phillips*, Annales des mines 1 (1852), p. 195; Paris C. R. 34 (1852), p. 226; Paris C. R. 44 (1857), p. 624; *Flamant*, Stabilité des constructions, résistance des matériaux, Paris 1886, p. 574. Vgl. auch *A. Castigliano*, Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern, Wien 1888, p. 7 ff.

96) *J. Perry*, Phil. Mag. 29 (1890), p. 244.

97) *G. H. Bryan*, Phil. Mag. 30 (1890), p. 476.

98) *H. Résal*, Paris C. R. 107 (1888), p. 713. — *A. Rateau*, C. R. Paris 104 (1887), p. 1690. Ann. des mines 17 (1890), p. 5.

99) *E. Phillips*, Annales des mines 20 (1861), p. 1; auch Journal des math. 5 (1860), p. 313.

sicht auf die Uhrwerke. In den meisten Fällen sind die beiden Enden der Feder an zwei konzentrischen Kreiszylindern befestigt, welche gegeneinander verdreht werden können; das zur Verdrehung nötige Drehmoment ergiebt sich in erster Annäherung proportional mit der relativen Verdrehung der beiden Zylinder, und zwar ist die Abweichung von der Proportionalität desto geringer, je dichter die Windungen angeordnet sind (ohne jedoch aneinander anzuliegen). In erster Annäherung ist das Drehmoment[100])

$$M = \frac{G\varphi}{L}\left(1 + \frac{2(R_a - R_i)}{L}\right) \tag{24}$$

(L Bogenlänge der Feder, R_a, R_i Halbmesser der beiden Führungszylinder, φ Winkelverdrehung, G Gleitmodul).

c) *Schraubenfedern.* Wird die Zentrallinie durch eine *zylindrische* Schraubenlinie gebildet (zylindrische Schraubenfeder s. Figur 5) und wirkt eine Kraft K längs der Zylinderaxe, ferner ein Drehmoment M um dieselbe Axe, so führt die Deformation die Zentrallinie wieder in eine Schraubenlinie über. Wir setzen voraus, dass die Hauptträgheitsaxen mit der Haupt- und Binormale zusammenfallen, und beschränken uns auf kleine Formänderungen. Alsdann sind die Komponenten der Kraft und des Moments der äusseren Kräfte durch folgende Formeln gegeben:

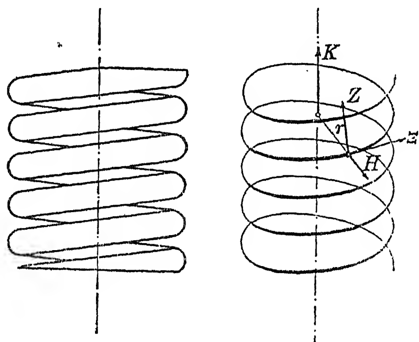


Fig. 5.

$$\begin{aligned} \Xi &= K \sin\alpha & M_\xi &= M \sin\alpha + Kr\cos\alpha \\ H &= 0 & M_\eta &= 0 \\ Z &= K\cos\alpha & M_\zeta &= M\cos\alpha - Kr\sin\alpha \end{aligned} \tag{25}$$

(r Halbmesser des Zylinders, α Neigungswinkel der Schraubenlinie) und die gegenseitige Annäherung (axiale Federung) Δh, sowie die Verdrehung $\Delta\varphi$ der Federenden[101]) durch:

$$\begin{aligned} \Delta h &= Lr\left[Kr\left(\frac{\sin^2\alpha}{C} + \frac{\cos^2\alpha}{A}\right) + M\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)\sin\alpha\cos\alpha\right], \\ \Delta\varphi &= L\left[Kr\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)\sin\alpha\cos\alpha + M\left(\frac{\cos^2\alpha}{C} + \frac{\sin^2\alpha}{A}\right)\right] \end{aligned} \tag{26}$$

100) *H. Résal*, Annales des mines 11 (1867), p. 127; ibid. 13 (1868), p. 301.

101) Vgl. *Thomson* und *Tait*, Treatise on natural philosophy I 2, Cambridge 1882, p. 139; vgl. auch *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 56 (1858), p. 285.

(A Torsionssteifigkeit, C Biegungssteifigkeit, L Bogenlänge der Zentrallinie.)

Zumeist ist α klein, so dass die Feder durch die Kraft K lediglich auf *Torsion*, durch das Moment M auf *Biegung* beansprucht ist, wie dies zuerst von *J. Binet*[104]) bemerkt wurde. Für eine Feder mit freien Enden ($M = 0$) wird in erster Annäherung ($\alpha = 0$)

$$\Delta h = \frac{Lr^2}{A} K \text{ }^{102)}.$$

Die Theorie der Schraubenfedern ist zuerst von *Johann* und *Jakob Bernoulli*[103]) in Angriff genommen worden. Später gaben angenäherte Resultate *J. Binet*[104]), *O. F. Mossotti*[105]), *J. Guilio*[106]), und *J. Thomson.*[102]) Die erste genaue Untersuchung stammt von *B. de St. Venant*[107]) und ist dann von *Thomson* und *Tait*[101]) etwas vereinfacht worden.

Die elastischen Eigenschaften der Schraubenfedern wurden durch Versuche neuerer Zeit von *J. W. Miller*[110]) untersucht; er fand die Theorie sehr gut bestätigt.

Ist die Zentrallinie der Feder eine Kegelschraubenlinie, so erhält man eine erste Annäherung, indem man die Formeln für eine zylindrische Schraubenfeder anwendet und dabei r von Gang zu Gang veränderlich ansetzt[111]). Genauere Untersuchungen findet man z. B. bei *A. Castigliano*[111]) und *H. Résal*[111]).

7. Theorie der Seile. Kennzeichnendes Merkmal der Seile ist *geringe Biegungssteifigkeit*; als Seile dürfen daher einerseits äusserst dünne Stäbe (Drähte), andererseits Gebilde aus Stoffen mit geringem Elastizitätsmodul (Hanf, Leder usw.) betrachtet werden. Für die annähernde Berechnung der Spannungen und Formänderungen solcher Gebilde kann man die klassische Theorie des dehnbaren, *vollkommen biegsamen*

---

102) *J. Thomson* bemerkte, daß die Federung Δh als der Weg der Kraft K dargestellt werden kann, wenn man K an dem Ende eines Stabes von der Länge L mit dem Hebelarm r angreifen läßt, so daß der Stab durch das Moment Kr tordiert wird; vgl. Cambridge and Dublin math. Journ. 3 (1848), p. 258.

103) *J.* und *J. Bernoulli*, Berlin Nouv. Mém. [1781], (1783), p. 347.

104) *J. Binet,* Journal de l'école polyt. cah. 10 (1814), p. 419.

105) *O. F. Mossotti,* Memorie di mat. e di fis. della Soc. Ital. 18 (1820), p. 243.

106) *J. Guilio*, Torino, Mem. delle reale acad. delle science 4 (1842), p. 329.

107) *B. de St. Venant*, Paris C. R. 17 (1843), p. 1020.

108) *H. Résal*, Paris C. R. 114 (1892), p. 37 u. 99.

110) *J. W. Miller,* Physical Review 14 (1902), p. 129.

111) Vgl. *V. Meyer*, Z. d. V. d. Ing. 44 (1900), p. 1791; *A. Castigliano*, Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern 1888, p. 66; *H. Résal*, C. R. Paris 114 (1892), p. 147.

Fadens heranziehen (vgl. IV 6, *P. Stäckel*, Nr. **23**); hier wollen wir einige typische Beispiele für die Anwendungen dieser Theorie anführen.

Bei *freihängenden Drahtleitungen*[112]) (Telegraphenlinien, Leitungen zur Übertragung elektrischer Kraft) ist die Aufgabe der Berechnung, den freien Durchhang bzw. die Drahtlänge bei der Montierung so zu bemessen, dass einerseits bei der niedrigsten Temperatur und bei der grössten Belastung, die im Betriebe vorkommen können, die Spannung eine zulässige Grenze nicht überschreitet, andererseits bei hoher Temperatur der Durchhang nicht übermässig gross wird. Als Belastung kommt ausser dem Eigengewichte das Gewicht der sich um den Draht bildenden Eisschicht, sowie Winddruck in Betracht. Da der Durchhang gegen die Spannweite meistens klein ist, kann man sich der annähernden Formeln für die Beziehungen zwischen Drahtlänge und Durchhang (Figur 6)

$$l = l_0 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l_0}$$

und zwischen Spannung und Durchhang

$$S = \frac{p l_0^2}{8f}$$

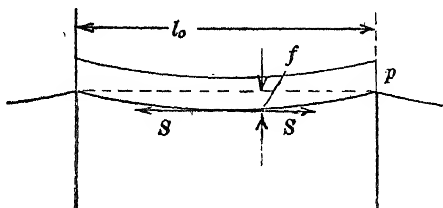


Fig. 6.

(l_0 Spannweite, l Drahtlänge, f Durchhang, p Belastung auf die Längeneinheit, S Spannung) bedienen.

Als weiteres Beispiel sei die Berechnung der Spannungen in einem *Treibriemen* (Treibseil) erwähnt. Die freihängenden Teile nehmen die Form einer gewöhnlichen Kettenlinie oder annähernd einer Parabel an; die Differenz der Spannungen in den beiden Fäden ist gleich der Umfangskraft, welche von der *treibenden* Scheibe auf die *getriebene* übertragen wird. Bei raschlaufenden Getrieben müssen auch die Trägheitskräfte berücksichtigt werden, die dadurch entstehen, dass die Riementeile an der Scheibe in Kreisbahn geführt werden[113]).

Schliesslich erwähnen wir die Theorie der *geschlungenen Drahtseile*. Wir beschränken uns auf einfach geschlungene Seile oder „Litzen“;

112) *W. M. Thomson*, Annals of math. 1 (1884), p. 34; *J. Herzog*, Elektrotechn. Zeitschr. 15 (1894), p. 437; *v. Glinski*, ibid. 24 (1903), p. 255.

113) Die Versuche, die in neuerer Zeit *W. Kammerer* veranstaltete, zeigen manche Unstimmigkeiten zwischen Erfahrung und Rechnung, namentlich wird die Pressung zwischen Scheibe und Riemen durch die Zentrifugalkraft in geringerem Maasse vermindert, als man erwarten würde. Auch liefert die Rechnung zu grosse Reibungskoëffizenten und unwahrscheinlich hohe spezifische Spannungen in dem gespannten Faden. Vgl. *W. Kammerer*, Mitteilungen über Forschungsarbeiten 56—57, (1908), Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 1085; ferner IV 10b (*R. v. Mises*) Nr. 7.

diese bestehen aus der geraden „Seele“ und mehreren um die Seele geschlungenen Drähten, deren Zentrallinien zylindrische Schraubenlinien bilden (mit der Seele zusammen als „Elemente“ bezeichnet). Wird ein langes Seil durch eine axiale Kraft P gezogen, so darf man annehmen, dass — abgesehen von den Seilenden — Punkte, die in einer zur Seilaxe senkrechten Ebene liegen, nach der Deformation ebenfalls eine Ebene bilden; dies liefert durch einfache geometrische Überlegung die Beziehung, dass die Grösse $\frac{\sigma_\iota}{E_\iota \cos^2 \varphi_\iota}$ (σ_ι Spannung auf die Flächeneinheit, E_ι Elastizitätsmodul, φ_ι „Flechtwinkel“ der einzelnen Elemente) für jedes Element denselben Wert hat.

Alsdann ergiebt sich die Spannung in dem i^{ten} Element, falls man dieselbe auf die Flächeneinheit des senkrecht zur Zentrallinie gerechneten Querschnittes bezieht[114]),

$$\sigma_\iota = \frac{P E_\iota \cos^2 \varphi_\iota}{\Sigma f_\iota E_\iota \cos^3 \varphi_\iota}$$

und der „resultierende Elastizitätsmodul“ des gesamten Seiles mit $F = \sum \frac{f_\iota}{\cos \varphi_\iota}$:

$$E = \frac{Pl}{F \Delta l} = \frac{\Sigma E_\iota f_\iota \cos^3 \varphi}{F}.$$

Seile, deren Elemente aus demselben Stoffe bestehen, zeigen daher eine grössere Dehnbarkeit, als die einzelnen Drähte allein.

Man erhält etwas genauere Resultate, falls man auch die Querkontraktion der Elemente berücksichtigt. Eine verfeinerte Theorie müsste auch die Biegungssteifigkeit der Elemente berücksichtigen[115]).

Betreffs des Widerstandes der Seile gegen Biegung sowie der dabei entstehenden Spannung sind wir lediglich auf empirische Formeln und Abschätzungen angewiesen[116]).

8. **Ebene Platten.** Die Theorie der ebenen Platten wird vorzüglich zur Berechnung ebener Wandungen herangezogen, welche Flüssigkeits- oder Dampfpressung ausgesetzt sind. Die z. B. von *G. Kirchhoff*, *Thomson* und *Tait* (s. IV 25 *Tedone-Timpe*, Nr. **14**b)

114) *H. Benndorf*, Z. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 56 (1904), p. 433; vgl. auch *J. Hrabák*, Die Drahtseile, Berlin 1902. — Manche Rechnungen dieser Monographie sind nicht einwandfrei; s. die Kritik von *A. Werner*, Z. d. öst. Ing. u. Arch. Ver. 54 (1902), p. 716 und 55 (1903), p. 28. Dehnungsversuche mit Drahtseilen unternahm u. a. *A. Divič*, Berg- u. Hüttenmännisches Jahrbuch (1904).

115) Die Gleichungen sind aufgestellt bei *F. Berg*, Diss. techn. Hochsch. Hannover (1907), jedoch ohne Lösungen.

116) Vgl. z. B. *C. Bach*, Maschinenelemente, 10. Aufl. (1908), p. 470; *J. Hrabák*, Die Drahtseile, Berlin 1902, p. 111 usf.

entwickelte übliche Näherungstheorie fordert lediglich die Integration der Differentialgleichung

$$D\Delta\Delta w = p \tag{27}$$

(w Durchbiegung, p Druck auf die Flächeneinheit, $D = \frac{m^2}{m^2-1}\frac{E\delta^3}{12}$ Biegungssteifigkeit der Platte, δ Plattendicke). Wenn man auch — wenigstens für einfache Randkurven[117]) — Lösungen der Gl. (27) besitzt, besteht vom Standpunkte der Anwendung aus die Schwierigkeit, dass die idealen Randbedingungen (entweder Spannungsfreiheit an den Rändern oder vollständige Einklemmung) in der Praxis selten erfüllt sind, vielmehr die Wirklichkeit zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt. So muss man sich oft damit begnügen, dass man Grenzen für die zu erwartenden Spannungen und Formänderungen angiebt.

Eine andere Schwierigkeit entsteht dadurch, dass Gl. (27) nur so lange richtig ist, als die Durchbiegung klein ist gegen die Plattendicke, die aber selbst gegen die übrigen Abmessungen klein sein muß. Ist die Durchbiegung von derselben Grössenordnung wie die Dicke, so dürfen in den Ausdrücken für die Formänderungskomponenten

$$\tag{28}\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}$$

die quadratischen Glieder nicht mehr vernachlässigt werden. Man gelangt schon dadurch zu einer genaueren Theorie, daß man nur jene quadratischen Glieder beibehält, welche die Ableitungen der senkrechten Verschiebung w enthalten. Setzt man nach dem Ansatze von *G. B. Airy* (s. Art. IV 25 *Tedone-Timpe*, Nr. **11** a) für die Mittelwerte der Spannungen $\sigma_x = \frac{1}{\delta}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x dz$ usw.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

117) Für die Lösung der Differentialgleichung für verschiedene Randkurven vgl. Art. IV 25 (*Tedone-Timpe*), Fussnoten 121—126; eine allgemeine Methode für numerische Lösungen gab *W. Ritz*, J. f. Math. 135 (1909), p. 1, vgl. auch *J. Simić*, Z. d. öst. Ing. u. Arch.-Ver. 60 (1908), p. 709.

so gelangt man zu zwei Differentialgleichungen für U und w:

$$(29)\qquad \begin{aligned} &\Delta\Delta U + E\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right) = 0 \\ &D\Delta\Delta w - \delta\left(\overline{\sigma}_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\overline{\tau}_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \overline{\sigma}_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = p. \end{aligned}$$

Diese verfeinerte Theorie der dünnen Platten liefert das Resultat, dass die Durchbiegung und damit die Spannungen nur anfangs mit dem Druck proportional wachsen, dann aber erheblich langsamer[118]) zunehmen. In dieser Hinsicht liegt die wirkliche Platte zwischen den beiden Grenzfällen der *vollkommen steifen Platte* nach Gl. (27) und der *vollkommen biegsamen Platte*, deren Gleichungen sich aus dem System (29) mit $D = 0$ ergeben[119]).

Dementsprechend zeigen dünne Platten im allgemeinen erheblich grössere Widerstandsfähigkeit und kleinere Durchbiegung, wie man nach der üblichen Plattentheorie erwarten möchte[120]). Ein Vergleich mit der genauen Theorie ist einstweilen nicht tunlich, da Lösungen des Gleichungssystems (29) nicht vorliegen. *J. Boobnoff*[120]) suchte die Verhältnisse dadurch annähernd wiederzugeben, dass er $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$, $\overline{\tau}_{xy}$ für die ganze Plattenebene durch konstante Mittelwerte ersetzte[121]).

Die erwähnten Schwierigkeiten lassen als natürlich erscheinen, dass man bei Anwendung der Plattentheorie noch oft die Erfahrung und insbesondere Versuchsergebnisse heranziehen muss. Da ausserdem — wenn auch die Bedingungen zur Anwendung der Gl. (27) ziemlich gut erfüllt sind — ihre Lösung meistens nicht in endlicher Form ausgedrückt werden kann, so giebt man oft *halbempirischen* und *empirischen* Formeln den Vorzug. Die Gestalt dieser Formeln wird dann mehr oder weniger der Theorie entnommen und die Koeffizienten werden den Versuchswerten angepasst[122]). Die meisten dieser

---

118) Vgl. die Versuche von *C. Bach*, Z. d. V. d. Ing. 44 (1890), p. 1041. Abhandlungen u. Berichte, p. 111.

119) Vgl. *A. Föppl*, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 5, p. 132.

120) Vgl. *J. Boobnoff*, Inst. of Naval. Arch. Trans. 44 (1902), p. 15.

121) Als annähernde Lösung der Gl. (29) kann gewissermassen auch die Berechnung von Behälterböden nach *Ph. Forchheimer*, Z. für Bauwesen 44 (1894), p. 450 gelten.

122) Insbesondere seien hier die halbempirischen Formeln von *C. Bach* erwähnt. Seine *Balkenmethode* — vgl. Z. d. V. d. Ing. 34 (1890), p. 1041, Abhandlungen und Berichte, p. 111 — besteht lediglich darin, dass er die durch Versuche ermittelte Bruchlinie durch eine gerade Linie ersetzt und das resultierende Biegungsmoment in bezug auf diese Linie berechnet, wobei man allerdings über die Verteilung der Auflagerkräfte willkürlich verfügen muss. Das Biegungsmoment liefert dann einen längs der Bruchlinie genommenen *Mittelwert* für die

Formeln dürften nicht mehr liefern, als was man auf Grund der mechanischen Ähnlichkeit aus den Differentialgleichungen unmittelbar folgern kann.

Die Plattentheorie findet ihre wichtigsten Anwendungen im *Kesselbau* und *Schiffbau.* Unter den Kesselbestandteilen, die als ebene Platten berechnet werden, seien erwähnt die *ebenen Wandungen der Feuerbüchsen, die flachen Böden der Dampfkessel, Platten zur Befestigung der Siederohre* usw., welche alle einem hohen Dampfdrucke ausgesetzt sind. Eine eigenartige Aufgabe bieten die *„verankerten Platten"*, die in einzelnen regelmässig verteilten Punkten — zumeist mit Schraubenbolzen — gestützt sind. Die Aufgabe wurde zuerst von *Lavoinne*[123]) behandelt; da die Ergebnisse der Untersuchung ziemlich verwickelt sind, so führt man das Problem zumeist durch vereinfachende Annahmen auf eine einfachere Aufgabe zurück, indem man sich die Platte längs geraden Linien gestützt denkt.

Im *Bau der eisernen Schiffe* hat man z. B. die Festigkeit der Bodenplatten auf Grund der Plattentheorie zu berechnen. Mit diesen Fragen beschäftigen sich viele Arbeiten[124]). Da diese Platten im Verhältnis zu ihrer Spannweite als sehr dünn betrachtet werden können, erhält man auf Grund der üblichen Theorie erheblich grössere Spannungen, wie sie tatsächlich entstehen mögen; entsprechend erhält man bei einer Neuberechnung zu grosse Plattendicken[125]).

Bei der Berechnung der *Zylinderdeckel*[126]) der Dampf- und Gasmaschinen, der *Deckel der Schieberkasten*[127]) sowie der *Kolbenscheiben*[128])

Spannungen. Nach der *Streifenmethode* schneidet *C. Bach* einen mittleren Streifen aus der Platte heraus, berechnet denselben als dünnen Stab und berücksichtigt die *Stützung durch seitliche Kräfte* mit Hilfe entsprechend bestimmter Koeffizienten. Ähnliche Überlegungen findet man z. B. bei *W. H. Burr,* Elasticity and resistance of materials, 5. Aufl., New-York 1900, p. 666; ferner *Galliot,* Annales des ponts et ch. 14 (1887) p. 704.

123) *Lavoinne,* Annales des ponts et chaussées 5 (1872), p. 276, vgl. auch *F. Grashof,* Theorie der Elast. und Festigkeit, Berlin (1878), p. 358; angenähert bei *C. Bach,* Z. d. V. d. Ing. 38 (1894), p. 341, Abhandlungen u. Berichte, p. 188. Daselbst eine Zusammenstellung empirischer Formeln und Versuche.

124) Vgl. *T. C. Read*, Inst. of Nav. Arch. Trans. 27 (1886), p. 395; *J. A. Yates*, ibid. 32 (1891), p. 190; *F. Elgar*, ibid. 34 (1893), p. 38; *G. H. Bryan,* ibid. 35 (1894), p. 113; *H. Sellentin*, Schiffbau 5 (1903), p. 3.

125) Vgl. *J. Boobnoff*, Inst. of Nav. Arch. Trans. 44 (1902), p. 15.

126) Vgl. *F. Grashof,* Theorie der Elast. u. Festigkeit, Berlin (1878), p. 344.

127) *C. Bach,* Abhandlungen und Berichte, p. 101.

128) Die theoretischen Rechnungen von *G. Schwarz,* Z. d. V. d. Ing. 45 (1901), p. 1419 und *O. C. Reymann*, Z. d. V. d. Ing. 37 (1893), p. 1084 und Z. d. V. d. Ing. 40 (1896), p. 120 scheinen viele willkürliche Voraussetzungen zu enthalten. Ein-

bedient man sich zumeist empirischer Formeln; die theoretischen Rechnungen stehen auf ziemlich unsicherem Boden, insbesondere da der Einfluss der versteifenden *Rippen* schwer in Rechnung gestellt werden kann. In neuerer Zeit sind viele Versuche zu näherer Klarlegung der Verhältnisse unternommen worden.

9. Rohre und Schalen.

Man unterscheidet *dünne* und *dickwandige* Rohre und Schalen, je nachdem die Wanddicke klein ist gegen die übrigen Abmessungen (insbesondere gegen den Krümmungshalbmesser). In dem ersten Falle kann die *Theorie der unendlich dünnen Schalen*[129]) Anwendung finden, in dem zweiten Falle sind genauere Untersuchungen über die Spannungsverteilung im Innern der Wand nötig.

9a. Dünne zylindrische Rohre. Ist die Belastung *in der Richtung der Zylinderaxe konstant*, so ist der Spannungszustand in der Mitte eines langen Rohres wenig verschieden von dem eines Ringes, der in der eigenen Ebene deformiert wird. Unter dieser Voraussetzung ist eine Reihe praktisch wichtiger Aufgaben gelöst worden.

Die Berechnung der Spannung in einer kreisförmigen Zylinderwandung (Dampfkessel) vom Radius R unter dem gleichförmigen Drucke p stammt von *Lamé* und *Clapeyron*[130]) her. Die tangentielle Spannung beträgt $\sigma_t = \frac{pR}{\delta}$ (δ = Wanddicke); die Biegung infolge der Veränderung des Durchmessers kann vernachlässigt werden. Ist jedoch das Rohr nicht kreisförmig oder der Druck nicht gleichförmig verteilt, so treten im allgemeinen bedeutende Biegungsspannungen auf. Den Spannungszustand elliptischer Rohre, wie sie früher im Kesselbau viel benutzt wurden, untersuchte *H. Résal*[131]); die Festigkeit elliptischer Rohre mit inneren Stützen, die durch äusseren Druck beansprucht werden, betrachtete *W. Hovgaard*[131]), u. zw. mit Rücksicht auf Unterseeboote. Wichtig erscheint der Fall geringer Abweichungen von der Kreisform, wie sie im Betriebe infolge ungleichförmiger Erwärmung auftreten. In diesen Fällen können erhebliche Biegungsspannungen entstehen, auf welche man im vorhinein nicht rechnete. Besonders gefährlich erscheinen sie bei Rohren unter äusserem Überdrucke

---

gehende Versuche findet man bei *C. Codron*, Revue de mécanique 13 (1903), p. 340; 14 (1904), p. 238; 15 (1904), p. 317.

129) Vgl. z. B. *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe*, Leipzig 1907, p. 586 usf.

130) *Lamé* und *Clapeyron*, Paris, Mém. prés. par div. savants 4 (1828), p. 465.

131) *H. Résal*, Journal des math. 5 (1879), p. 319; *W. Hovgaard*, Inst. Nav. Arch. Trans. 42 (1900), p. 93; vgl. auch *E. Hurlbrink*, Schiffbau 9 (1908), p. 517.

(Flammrohre), da der äussere Druck die Abweichungen noch mehr vermehrt (vgl. Nr. **13**).

Die Beanspruchung weiter, dünner, kreisförmiger Rohre durch das Gewicht des Wassers bei verschiedener Lagerung hat *Ph. Forchheimer*[132]) berechnet. In diesem Falle sind die Biegungsspannungen ebenfalls überwiegend.

Ist der Spannungszustand nach der Axenrichtung veränderlich, jedoch *axensymmetrisch*, so lassen sich auch viele Aufgaben verhältnismässig einfach erledigen. Die Differentialgleichung der deformierten Meridianlinie lautet (vgl. Figur 7):

$$(30)\qquad \frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{\delta^2}{12}\,\frac{d^4 w}{dx^4}+\frac{w}{R^2}=\frac{p}{E\delta}.$$

E. Winkler[133]) untersuchte durch Lösung dieser Differentialgleichung den Einfluss der gehinderten Dehnung an den Enden zylindrischer Kessel auf die Beanspruchung der Wandung; *M. Westphal*[134]) berechnet den Einfluss der Flanschen auf die Festigkeit von Rohren. *R. Lorenz*[135]) betrachtet die Festigkeit von Zylindern, die durch Rippen verstärkt werden. Die beiden letzteren Fälle sind von *C. Bach*[136]) zum Gegenstand von Festigkeitsversuchen gemacht worden.

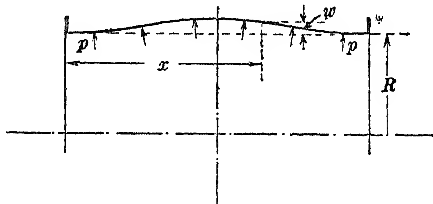


Fig. 7.

Die Längsspannungen, die in einem Hohlzylinder durch ungleichförmige Erwärmung entstehen, berechnete *R. Lorenz*[137]) (z. B. gekühlte Kolbenstangen der Grossgasmaschinen).

Ist die Wanddicke veränderlich, so erhält man eine erste Annäherung, falls man die Wanddicke in Gl. (30) als Funktion von x betrachtet. So untersuchten z. B. *H. Müller-Breslau*[138]) und *C. Runge*[138]) die Formänderung eines vertikalen Wasserbehälters, dessen Wandstärke sich sprungweise ändert, während *H. Reissner*[138]) den Fall stetig veränderlicher Wanddicke behandelte.

132) *Ph. Forchheimer*, Z. öst. Ing. Arch. Ver. 56 (1904), p. 133.
133) *E. Winkler*, Civilingenieur 6 (1860), p. 325.
134) *M. Westphal*, Z. d. V. d. Ing. 41 (1897), p. 1036.
135) *R. Lorenz*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 1706.
136) *C. Bach*, Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 1700.
137) *R. Lorenz*, Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 743.
138) *H. Müller-Breslau*, Statik der Baukonstruktionen II 2, Leipzig 1892, p. 260. *C. Runge*, Z. f. Math. u. Phys. 51 (1904) p. 254. *H. Reissner*, Beton und Eisen 7 (1908).

9b. Dünne Schalen mit nichtzylindrischen Zentralflächen. Wird eine dünne Kugelschale durch gleichmässigen Druck belastet, so geht sie — falls die Dehnung an den Rändern nicht gehindert wird — wieder in eine Kugelschale über. Es entsteht dabei die gleichförmige Zug- (Druck) -spannung $\sigma = \frac{Rp}{2\delta}$, und die Biegung kann vernachlässigt werden. Dieser Spannungszustand ist in den gewölbten Böden zylindrischer Dampfkessel möglich, falls die Dehnung am Rande mit der Dehnung der zylindrischen Wandung verträglich ist. *G. Lamé*[139]) und *B. de St. Venant*[139]) fanden dafür die Bedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m-1}{2m-1}\,\frac{\delta_1}{\delta_2}$$

(R_1, δ_1 Radius und Wanddicke des Bodens, R_2, δ_2 dieselben Grössen für die Kesselwandung, s. Figur 8). Wenn auch diese Bedingung erfüllt ist, so treten trotzdem Biegungsspannungen in der Nähe des Randes auf, da Boden und Kesselwandung nicht längs einer Linie zusammenhängen, sondern der erstere gekrempt und genietet wird. Eine genauere Untersuchung mit Berücksichtigung der Krempung unternahm *H. Résal*[139]).

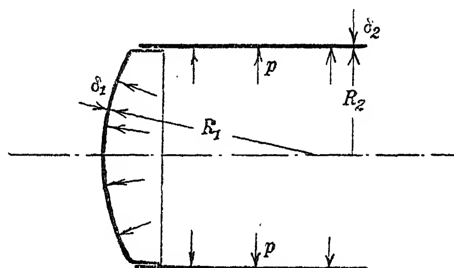


Fig. 8.

Über die Festigkeit voller Kesselböden unter innerem Drucke hat *C. Bach*[140]) ausgedehnte Versuche veranstaltet. Derselbe untersuchte die Festigkeit von Böden, welche für Befestigung der Flammrohre Öffnungen besitzen. Um einen Vergleich der Versuchsergebnisse mit den theoretischen Rechnungen zu ermöglichen, führte *C. Pfleiderer*[141]) die Rechnung für einige typische Beispiele in allen Einzelheiten durch. Eine Theorie für die Festigkeit gewölbter Böden gegen äusseren Druck mit Rücksicht auf die Einbeulungsgefahr liegt bisher nicht vor (vgl. Nr. **13**).

139) *G. Lamé*, Paris C. R. 30 (1850), p. 157. *B. de St. Venant*, Journal des math. 10 (1865), p. 297. *H. Résal*, Paris C. R. 79 (1874), p. 726.

140) *C. Bach*, Z. d. V. d. Ing. 43 (1899), p. 1585; ibid. 46 (1902), p. 333; ibid. 50 (1906), p. 1940; ibid. 52 (1908), p. 792; Mitteilungen über Forschungsarbeiten 51—52 (1908).

141) *C. Pfleiderer*, Mitteilungen über Forschungsarbeiten 52 (1908), p. 88. Vgl. auch die etwas unsicheren Rechnungen von *W. Schüle*, Dinglers pol. Journal 315 (1900), p. 661.

Von ähnlichen Untersuchungen sei noch die Berechnung der hängenden Kugelboden von Behältern nach *Ph. Forchheimer*[142]) und *M. Köchlin* erwähnt.

Die Deformation einer *dünnen Ringfläche* ist für die Theorie des *Bourdon*schen Manometers vom Interesse. Eine angenäherte Untersuchung lieferte *E. Hill*[143]), qualitative Betrachtungen über die Wirkungsart des Instrumentes *Lord Rayleigh*[143]), *A. M. Worthington*[143]), *A. G. Greenhill*[143]). Genauere Rechnungen über die Deformation von Ringflächen — jedoch ohne Anwendung der Ergebnisse — findet man bei *L. Maurer*[144]).

9c. Dickwandige Rohre und Schalen. Für die Berechnung dickwandiger Rohre werden die Resultate von *G. Lamé* und *E. Clapeyron*[145]) über Deformation eines unendlich langen Kreiszylinders herangezogen. Wird der innere Druck p, der äussere Null gesetzt, so tritt die grösste Spannung an der inneren Zylinderfläche senkrecht zum Längsschnitte auf und beträgt

$$\sigma_t = p\,\frac{R_a^2 + R_i^2}{R_a^2 - R_i^2}. \tag{31}$$

Nach dieser Formel würde stets $\sigma_t > p$ gelten, woraus man den Schluss zog, dass kein Rohr einen inneren Druck auszuhalten vermag, der grösser ist, als die Zugfestigkeit seines Materials. Die Versuche scheinen jedoch dafür zu sprechen, dass die Widerstandsfähigkeit der Rohre bedeutend grösser ist, als man nach Formel (31) folgern möchte, und zwar besonders bei plastischen Materialien, da nach der Überschreitung der Elastizitätsgrenze die Spannungsverteilung sich weit gleichmässiger gestaltet und so das Material besser ausgenützt wird[146]).

Über die Festigung der Rohre durch warm aufgezogene Ringe vgl. Art. IV 18, Nr. **11** (*Cranz*).

L. Lecornu[147]) untersuchte den Spannungszustand eines dickwan-

142) *Ph. Forchheimer*, Z. für Bauwesen 44 (1894), p. 450. *M. Koechlin*, Gén. Civ. 36 (1899), p. 273.

143) *E. Hill*, Mess. of Math. 1 (1871), p. 15; *Lord Rayleigh*, London Royal Soc. Proc. 45 (1888), p. 105 = Scientific Papers vol. 3, Cambridge 1902, p. 217; *A. M. Worthington*, Nature 41 (1890), p. 296; *A. G. Greenhill*, ibid. 41 (1890), p. 517.

144) *L. Maurer*, Archiv der Math. u. Phys. 6 (1904), p. 1 u. 260.

145) *G. Lamé* und *E. Clapeyron*, J. f. Math. 7 (1831), p. 382.

146) Vgl. die Versuche *M. Grüblers* über „Ringspannungen“, Z. d. V. d. Ing. 44 (1900), p. 1157, sowie *W. Krüger*, Z. d. Ver. d. Ing. 53 (1909), p. 1399. Zusammenstellung von früheren Versuchsergebnissen bei *Th. Pregél*, Dinglers pol. Journ. 315 (1900), p. 453.

147) *L. Lecornu*, Paris C. R. 127 (1898), p. 168; J. éc. pol. (2) 5 (1900), p. 79.

digen Kreisringes mit Anwendung auf die Festigkeitsberechnung der „Pneumatics" der Motorfahrzeuge.

10. Konstruktionsteile mit Abmessungen von gleicher Grössenordnung. Kugeln und Rollen. Bei solchen Konstruktionsteilen ist die Ermittelung der Spannungsverteilung im Innern des Körpers weniger von Interesse, als bei dünnen Stäben, Platten usw., da ihre Abmessungen aus konstruktiven Rücksichten meistens so reichlich bemessen werden, dass die Spannungen weit unterhalb der zulässigen Grenze bleiben. Erhebliche Spannungen können aber in der Nähe der Angriffspunkte der äusseren Kräfte auftreten und die Untersuchung dieser *lokalen* Spannungen ist hauptsächlich dann von Wichtigkeit, wenn die Kraftübertragung durch Berührung an einzelnen Punkten oder längs einzelner Linien stattfindet. Typische Beispiele liefern dazu die in den Lagern zur Anwendung gelangenden *Kugeln* und *Rollen*, ferner verschiedene *Getriebe*, wie Zahnräder, Schnecken usw.

Annähernde Untersuchungen über die Eindrückung der Kugeln und Rollen (Walzen) in ebene oder gekrümmte Flächen gab *F. Grashof*[148]), auf genauer mathematischer Grundlage ist jedoch das Problem der Berührung elastischer Körper erst von *H. Hertz*[149]) gelöst worden (vgl. Art. IV 25. *Tedone-Timpe*, Nr. **15** b und IV 26. *Lamb*, Nr. **8** d). Er suchte dadurch einerseits eine Theorie des *Stosses*, andererseits eine theoretische Grundlage zur *Härtebestimmung* zu geben; seine Resultate können jedoch auch zur Beurteilung der Beanspruchung in der Nähe der Berührungsstelle herangezogen werden. Werden zwei Kugeln von demselben Material und von den Radien r_1 und r_2 durch die Kraft P gegeneinander gedrückt, so entsteht eine kreisförmige Druckfläche, deren Halbmesser

$$\varrho = \sqrt[3]{\frac{(m-1)(m^2-1)}{4m^2} \frac{P}{E} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

beträgt (E und m Elastizitätskonstanten). Die grösste Spannung tritt im Mittelpunkte der Druckfläche auf und beträgt

$$(32) \qquad \sigma_m = \frac{3}{2} \frac{P}{\varrho^2 \pi} = \frac{3}{\pi} \sqrt[3]{\frac{2 m^4 E}{(m^2-1)^2 (m-1)^2} \frac{(r_1+r_2)^2}{r_1^2 r_2^2}}.$$

In der Praxis ist die Berührung zwischen Kugel und Ebene, bzw. zwischen einer Fläche, deren Krümmungshalbmesser gross ist gegen den Kugelradius (z. B. zwischen Kugeln und Wellenzapfen in den Kugel-

148) *F. Grashof*, Theorie der Elast. u. Festigkeit. Berlin 1878, p. 49 usf.

149) *H. Hertz*, J. für Math. 92 (1882), p. 156; ferner Verhandlungen des Ver. zur Förd. d. Gewerbefl. 61 (1882), p. 449.

lagern) von besonderer Wichtigkeit. Mit $\frac{1}{r_2} = 0$ und $m = \frac{10}{3}$ wird

$$\sigma_m = 0{\cdot}388 \sqrt[3]{E \frac{P}{r_1^2}}.$$

Diese Formel wird zur Beurteilung der Beanspruchung benutzt; man erhält aber sehr abweichende Werte für die zulässige Grenze der Belastung, je nachdem man die reduzierte Spannung oder die grösste Schubspannung als Maass der Beanspruchung annimmt. Man ist einstweilen darauf angewiesen, die zulässige Grenze für $\left(\frac{P}{r^2}\right)$ durch Versuche festzustellen.

Eingehende Versuche unternahmen über die Festigkeit und Formänderungen von gehärteten Stahlkugeln *G. Stribeck*[150]) und *Schwinning*[151]). Die Messung der Abplattung gegen einander gedrückter Kugeln zeigt gute Übereinstimmung mit der Theorie, solange die Formänderungen lediglich elastisch sind.

Die Festigkeit von zylindrischen Rollen untersuchten *H. Deslandres*[152]) und *C. Bach*[153]). Ein Vergleich mit der *Hertz*schen Theorie liegt bisher nicht vor.

Die bei Berührung von zylindrischen Zähnen der Zahnräder auftretenden Spannungen betrachtete auf Grund von einfachen, jedoch nicht streng begründeten Annahmen *O. Lasche*[154]); eine Anwendung der *Hertz*schen Gleichungen gab *E. Vidéky*[155]), der durch Berechnung der elastischen Formänderungen auch die Verteilung des Druckes auf mehrere gleichzeitig im Eingriff stehenden Zähne bestimmte.

11. Kinetostatische Beanspruchungen.

Von der Bewegung herrührende Beanspruchungen spielen im allgemeinen eine wesentliche Rolle bei rotierenden Maschinenteilen, sowie bei solchen, welche rasche Geschwindigkeitsänderung erfahren. Falls man, wie in Nr. **1** erwähnt wurde, auf die Wirkung jener Trägheitskräfte sich beschränkt, die der starren Bewegung entsprechen, wird die Ermittelung des Spannungszustandes auf den Fall statischer Belastung zurückgeführt, dadurch, daß man die nach den Regeln der *Kinetostastik* (s. Art. IV 10, *K. Heun-R. v. Mises*) ermittelten

150) *G. Stribeck,* Z. d. V. d. Ing. 45 (1901), p. 73; ibid. 51 (1907), p. 1445; Mitteilungen über Forschungsarbeiten 2 (1901), p. 1.

151) *Schwinning,* Z. d. V. d. Ing. 45 (1901), p. 332; vgl. auch *F. Heerwagen,* ibid. p. 1701.

152) *H. Deslandres,* Annales des ponts et chaussées 5 (1893), p. 1160.

153) *C. Bach,* Z. d. V. d. Ing. 33 (1889), p. 449; ibid. 38 (1894), p. 199.

154) *O. Lasche,* Z. d. V. d. Ing. 53 (1899), p. 1417.

155) *E. Vidéky,* Z. des öst. Ing. und Arch.-Ver. 60 (1908), p. 579.

Trägheitskräfte als stetig verteilte Last zu den äusseren Kräften hinzufügt.

11a. Kinetostatische Beanspruchung der Stäbe. Bei Maschinenteilen, die als dünne Stäbe betrachtet werden dürfen, kann man die Trägheitskräfte für ein Stabelement integrieren und die so ermittelte Resultierende als eine längs der Zentrallinie stetig verteilte Last zu den äusseren Kräften hinzufügen. Man erhält aber auch unmittelbar die resultierende Kraft und das resultierende Moment für einen Querschnitt, wenn man den betreffenden Stab in dem starr gedachten Mechanismus durch seine Zentrallinie ersetzt und die *Schnittkraft* und das *Schnittmoment* in bezug auf den betreffenden Querschnitt nach den Methoden der Kinetostatik ermittelt.

Als Beispiel sei die Festigkeitsberechnung der *Schubstangen* rasch laufender Maschinen, sowie die Beanspruchung *rotierender Ringe* angeführt[156]).

Für die Berechnung der Schubstangen[157]) ermittelt man durch Rechnung oder graphisch jene Kurbelstellung, welche für die Schubstange die grösste Belastung liefert. Man hat es dann mit einem Falle kombinierter Druck- und Biegungsbeanspruchung zu tun. Vgl. IV 10b Nr. **13** (*R. v. Mises*).

In einem gleichförmig rotierenden kreisförmigen Ringe — dessen Querschnittsabmessungen klein sind gegen den Ringdurchmesser — entsteht bei Vernachlässigung des Einflusses der Radarme die *mittlere Zugspannung*

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g} U^2 \tag{33}$$

(γ spezifisches Gewicht des Materials, g Beschleunigung der Schwere, U Umfangsgeschwindigkeit). Durch Festsetzung einer zulässigen Spannung ergiebt sich daher eine obere Grenze für die Umlaufgeschwindigkeit, welche *nur von den Materialkonstanten, nicht aber von den Abmessungen abhängig ist.* Gl. (33) wird zu einer ersten Abschätzung der in einem *Schwungradkranze* entstehenden Spannung benutzt. Berücksichtigt man den Einfluss der Radarme, so fällt zwar die mittlere Spannung geringer aus, es treten jedoch Biegungsspannungen hinzu, so dass die maximale Spannung im allgemeinen höher ist, als der Wert nach Gl. (33)[158]).

---

156) Als weiteres Beispiel sei die Beanspruchung von rotierenden Regulatorfedern durch ihre eigene Zentrifugalkraft erwähnt. *A. Stodola*, Z. d. V. d. Ing. 43 (1903), p. 528; *J. Lüttmann*, Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 1758; *J. Zvoníček*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 303.

157) Vgl. z. B. *J. Perry*, Phil. Mag. 33 (1892), p. 269.

158) Betreffs Litteraturangaben vgl. die Fussnoten 77), 78), 79) und 81).

11 b. Kinetostatische Beanspruchung der Platten (Scheiben).

Von grosser praktischer Wichtigkeit ist die Festigkeitsberechnung *rotierender Scheiben*, mit Rücksicht auf die „Explosionsgefahr“ der *Schleifsteine* und anderer in rascher Rotation begriffener Scheiben, ferner mit Rücksicht auf die zweckmässige Gestaltung der *Dampfturbinenräder*, bei denen man die Sicherheit mit möglichst günstiger Materialausnützung verknüpfen will. Bei gleichförmiger Drehung liefert die Zentrifugalkraft eine stetig verteilte, radiale Belastung, die die Scheibe in ihrer eigenen Ebene verzerrt (vgl. auch Art. IV 25 *Tedone-Timpe*, Nr. **10**a).

α) Scheiben mit konstanter Dicke. Die strenge Lösung für den Spannungszustand in einem gleichmässig rotierenden Kreiszylinder gab *F. Purser*[159]), angenäherte Lösungen *C. Chree*[160]) und *J. H. Michell*[161]). Für geringe Scheibendicken wird die strenge Lösung durch die Lösung des *ebenen Problems* genügend angenähert, welche von *J. Cl. Maxwell*[162]) angegeben wurde. Auch für Scheiben mit grösserer Dicke liefert der ebene Spannungszustand *Mittelwerte* für die Spannungen, die für praktische Rechnungen ebenfalls genügend genau sind.

Werden die Mittelwerte für die tangentielle und radiale Spannung mit $\bar{\sigma}_t$ und $\bar{\sigma}_r$ bezeichnet, so lautet die Gleichgewichtsgleichung in Polarkoordinaten (ω Winkelgeschwindigkeit)

$$(34) \qquad \frac{d}{dr}(r\bar{\sigma}_r) - \bar{\sigma}_t + \gamma r^2 \omega^2 = 0$$

und die Kompatibilitätsgleichung

$$(35) \qquad (1+m)(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_t) = r\frac{d}{dr}(m\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_r).$$

Die Gleichungen 34) und 35) liefern die Differentialgleichung für $\bar{\sigma}_r$

$$(36) \qquad r^2\frac{d^2\bar{\sigma}_r}{dr^2} + 3r\frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} + \frac{3m+1}{m}\gamma r^2\omega^2 = 0$$

159) *F. Purser*, Irish Acad. Dublin. Trans. 32 (1902), p. 31.

160) *C. Chree*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 7 (1891), p. 201 u. 283.

161) *J. H. Michell*, London math. Soc. Proc. 31 (1899), p. 124.

162) *J. Cl. Maxwell*, Edinb. Roy. Soc. Trans. 20 (1856), p. 87; Scientific Papers I, p. 30. Das Problem wurde — augenscheinlich ganz unabhängig von einander — von *J. Hopkinson*, Messenger of math. 2 (1871), p. 873, *R. Grossmann*, Verhdlgen. des Ver. zur Beförderung des Gewerbefl. 62 (1883) p. 216, und *M. Grübler*, Festschrift Riga 1887, p. 183 und Z. d. V. d. Ing. 41 (1897), p. 860, behandelt. Die *Hopkinson*sche Arbeit enthält einen Rechnungsfehler, der auch das Resultat stört.

und die Ausdrücke für die Spannungen:

$$(37)\qquad \begin{aligned}\overline{\sigma}_r &= A - \frac{B}{r^2} - \gamma\omega^2 \frac{3m+1}{8m} r^2\\ \overline{\sigma}_t &= A - \frac{B}{r^2} - \gamma\omega^2 \frac{m-3}{8m} \cdot r^2.\end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten werden dadurch bestimmt, dass an der äusseren Begrenzung Spannungsfreiheit, an der inneren Bohrung zumeist ein gewisser Montierungsdruck vorausgesetzt wird.

Diese einfache Theorie wurde von *M. Grübler*[163]) zum Vergleich mit Festigkeitsversuchen an *Schleifsteinen* aus Sandstein herangezogen. Er fand die theoretische Folgerung bestätigt, dass die Festigkeit einer vollen Scheibe durch eine Bohrung erheblich vermindert wird. Die Versuche stehen aber insofern nicht im Einklang mit der Theorie, als die Rechnung für die Umdrehungszahlen, bei denen sich erst Risse zeigten, erheblich grössere Spannungen ergiebt als die direkte durch Zugversuche ermittelte Zugfestigkeit des Sandsteins[164]). Ob die Grundlagen der Rechnung unsicher sind — da der Sandstein nicht dem Proportionalitätsgesetze gehorcht — oder Schwierigkeiten experimenteller Natur vorliegen, ist bisher nicht entschieden worden[165]).

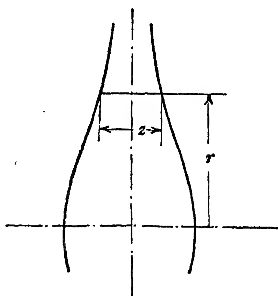


Fig. 9.

β) *Scheiben mit veränderlicher Dicke.* Man erhält eine erste Annäherung, indem man für die Spannungen und Formänderungen Mittelwerte über die veränderliche Dicke bildet und voraussetzt, dass zwischen diesen Mittelwerten dieselben Kompatibilitätsbedingungen bestehen, wie zwischen den Spannungen selbst. Die Gleichgewichtsgleichung[166]) für diesen *„verallgemeinerten ebenen Spannungszustand"* lautet, falls $z = z(r)$ die veränderliche Dicke bezeichnet (s. Figur 9):

$$\frac{d}{dr}(rz\overline{\sigma}_r) - z\overline{\sigma}_t + \gamma r^2 z\omega^2 = 0,$$

während Gl. (35) unverändert bleibt. Man erhält alsdann folgende

163) *M. Grübler,* Z. d. V. d. Ing. 41 (1897), p. 860.

164) Vgl. *M. Grübler,* Z. d. V. d. Ing. 43 (1899), p. 1294 und ibid. 50 (1906), p. 294.

165) Vgl. *M. Ensslin,* Z. d. V. d. Ing. 44 (1900), p. 1577; *W. Schüle,* Dinglers pol. Journ. 315 (1900), p. 36; *M. Grübler,* Z. d. V. d. Ing. 44 (1900), p. 1157.

166) *A. Stodola,* Die Dampfturbinen, 3. Aufl. 1905, p. 154.

Differentialgleichung für $\overline{\sigma_r}$

$$(38)\quad r^2 \frac{d^2 \overline{\sigma_r}}{d r^2} + \left\{3 + r \frac{d}{dr} (\log z)\right\} r \frac{d \overline{\sigma_r}}{dr}$$
$$+ \left\{r^2 \frac{d^2}{d r^2} (\log z) + \frac{m+2}{m} r \frac{d}{dr} (\log z)\right\} \overline{\sigma_r} + \frac{m+3}{m} \gamma r^2 \omega^2 = 0$$

und eine ähnliche Gleichung für $\overline{\sigma_t}$.

Die Meridiankurven der Scheibenräder kann man oft mit ziemlicher Genauigkeit durch den Ansatz

$$z = C r^{\alpha}$$

annähern, und für diesen Ansatz vermag man die Gl. (38) in endlicher Form zu integrieren. In der Praxis hat man aber zumeist die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d. h. von einer gewissen Spannungsverteilung ausgehend das entsprechende Profil zu entwerfen. Um gute Materialausnützung zu erzielen, sucht man der „Form gleicher Festigkeit“ (gleicher Beanspruchung) möglichst nahe zu kommen. *A. Basch* und *A. Léon*[167]) untersuchten ausführlich die Formen gleicher Beanspruchung entsprechend den verschiedenen Annahmen bezüglich der Bruchgefahr (s. Nr. **1**). Man hat dann im allgemeinen eine Beziehung zwischen $\overline{\sigma_r}$ und $\overline{\sigma_t}$ und erhält nun aus (38) eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Dicke $z = z(r)$, d. h. eine zweiparametrige Schaar von möglichen Meridiankurven. Die Lösungen, die den Bedingungen $\overline{\sigma_r} = \overline{\sigma_t} =$ konst entsprechen, sind in der affinen Kurvenschaar

$$(39)\qquad z = z_0 e^{-\gamma \frac{\omega^2}{2\sigma} r^2}$$

enthalten (z_0 eine Konstante, σ der gemeinsame konstante Wert von $\overline{\sigma_r}$ und c_t). Diese Formel wird schon seit längerer Zeit in der Konstruktionspraxis benützt[168]).

Da man durch konstruktive Gründe zumeist gezwungen ist, bei der Gestaltung der Scheibenräder von den Formen gleicher Festigkeit wesentlich abzuweichen, hat *A. Stodola*[169]) ein allgemeines Verfahren zur graphischen Integration der Gl. (38) angegeben; er verfügt dabei über die Spannungen in der Weise, dass zwischen guter Materialausnützung und konstruktiven Forderungen ein richtiger Ausgleich getroffen wird.

11c. Rotierende Körper mit endlichen Abmessungen. Ist die Scheibendicke nicht klein und insbesondere rasch veränderlich, so

---

167) *A. Basch* und *A. Léon*, Wien. Ber. 116 (1907) p. 1353.

168) Namentlich wurden die Scheibenräder der *Laval*schen Dampfturbinen nach dieser Formel entworfen.

169) *A. Stodola*, Die Dampfturbinen, 3. Aufl. 1905, p. 170.

kann der „verallgemeinerte ebene Spannungszustand" nur als rohe Annäherung gelten. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Meridiankurve scharfe Krümmung aufweist. *A. Stodola*[170]) geht von den allgemeinen Gleichungen für den axensymmetrischen Spannungszustand aus, und indem er die Lösung der Gl. (38) als erste Annäherung zulässt, sucht er dieselbe durch *successive Approximationen* zu berichtigen. Um die Brauchbarkeit seines Approximationsverfahrens zu prüfen, wendet er dasselbe auf den von *C. Chree*[171]) streng behandelten Fall des Rotationsellipsoids an. Er findet, dass schon die zweite Approximation genügend genau wird.

12. Beanspruchung durch Schwingungen.

12a. Allgemeines. Die von den elastischen Schwingungen herrührende Beanspruchung wird meistens als „dynamische Beanspruchung" bezeichnet. Im allgemeinen bietet es keine prinzipielle Schwierigkeit — wenigstens so weit es sich um Konstruktionsteile handelt, die als dünne Stäbe oder Platten betrachtet oder aus solchen aufgebaut werden können — die mit der elastischen Bewegung verbundenen Formänderungen und Spannungen durch Heranziehung der *Theorie der Schwingungen elastischer Systeme* (vgl. Art. IV 26, *H. Lamb*) zu bestimmen. So haben z. B. *H. Résal*[172]), *E. Phillips*[173]), *B. de St. Venant*[174]) die Schwingungstheorie dünner Stäbe auf die Untersuchung der Schwingungsvorgänge in einzelnen Teilen eines *Kurbelmechanismus* angewendet, wobei besonders *E. Phillips* sowohl die Trägheitskräfte der bewegten Teile, als die Änderung des Dampfdruckes berücksichtigte. Diese mathematisch exakten Untersuchungen fanden allerdings wenig Anklang in der technischen Literatur und Praxis, und zwar einerseits wegen der Umständlichkeit der Rechnungen, andererseits aber auch deshalb, weil wir die mathematisch gewonnenen Aufschlüsse mit unseren mangelhaften physikalischen Kenntnissen über den Einfluss der *schwingungsartigen Belastung* auf die *Festigkeitseigenschaften des Materials* nicht entsprechend zu verwerten vermögen. So steht der Gewinn zumeist nicht im Verhältnis zu der bei der Rechnung aufgewendeten Zeit und Mühe. In der Praxis begnügt man sich daher oft damit, daß man die statisch ermittelten Spannungen mit einem

---

170) *A. Stodola,* Z. d. V. d. Ing. 51 (1907), p. 1269.

171) *C. Chree,* London Royal Soc. Proceedings 58 (1895), p. 39.

172) *H. Résal,* Annales des mines 9 (1856), p. 233.

173) *E. Phillips,* Journ. des math. 9 (1864), p. 25.

174) *A. Clebsch,* Théorie de l'élasticité des corps solides traduit par *B. de St. Venant* et *A. Flamant* avec des notes de *B. de St. Venant*, Paris 1883, p. 548 usf.

entsprechend vergrösserten Sicherheitsfaktor in Rechnung setzt (vgl. Nr. 1)[175].

Aber auch in jenen Fällen, in denen eine nähere Untersuchung der Schwingungsvorgänge notwendig erachtet wird (Resonanz, stossweise Belastung), gelangt man zumeist schon mit Hilfe einfacher *Approximationsmethoden* zu genügend genauen Resultaten. Eine erste, allerdings oft ungenügende Näherungsrechnung vernachlässigt die eigenen Trägheitskräfte des schwingenden elastischen Körpers gegen die äusseren Kräfte oder die Trägheitskräfte der mitschwingenden und als starr betrachteten Massen (z. B. die eigene Trägheit der Wellenmasse gegen die der aufgekeilten Scheiben). Eine zweite, im allgemeinen viel bessere Annäherung erhält man durch die summarische Berücksichtigung der Trägheit nach einer von *H. Cox*[176]) herrührenden und von *B. de St. Venant*[177]) in verschiedenen Fällen angewendeten Approximationsmethode. Diese führt das allgemeine Schwingungsproblem lediglich auf ein *elastisches Gleichgewichtsproblem* und ein *Bewegungsproblem mit endlichen Freiheitsgraden* zurück, dadurch, dass sie die Gestalt des schwingenden elastischen Körpers (namentlich bei dünnen Stäben oder dünnen Platten) der Lösung von entsprechenden statischen Aufgaben entnimmt. Um zu einer solchen Lösung zu gelangen, erteilt man zunächst den Angriffspunkten der äusseren Kräfte (bzw. Momente) und der Trägheitskräfte der mitschwingenden Massen beliebige Verschiebungen und denkt sich den Körper statisch deformiert durch Kräfte (bzw. Momente), die an diesen Punkten angreifen und ihnen gerade die gewählten Verschiebungen erteilen; alsdann lässt sich die *Verschiebung eines beliebigen Punktes* durch die *Verschiebungen jener ausgezeichneten Punkte* als Parameter ausdrücken Benützt man die Lösung dieser statischen Aufgabe als annähernden Ansatz für die jeweilige deformierte Gestalt des schwingenden Systems, so erhält man die potentielle und kinetische Energie (bzw. Impuls) desselben ausgedrückt in den Verschiebungen und Geschwindigkeiten von

175) In neuerer Zeit wurde — im Gegensatz zu diesem Verfahren — die Notwendigkeit für einen „dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre" von *A. Sommerfeld* betont (Z. d. V. d. Ing. 46 (1902), p. 390).

176) *H. Cox*, Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1849), p. 73.

177) Vgl. *A. Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris 1883, p. 567 ff. — Ähnlich ist das Verfahren von *Lord Rayleigh*, The Theory of sound 2. ed. London 1894, I, p. 111 ff. und 287 ff. — Die Methode von *Rayleigh* ist indessen allgemeiner, indem er offen lässt, welche hypothetische Typen man für die Gestalt des schwingenden Systems wählen soll. Vgl. *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907, p. 506.

Punkten mit endlicher Anzahl, wodurch das Problem auf ein Schwingungsproblem mit endlichen Freiheitsgraden zurückgeführt ist.

Für die technische Festigkeitslehre kommen hauptsächlich zwei Schwingungsprobleme in Betracht: erzwungene Schwingungen durch *periodisch veränderliche Belastung* und Schwingungen infolge *plötzlicher* (sehr rasch anwachsender) *Belastung.* Beide Fälle werden in der technischen Literatur zumeist mit Hilfe der eben angedeuteten Annäherungsmethoden behandelt.

12b. Periodisch veränderliche Belastung. Die nähere Untersuchung der durch periodisch veränderliche Belastung erzwungenen Schwingungen ist vornehmlich in jenen Fällen von Bedeutung, welche zur *Resonanz* führen können. In diesen Fällen treten sehr erhebliche Formänderungen und Spannungen auf; ausserdem stört die Resonanz den gleichförmigen Gang der Maschinen.

Die durch periodische Zug- und Druckkräfte erzwungenen longitudinalen Schwingungen von *Schubstangen* untersuchten *H. Résal*[178]) und *E. Phillips*[178]), und zwar — wie schon erwähnt wurde — nach den Methoden der exakten Schwingungstheorie. Die Trägheitskräfte rufen gleichzeitig Biegungsschwingungen hervor, die besonders bei rasch laufenden Maschinen die Beanspruchung erheblich erhöhen können. Die Schwingungen der Schubstangen rasch laufender Maschinen sind in neuer Zeit näherungsweise durch *H. Sellentin*[179]) untersucht worden. Eine Resonanzgefahr liegt bei Schubstangen nur ganz ausnahmsweise vor.

Näher liegt die Gefahr der Resonanz bei *Wellen*, die durch ein veränderliches *Torsionsmoment* beansprucht werden, wie dies z. B. bei Antrieb durch Kolbenmaschinen der Fall ist. Das veränderliche Drehmoment, dessen Periode durch die Umdrehungszahl der Maschine bestimmt wird, ist zumeist aus dem sogenannten „Tangentialdiagramm" der Antriebsmaschine (s. Art. IV 10b, *R. v. Mises*) bekannt und kann am einfachsten durch eine endliche trigonometrische Reihe angenähert werden. Für die Schwingungen einer Welle mit einem Schwungrad vom Trägheitsmoment J, die an dem einen Ende durch ein veränderliches Drehmoment, an dem andern Ende durch einen konstanten Widerstand beeinflusst wird, erhält man mit Vernachlässigung der eigenen Masse die Differentialgleichung:

$$(40) \qquad J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{A}{l}\varphi = M_0 + M_1\cos(\omega t) + M_2\cos(2\omega t) + \cdots + M_n\cos(n\omega t)$$

178) Vgl. die Fußnoten 172) und 173).

179) *H. Sellentin,* Schiffbau 4 (1902), p. 370.

(φ relative Verdrehung der Wellenenden, A Torsionssteifigkeit des Querschnittes, l Länge, ω Umdrehungsgeschwindigkeit der Welle). Die homogene Gleichung ergiebt die Eigenschwingungen der Welle. Die Berücksichtigung der eigenen Trägheit liefert nach der oben angedeuteten Approximationsmethode einen konstanten Beitrag zum Trägheitsmoment des Schwungrades[180]). Die Berechnung der Eigenschwingungszahl kann aber bei komplizierter Gestalt der Welle oder ungleichmässiger Anordnung der Massen sehr umständlich werden. Einige praktisch wichtige Fälle behandelten *P. Roth*[181]), *H. Holzer*[182]), ferner *C. Chree, H. R. Sankey* und *W. E. W. Millington*[183]).

Die Resonanz wird durch Koinzidenz der Umdrehungszahl oder eines nicht sehr grossen Vielfachen derselben mit der Frequenz der Eigenschwingungen hervorgerufen. Durch Berücksichtigung der Viskosität des Wellenmaterials, die zur Gl. (40) ein $\frac{d\varphi}{dt}$ enthaltendes Glied liefert, kann man auch die grösste Amplitude berechnen; ohne Berücksichtigung der inneren Reibung fällt diese unendlich gross aus.

Die Eigenschwingungszahl der Wellen liegt in den meisten praktischen Fällen sehr hoch über der Umdrehungszahl derselben; als Ausnahmefälle, in welchen Resonanz auftreten kann, können die Wellen von sehr rasch laufenden Motoren, ferner die langen Wellenleitungen der Schraubendampfer angeführt werden.

Bei Betrieben mit hoher Umdrehungszahl kann namentlich die Wirkungsweise des Schwungrades durch die Torsionsschwingungen erheblich beeinträchtigt werden, wie dies *A. Sommerfeld*[184]) an einem Beispiel zeigte. Man darf in diesem Falle nicht schlechthin von einem Ungleichförmigkeitsgrad der Welle sprechen, da jedem Wellenquerschnitt ein anderer Ungleichförmigkeitsgrad zukommt, und dieser kann an der Stelle der Energieabnahme erheblich grösser sein, wie auf Grund der Annahme einer starren Welle berechnet wird.

Die Resonanz bei Torsionsschwingungen der Schiffswellen wurde von *G. Bauer*[185]), *H. Frahm*[186]) durch Versuche und Rechnung, ferner

180) Der Vorgang von *H. Lorenz*, an den beiden Wellenenden je die Hälfte der Wellenmasse zu vereinigen (Dynamik der Kurbelgetriebe, Leipzig 1901, p. 136) ist nicht richtig.

181) *P. Roth*, Z. d. V. d. Ing. 48 (1904), p. 564.

182) *H. Holzer*, Schiffbau 8 (1907), p. 823.

183) *C. Chree, H. R. Sankey, W. E. W. Millington*, Inst. Civ. Eng. Min. of Proc. 162 (1905), p. 371.

184) *A. Sommerfeld*, Z. d. V. d. Ing. 46 (1902), p. 390.

185) *G. Bauer*, Schiffsbautechn. Ges. Jahrbuch 1 (1900), p. 311.

186) *H. Frahm*, Z. d. V. d. Ing. 46 (1902), p. 797. Ferner Mitteilungen

von *H. Lorenz*[187]) und *L. Gümbel*[188]) theoretisch untersucht. Man wurde auf die Erscheinung durch Wellenbrüche, die nach der statischen Berechnung durchaus unerklärlich waren, ferner durch den ungleichförmigen Gang der Antriebsmaschinen aufmerksam (vgl. Art. IV **10**b, *R. v. Mises*). Das Problem ist etwas verschieden von den bisher erwähnten, da der Propellerwiderstand selbst eine Funktion der Umdrehungsgeschwindigkeit ist und folglich eine Art Dämpfung liefert. *Frahm*[186]) ermittelte das veränderliche Drehmoment aus den Dampfdiagrammen der Antriebsmaschinen (mit Berücksichtigung der Trägheitskräfte der bewegten Massen) und setzte die Veränderlichkeit des Propellerwiderstandes nach einer empirischen Formel in Rechnung. Die berechneten Werte für die grössten Amplituden sind durchaus mit etwa 20—25 v. H. grösser, als die gemessenen, wahrscheinlich deshalb, weil die innere Reibung des Materials bei der Rechnung unberücksichtigt blieb.

Die *transversalen Eigenschwingungen* (*Biegungsschwingungen*) von Wellen wurden für einige typische Fälle von *P. Roth*[189]) und *C. Chree, H. R. Sankey, W. E. W. Millington*[189]) berechnet. Es könnten ausserdem an dieser Stelle die Untersuchungen über das *Schleudern rotierender Wellen* angeführt werden, da diese Erscheinung (mit Vernachlässigung der Schiefstellung der Scheiben, vgl. Nr. **13**b) als Resonanz zwischen der der Richtung nach veränderlichen Zentrifugalkraft, als eingeprägter Kraft, und den transversalen Eigenschwingungen des ruhenden Systems gedeutet werden kann. Da aber die Resonanz mit der Labilität der stationären Rotationsbewegung zusammenfällt, und dies für das Problem wegen der Analogie mit statischen Stabilitätsfragen charakteristischer erscheint, so soll die Frage in Nr. **13** (Stabilitätsprobleme) behandelt werden[190]).

12c. Plötzliche Belastung. Stoss. Man kann zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die *Kraft* oder die *Energiemenge* gegeben ist, die plötzlich oder in sehr kurzer Zeit auf den elastischen Körper übertragen wird.

über Forschungsarbeiten 6 (1902), p. 33; auch Verhandlungen der Ges. deutscher Naturforscher und Ärzte, Hamburg (1901).

187) *H. Lorenz,* Inst. of Naval Arch. Trans. 42 (1900), p. 175; ferner Dynamik der Kurbelgetriebe, Leipzig 1901, p. 136. Vgl. Fussnote 180).

188) *L. Gümbel,* Inst. of Naval Arch. Trans. 44 (1902), p. 138.

189) Vgl. Fussnoten 181) und 183).

190) Es konnte naturgemäss nicht beabsichtigt werden, sämtliche elastische Schwingungsprobleme der Maschinentechnik anzuführen. — Für Vibrationen des Schiffskörpers vgl. Art. IV 22 (*Kriloff*) Nr. 6.

α) In dem ersten Falle — plötzliche Belastung durch eine gegegebene Kraft — liefern für die grösste Formänderung beide Approximationsmethoden der Nr. 12a den doppelten Betrag der derselben Kraft entsprechenden statischen Deformation. Diese Regel folgt aus einer einfachen Energiebetrachtung und ist bereits von *Th. Young*[191]) und später von *J. V. Poncelet*[192]) gefunden worden. Sie kann mit den Ergebnissen exakter Untersuchungen verglichen werden, wenn man annimmt, dass die plötzliche Belastung von dem Gewicht eines starren Körpers herrührt, welcher plötzlich — jedoch ohne Anfangsgeschwindigkeit — mit dem Stabe verbunden wird. Wird z. B. ein Gewicht Q an dem freien Ende eines vertikal aufgehängten Stabes vom Eigengewicht G plötzlich angehängt, so beträgt nach der exakten Rechnung die grösste Dehnung, die während der Schwingungen an dem befestigten Stabende auftritt[193]), schon für $\frac{Q}{G} = 2$ bzw. 4 den 1.68 bzw. 1.84fachen Wert der durch das Gewicht Q statisch hervorgerufenen Dehnung. Für grosse Werte des Verhältnisses $\frac{Q}{G}$ nähert sich die grösste Dehnung dem durch die Approximationsmethode gelieferten Grenzwert; da im Maschinenbau die belastenden Kräfte zumeist sehr gross sind gegen das Eigengewicht der Konstruktionsteile, so kann man für plötzliche Belastung die Regel von der doppelten statischen Beanspruchung zumeist gelten lassen.

β) Von den Aufgaben der zweiten Art — plötzliche Übertragung einer gegebenen Energiemenge — sind vornehmlich verschiedene Fälle der Stossbelastung dünner Stäbe durch einen mit gegebener Geschwindigkeit anprallenden starren Körper behandelt worden. Die zweite in Nr. 12a entwickelte Approximationsmethode ermöglicht in diesem Falle den Anteil der eigenen Trägheit des Stabes an dem Stossvorgang und an den darauffolgenden Schwingungen summarisch zu berücksichtigen.

Bei *longitudinalem* Stoss durch einen am Ende des Stabes anprallenden starren Körper nimmt man an, dass die Längenänderung in jedem Moment gleichmässig verteilt ist[194]), und findet nach dieser

191) *Th. Young*, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts London 1807, I, p. 135.

192) *J. V. Poncelet*, Introduction à la mécanique industrielle, physique et expérimentale. 3. éd. Paris 1870, p. 418.

193) *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe*, Leipzig 1907, p. 500.

194) Diese Annahme läuft offenbar darauf hinaus, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Dilatationswelle als sehr gross gegen die Geschwindigkeit der schwingenden Teile betrachtet wird.

Annahme, falls das andere Stabende festgehalten wird, ein Drittel der Eigenmasse des Stabes als Beitrag desselben zu der Trägheit des stossenden Körpers[195]). Alsdann lautet die Impulsgleichung für die plötzliche Geschwindigkeitsänderung (G Gewicht des Stabes, Q das Gewicht des stossenden Körpers, c und c' Geschwindigkeit desselben unmittelbar vor und nach dem Stosse):

$$\frac{Q}{g} c = \frac{1}{g}\left(Q + \frac{1}{3} G\right) c'$$

und daraus:

(41) $$c' = \frac{c}{1 + \frac{1}{3}\frac{G}{Q}}.$$

Bei *transversalem Stoss* eines an beiden Enden drehbar gelagerten dünnen geraden Stabes in der Stabmitte benützt man für die Durchbiegung eines beliebigen Punktes in der Entfernung x von der Stabmitte den der statischen Deformation entsprechenden Ansatz[196])

(42) $$w = f\left(1 - \frac{6x^2}{l^2} \pm \frac{4x^3}{l^3}\right) \quad \text{für} \quad x \gtrless 0$$

(f Durchbiegung in der Mitte, l Stablänge). Der Ansatz (42) liefert als Beitrag der Stabmasse zur Trägheit des Systems $\frac{17}{35} G$, und so erhält man für die gemeinsame Geschwindigkeit der Stabmitte und des stossenden Körpers nach dem Stosse:

(43) $$c' = \frac{c}{1 + \frac{17}{35}\frac{G}{Q}}.$$

Im Allgemeinen wird[197])

(44) $$c' = \frac{c}{1 + k\frac{G}{Q}},$$

wo k eine Konstante bedeutet, die sich aus der Lösung der entsprechenden statischen Aufgabe ergiebt.

Die Differentialgleichung der Schwingung wird, falls q die Kraft bezeichnet, die die statische Durchbiegung Eins hervorruft:

(45) $$\frac{Q + kG}{g}\frac{d^2 f}{dt^2} + qf = Q$$

---

195) *B. de St. Venant,* Bemerkungen zu *A. Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris 1883, p. 480 f. Für Vergleich mit der exakten Theorie siehe *B. de St. Venant* und *A. Flamant*, C. R. Paris 97 (1883), p. 127 ff.

196) *H. Cox,* Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1849), p. 73.

197) *B. de St. Venant,* Bemerkungen zu *A. Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris 1883, p. 582.

und die grösste Durchbiegung[198]):

(46) $$f_m = \frac{Q}{q} + \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 + \frac{c^2}{g}\frac{Q}{q\left(1+k\frac{G}{Q}\right)}}.$$

Ist das Gewicht Q gross gegen das Eigengewicht des Stabes und seine Fallhöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ gross gegen die statische Durchbiegung $f_s = \frac{Q}{q}$, so ist die grösste Durchbiegung annähernd

(47) $$f_m = \sqrt{2hf_s}.$$

Diese erste Approximation kann durch die Annahmen unmittelbar erhalten[198]) werden, dass erstens die ganze dem stossenden Körper innewohnende kinetische Energie auf den Stab als potentielle Energie übertragen wird, zweitens der Stab wie unter statischer Belastung deformiert wird. Die Energiemenge, die in einem elastischen System aufgespeichert werden kann, ohne dass der damit verbundene Spannungszustand die Elastizitäts- bzw. Bruchgrenze erreicht, wird oft als seine *elastische Arbeitsfähigkeit* (resilience) oder *dynamische Widerstandsfähigkeit* (résistance vive) bezeichnet, und in der Praxis (z. B. bei Federn) betrachtet man oft als Sicherheit gegen stossweise Belastung[199]) das Verhältnis der bei dem Stoss übertragenen Energiemenge zu dieser dynamischen Widerstandsfähigkeit des Systems[200]). Es ist bemerkenswert, dass bei Stäben mit gleichem Querschnitt die dynamische Widerstandsfähigkeit mit dem Voluminhalt proportional wächst. So wird z. B. die dynamische Widerstandsfähigkeit einer Schraubenfeder durch Vermehrung der Gänge vergrössert, während die statische Tragfähigkeit unverändert bleibt. Es ist auch klar, dass das Material einer Feder hinsichtlich ihrer dynamischen Widerstandsfähigkeit desto besser ausgenützt ist, je gleichmässiger die einzelnen Teile beansprucht werden.

198) *B. de St. Venant*, Bemerkungen zu *A. Clebsch*, Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris 1883, p. 596. (Eine ähnliche Formel giebt für den longitudinalen Stoss *J. V. Poncelet*, vgl. Fussnote 192.) Für den Vergleich der Gleichung (46) mit den Ergebnissen der exakten Theorie *B. de St. Venant*, op. c., p. 570. Die Annäherung ist eine durchaus befriedigende. Für Vergleich mit den Versuchen von *E. Hodgkinson* (British Association Reports 3 (1833), p. 421; ibid. 5 (1835), p. 93; ferner Iron Commissioners Report, London 1849, p. 16 ff.), *H. Cox*, Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1849), p. 73 und *B. de St. Venant*, op. c., p. 620.

199) In dieser Weise betrachtet z. B. *F. Grashof* (Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878) die Sicherheit der Kesselwandung gegen Explosion.

200) In neuester Zeit ist im Materialprüfungswesen die direkte experimentelle Bestimmung der dynamischen Widerstandsfähigkeit eingeführt worden. Es handelt sich aber zumeist weniger um die Ermittelung der rein elastischen, als der plastischen Arbeitsfähigkeit.

Von speziellen Untersuchungen über Stossbelastung sei die von *J. Perry*[201]) angeführt über die Beanspruchung der Tragseile bei Fahrstühlen. Sie enthält graphische Lösungen der exakten Schwingungsgleichung.

Die Stossbelastung von Platten untersuchte *J. Boussinesq*[202]). Das Problem hat gewisse Bedeutung mit Rücksicht auf den Widerstand von Platten gegen Schuss. (Vgl. IV 18 (*C. Cranz*) Nr. 5).

13. Stabilitätsprobleme.

13a. Stabilität des Gleichgewichts. Typisch für die folgenden Fälle elastischer Labilität ist die *Verzweigung der Gleichgewichtszustände.* Der Kernpunkt der Frage liegt darin, in welchen Fällen der Satz von der Eindeutigkeit der Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems (vgl. Art. IV 24 (*Tedone*) Nr. 8) versagen kann. Die Ableitung des Eindeutigkeitssatzes fusst auf der Voraussetzung, dass die Verschiebungen klein sind gegen die Abmessungen des Körpers, so dass die auf die Flächenelemente des deformierten Körpers bezogenen Spannungen näherungsweise durch die auf die undeformierten Flächenelemente bezogenen ersetzt werden können. Bei Körpern, deren Abmessungen von derselben Grössenordnung sind, fällt diese Forderung damit zusammen, dass die Formänderungskomponenten klein sind gegen Eins. Dieses ist z. B. nicht der Fall bei den Stoffen, deren Elastizitätsgrenze mit den Elastizitätskonstanten vergleichbar ist (z. B. bei Gummi usw.). Bei den in der Technik allgemein üblichen Konstruktionsmaterialien ist aber der Elastizitätsmodul stets gross gegen die Elastizitätsgrenze, und folglich ist die Forderung, die dem Satze von der Eindeutigkeit der Lösung zugrunde liegt, bei *Konstruktionsteilen mit Abmessungen von derselben Grössenordnung* innerhalb der Elastizitätsgrenze stets erfüllt.

Ist dagegen wenigstens *eine Abmessung des Körpers klein gegen die übrigen*[203]) (bei dünnen Stäben, Platten, Schalen), so können Verschiebungen vorkommen, die mit der kleinsten Abmessung vergleichbar sind, während die Formänderungskomponenten noch immer klein bleiben gegen die Einheit. In diesem Falle ist es im Allgemeinen möglich, dass bei derselben Anordnung der äusseren Kräfte verschiedene Gleichgewichtskonfigurationen des elastischen Körpers oder Systems bestehen können.

---

201) *J. Perry,* Phil. Mag. 11 (1906), p. 107.

202) *J. Boussinesq,* Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Paris 1885, p. 502 und 541.

203) Vgl. *G. H. Bryan,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 6 (1888), p. 199; auch Art. IV 25 (*Tedone-Timpe*), Nr. 21.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, dass die Belastung nur von einem Parameter (Einzelkraft, gleichförmig verteilter Druck usw.) abhängig ist. In unmittelbarer Nähe des spannungslosen Zustandes — dem der Parameterwert Null entsprechen soll — ist sicher nur ein Gleichgewichtszustand möglich, da die Verschiebungen klein sind; alsdann liegt zwischen Null und den Parameterwerten, bei denen mehrere Gleichgewichtszustände bestehen, wenigstens ein Wert des Parameters, der dem *Verzweigungspunkt* der Gleichgewichtskonfigurationen entspricht. Die entsprechende Belastung wird als *„kritische Belastung“* bezeichnet.

Vom mathematischen Standpunkte aus wird die Eindeutigkeit der Lösung bei kleinen Formänderungen lediglich durch die Linearität der Differentialgleichungen und Randbedingungen gewährleistet (IV 24 (*O. Tedone*) Nr. 8). Lässt man die Annahme der kleinen Formänderungen fallen, so wird das Gleichgewicht im Allgemeinen durch nicht-lineare Gleichungen bestimmt. Die Bestimmung der Verzweigungspunkte wird aber auf die Lösung eines linearen Problems zurückgeführt, sobald man nur eine Lösung der nicht-linearen Gleichungen kennt, dadurch, dass man Lösungen sucht, die der ersteren Lösung benachbart sind. Die Verzweigungspunkte werden dann durch die Eigenwerte des so gewonnenen linearen Problems gegeben, d. h. durch Parameterwerte, bei denen die linearen Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen besitzen können, die dieselben Randbedingungen befriedigen; vgl. II A. 7a Art. *M. Bôcher* Nr. 7. In diesem Falle bleibt also eine Integrationskonstante unbestimmt, d. h. innerhalb der kleinen Formänderungen hat man bei der kritischen Belastung *indifferentes Gleichgewicht.*

Wenn die Belastung von mehreren Parametern abhängt (vgl. z. B. Absatz β) dieser Nummer), so erhält man statt einzelner Parameterwerte, Beziehungen zwischen solchen, und diese legen die kritischen Belastungszustände fest.

Das elastische Stabilitätsproblem führt daher im Allgemeinen auf „Randwertprobleme“ (und zwar auf solche mit gewöhnlichen Differentialgleichungen bei dünnen Stäben und mit partiellen Differentialgleichungen bei dünnen Platten und Schalen) und fordert die Bestimmung von „Eigenwerten“. Man hat oft einen anderen Weg eingeschlagen, indem man statt der auf ihre Stabilität hin zu prüfenden Systeme im Vorhinein Systeme mit wenig abweichender Anordnung betrachtet, z. B. bei Untersuchung der Stabilität gerader Stäbe unter zentrischer axialer Belastung Stäbe mit leichter Krümmung oder mit etwas exzentrischer Belastung. Die Verzweigungspunkte kennzeichnen

sich dann im Allgemeinen dadurch, dass unter Beschränkung auf lineare Gleichungen eine beliebig kleine Abweichung von der ursprünglichen Anordnung genügt, bei Annäherung an die kritische Belastung beliebig grosse Deformation hervorzurufen.

Von den möglichen Gleichgewichtszuständen jenseits des Verzweigungspunktes ist jener stabil, der ein wirkliches Minimum für die potentielle Energie des Gesamtsystems (inkl. Belastung) liefert. Bei den nachfolgenden *statischen* Problemen ist die mit kleinen Formänderungen verträgliche Konfiguration schon jenseits des ersten Verweigungspunktes durchwegs die labile[204]). So liefert die kritische Last eine obere Grenze für die Belastung, und dementsprechend haben die höheren Verzweigungspunkte von dem technischen Standpunkte aus geringes Interesse.

α) Gerader Stab unter Druckbelastung (Knickfestigkeit). Der Stab sei durch eine axiale, in der Zentrallinie angebrachte Kraft P belastet. Der Wert P_k, bei welchem die gerade Form labil wird, heisst die *Knicklast*, die spezifische Belastung $\frac{P_k}{F}$ die *Knickspannung*. Die Bestimmung der Knicklast geht auf *L. Euler*[205]) und *J. L. Lagrange*[206]) zurück. Das Gleichungssystem der Zentrallinie wird mit P als Parameter

$$(48)\qquad \begin{aligned} J_z E \frac{d^2 y}{dx^2} + Py &= 0 \\ J_y E \frac{d^2 z}{dx^2} + Pz &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass y und z zwar mit den Querschnittsabmessungen vergleichbar, jedoch klein gegen die Stablänge sind. Demnach liefern die Gl. (48) den Verzweigungspunkt der Gleichgewichtslagen, nicht aber die stabile gebogene Gestalt selbst jenseits desselben.

Man unterscheidet zumeist folgende vier Fälle (vgl. Figur 10), je nach den verschiedenen Randbedingungen:

1. Ein Ende fest nach Lage und Richtung $\begin{cases} y = y' = 0 \\ z = z' = 0 \end{cases}$ für $x = 0$.

2. Beide Enden fest nach Lage (drehbar gelagert) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ für $x = 0,\ x = l$.

3. Beide Enden fest nach Richtung (verschiebbar eingeklemmt) $\begin{cases} y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$ für $x = 0,\ x = l$.

---

204) Für Stabilitätskriteria vgl. *G. H. Bryan,* Cambridge Phil. Soc. Proc. 6 (1889), p. 288. *A. E. H. Love,* London Math. Soc. Proc. 24 (1893), p. 156.

205) *L. Euler,* Berlin Nouv. Mém. 13 (1759), p. 252; ferner Acta Acad. Petropol. (1778).

206) *Lagrange,* Miscell. Taurin. 5 (1770/3), p. 123 = Oeuvres 2, Paris 1867, p. 125.

4. Beide Enden fest nach Lage und Richtung (fest eingeklemmt)
$\begin{cases} y = y' = 0 \\ z = z' = 0 \end{cases}$ für $x = 0$, $x = l$.

Man hat dann jenen kleinsten Wert P_k des Parameters zu suchen, welcher von der „trivialen“ Lösung $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ verschiedene Lösungen des Systems zulässt, die die betreffenden Randbedingungen befriedigen. Diese Werte fallen für 2) und 3) gleich aus, für die Fälle 1), 2), 4) verhalten sie sich wie 1:4:16. In dem praktisch wichtigsten Falle 2) erhält man für *zylindrische* Stäbe

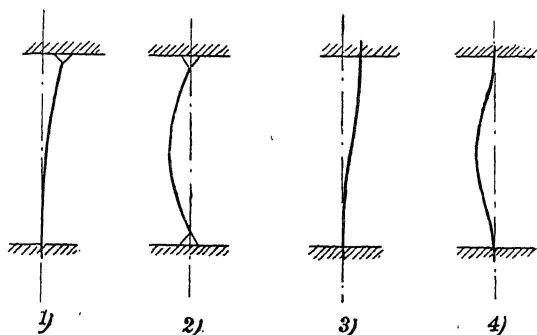


Fig. 10.

(49) $P_k = \pi^2 \frac{JE}{l^2}$ [207])

und die „Knickspannung“

(50) $$\sigma_k = \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}.$$

Das Verhältnis $\frac{l}{i}$, wo für i der kleinste Trägheitshalbmesser des Querschnittes zu wählen ist, heisst schlechthin „Schlankheit“. Ist der Stab in den beiden Hauptträgheitsebenen verschieden gelagert, wie dies z. B. bei Schubstangen vorkommt, so hat man zu prüfen, in welcher Ebene man zu geringerer Knicklast gelangt.

Ist der Querschnitt veränderlich, so erhält man eine erste Annäherung, indem man J_y und J_z als Funktionen von x betrachtet. Diese Fälle sowie die Knickfestigkeit von Stäben mit *elastischer Querstützung* ferner die Knickfestigkeit von *schweren* Stäben (belastet durch Eigengewicht) sind jedoch mehr für die Theorie der Baukonstruktionen vom Interesse[207a]).

207) Die Gleichung gilt streng nur für sehr lange Stäbe, da in den Gleichungen (48) die *Längenänderung der Zentrallinie*, ferner der *Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegung* derselben vernachlässigt ist. Beide liefern jedoch für jene Werte von $\frac{l}{i}$, für welche σ_x bei den üblichen Konstruktionsmaterialien innerhalb der Proportionalitätsgrenze liegt, nur unbedeutende Korrektionen. Vgl. zuerst bei *E. Lamarle*, Annales des travaux publics de Belgique 3 (1845), p. 1 und 4 (1846), p. 1.

207a) Im Allgemeinen kann man zur Ermittelung der kritischen Belastung ein graphisches Approximationsverfahren anwenden, welches von *L. Vianello*

Die *Euler*sche Theorie wurde innerhalb ihrer Gültigkeitsgrenze, d. h. so lange σ_k *innerhalb der Proportionalitätsgrenze des Materials liegt*, durch viele Versuche gut bestätigt[208]). Es ist aber zu beachten, dass nur solche Versuche zum Vergleich herangezogen werden dürfen, bei welchen die Randbedingungen richtig erfüllt sind. Viele frühere Versuche zeigten grosse Abweichungen von den theoretischen Werten, da die Probestäbe durch ihre ebenen Endflächen eine Art unvollkommene Einspannung erfuhren. Dieser Fall liegt offenbar zwischen 2) und 4). Bessere Resultate erzielte *E. Hodgkinson*[209]) mit Versuchsstäben, die an den Enden abgerundet waren, und später *J. Bauschinger*[210]) und insbesondere *L. v. Tetmajer*[211]) durch „Spitzenlagerung". Versuche mit einstellbarer Lagerung der Stabenden, um die Wirkungslinie der Kraft möglichst genau mit der Zentrallinie in Deckung zu bringen, zeigen sogar, dass die *Euler*sche Formel mit weniger als 1 v. H. Fehler die Knicklast angiebt[212]).

Die Theorie der Knickfestigkeit *kürzerer Stäbe*, bzw. für *Belastungen ausserhalb der Proportionalitätsgrenze*, hat *F. Engesser*[213]) in Angriff genommen und *Th. v. Kármán*[214]) weiter ausgeführt und durch Versuche bestätigt. Es ergiebt sich dann, dass die Knicklast durch eine der *Euler*schen vollkommen ähnliche Formel gegeben wird, wobei E durch einen Mittelwert zwischen $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ und E selbst zu ersetzen ist.

---

angegeben wurde (Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 1436) und welches an die in der Theorie der Randwertaufgaben benutzte „Methode der successiven Approximationen" erinnert.

208) Einige Autoren glaubten die *grossen* Abweichungen, die bei kurzen Stäben infolge Überschreitung der Elastizitätsgrenze naturgemäss auftreten, auf die Vernachlässigung der Verkürzung der Zentrallinie, bzw. der Schubspannungen zurückführen zu können (Fussnote 207). Vgl. *J. Kübler*, Z. d. V. d. Ing. 45 (1900), p. 565, Z. für Math. u. Phys. 45 (1900), p. 307 und die Erwiderungen von *C. J. Kriemler* ibid. 46 (1901), p. 355; *L. Pilgrim* ibid., p. 362; *L. Prandtl*, Z. d. V. d. Ing. 45 (1901) p. 900; ferner *Nussbaum*, Z. für Math. u. Phys. 55 (1907), p. 134.

209) *E. Hodgkinson*, Lond. Phil. Trans. (1840), p. 385; ibid. (1857), p. 851.

210) *L. Bauschinger*, Mitteilungen aus dem techn. mech. Labor. München, Heft 15 (1887), p. 11.

211) *L. v. Tetmajer*, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit, Wien 1903.

212) Vgl. *A. Considère*, Congrès internat. des procédés de constr. Paris 1891, p. 371, *L. Prandtl*, Diss. München 1899; *Th. v. Kármán*, Diss. Göttingen 1909.

213) *F. Engesser*, Z. des hann. Arch. u. Ing.-Ver. 35 (1889), p. 455; die daselbst gegebene Lösung des Problems ist nicht einwandfrei, vgl. *Engessers* spätere Arbeiten: Schweiz. Bauzeitung 26 (1895), p. 24 und Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 927; ferner *F. Jasinsky*, Schweizer. Bauz. 25 (1895), p. 172.

214) *Th. v. Kármán*, Diss. Göttingen 1909; ferner Phys. Zeitschr. 9 (1908), p. 136.

$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ bedeutet dabei den „Modul der gesamten Formänderungen" (σ Spannung, ε Dehnung) und wird durch das Spannungsgesetz gegeben. Somit ist er eine Funktion von σ_k, und man gelangt zu einer Beziehung zwischen der Knickspannung σ_k und der Schlankheit $\frac{l}{i}$.

Mangels einer richtigen Theorie wurden teilweise auf Grund von Versuchen, oft aber auch auf Grund nicht immer zutreffender theoretischer Überlegungen viele *empirische* Formeln für die Knickfestigkeit kürzerer Stäbe aufgestellt. Früher war in der Praxis die *Rankine*sche[215]) Formel am meisten verbreitet. Die Knickspannung beträgt danach

$$\sigma_k = \frac{\sigma_m}{1 + \alpha\left(\frac{l}{i}\right)^2},$$

wo σ_m die beim reinen Druckversuch ermittelte Grenzspannung (Bruch- bzw. Elastizitätsgrenze), α eine Konstante bezeichnet. Heutzutage werden auf dem europäischen Kontinent allgemein die aus sehr sorgfältigen Versuchen entnommenen einfachen Formeln *L. v. Tetmajers*[216]) benützt. Ähnliche, einfache Formeln schlugen die amerikanischen Ingenieure *T. H. Johnson*[217]) und *J. B. Johnson*[218]) vor. Alle diese Formeln suchen σ_k als eine Funktion ersten oder höchstens zweiten Grades in $\frac{l}{i}$ auszudrücken. *H. du Bois*[219]) empfiehlt getrennte Formeln für Stäbe von mittlerer und geringer Schlankheit.

Die theoretische Knicklast liefert im allgemeinen eine *obere Grenze* für die Tragfähigkeit des Stabes. Für die stabile Konfiguration jen-

215) *W. J. M. Rankine*, A manual of applied mechanics London 1858, p. 360; *Rankine* schreibt die Formel *Gordon* zu und giebt eine theoretische Ableitung dazu, die er aber selbst nicht als streng betrachtet; *F. Schwarz* (Erbkams Zeitschr. f. Bauwesen 4 (1854), p. 518) und *F. Laissle* und *A. Schübler* (Der Bau der Brückenträger Stuttgart 1857) wollen die Formel ebenfalls als ein Ergebnis theoretischer Überlegungen hinstellen; *H. Scheffler* (Theorie der Festigkeit gegen Zerknicken, Braunschweig 1858) giebt sie dagegen als rein empirisch. Sie wird manchmal, jedoch mit Unrecht, *Navier* zugeschrieben; eine ähnliche, theoretisch begründete Formel gab *G. Lang* (Rigaer Ind. Z. 1883); seine Ableitung ist ebenfalls nicht einwandfrei.

216) *L. v. Tetmajer*, Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit, 3. Aufl. Wien 1903.

217) *T. H. Johnson,* Amer. Soc. Mech. Eng. Trans. 15 (1886), p. 517.

218) *J. B. Johnson,* Modern frame structures, New York 1894, p. 148 usf.

219) *H. Du Bois,* Amer. Soc. of Mech. Eng. Trans. 27 (1892), p. 69. Eine Übersicht der Formeln und Diskussion der Anwendungsbereiche findet man bei *F. v. Emperger,* Z. d. öst. Ing.-Arch.-Ver. 49 (1897), p. 661.

seits des Verzweigungspunktes ergiebt sich zwar eine mit der Durchbiegung zunehmende Last[219a]), beim Übergang in die gebogene Form wird jedoch in fast allen praktischen Fällen die Elastizitätsgrenze in den äusseren Fasern alsbald erreicht; infolge nie ganz vermeidbarer Exzentrizität des Kraftangriffes wird sogar die Höchstlast unter die theoretische Knicklast heruntergedrückt, und zwar bei kürzeren Stäben besonders erheblich. Die Exzentrizität der Kraftwirkung kann man durch entsprechende Vergrösserung des Sicherheitsfaktors berücksichtigen; man hat aber auch vorgeschlagen, eine wahrscheinliche ursprüngliche Exzentrizität in die Rechnung einzuführen und als gefährliche Belastung jene Kraft zu betrachten, für welche die Spannung in den äusseren Fasern die Elastizitätsgrenze erreicht. Diesen Weg schlugen *A. Ostenfeld*[220]), *B. Kirsch*[221]), *R. Koechlin*[222]) ein. Ist die anfängliche Exzentrizität ε, der Biegungspfeil in der Stabmitte f, so beträgt das grösste Biegungsmoment

$$M = P(f + \varepsilon)$$

und die grösste Spannung (W = Widerstandsmoment)

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P(f+\varepsilon)}{W}.$$

Da (vgl. Nr. 2 d) die Durchbiegung

$$f = \varepsilon\left(\frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\frac{l}{i}\sqrt{\frac{P}{F\varepsilon}}\right]} - 1\right)$$

beträgt und

$$W = Fk$$

ist (k Kernweite des Querschnitts), so wird die Belastung $\frac{P}{F}$, bei welcher σ die Elastizitätsgrenze erreicht, als Funktion der Verhältniszahlen $\frac{l}{i}$ (Schlankheit) und $\frac{\varepsilon}{k}$ (relative Exzentrizität) bestimmt. Da wir jedoch über die Grösse $\frac{\varepsilon}{k}$ zumeist nichts Bestimmtes wissen, vermag diese Rechnungsweise keine grössere Sicherheit gewähren, als die weit einfachere Berechnung der „zentrischen Knickfestigkeit".

219a) Die genaue Ermittelung der Beziehung führt auf elliptische Funktionen, vgl. IV. 25 (*Tedone-Timpe*) Nr. 18. Annähernde Formeln für die Nähe des Verzweigungspunktes bei *J. L. Lagrange* s. Fussnote [206]), ferner *A. Schneider*, Z. d. öst. Ing. Arch.-Ver. 53 (1901), p. 633; *H. Lorenz*, Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 827.

220) *A. Ostenfeld*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 1462; ibid. 46 (1902), p. 1858.

221) *B. Kirsch*, Z. d. V. d. Ing. 49 (1905), p. 967; Mitteilungen des techn. Gew.-Mus. Wien 14 (1904), p. 253.

222) *R. Koechlin*, Schweiz. Bauz. 33 (1899), p. 159.

β) *Sonstige Labilitätserscheinungen bei geraden Stäben.* Die Grenz für die Stabilität der geraden Form bei einem tordierten Stabe is für die Beurteilung der Sicherheit der langen Wellen der Schrauben dampfer von Wichtigkeit. Ist die Welle durch das Torsionsmomen M und die axiale Druckkraft P an ihren Enden beansprucht, so ist di gerade Form stabil, so lange

$$M < 2IE\sqrt{\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{P}{JE}}$$

ist. Durch eine Zugkraft wird die Stabilitätsgrenze entsprechen erhöht[223]).

Die Stabilität der einfach gebogenen Form bei Stäben, die i einer Hauptträgheitsebene ihres Querschnittes gebogen werden und i der dazu senkrechten Ebene geringe Biegungssteifigkeit besitzen (Kipp erscheinungen) ist mehr für die Statik der Baukonstruktionen von Interesse (vgl. Art. IV 25, *Tedone-Timpe* Nr. **21**, ferner unten de Art. über Eisenkonstruktionen).

γ) *Die Stabilität krummer Stäbe* ist nur in einzelnen Fällen unter sucht worden und zwar nur für Stäbe mit kreisförmiger Zentrallini unter gleichförmig verteilter Normalbelastung. Die Kreisform eine Ringes von der Biegungssteifigkeit JE und Halbmesser R ist stabil wenn die Belastung auf die Einheit der Bogenlänge

$$P < \frac{3JE}{R^3}$$

ist[224]). Die Stabilität eines Kreisbogens von beliebiger Öffnung is von *E. Hurlbrink*[225]) untersucht worden.

δ) *Stabilität von Platten.* Bei *ebenen Platten* handelt es sich u die Stabilität der ebenen Gestalt bei Verzerrung der Platte in ihre eigenen Ebene. Für die Bestimmung der Verzweigung des Gleich gewichtgestalten kann man in die zweite der Differentialgleichunge (29) (Nr. 8), für σ_x, σ_y, τ_{xy} die der ebenen Verzerrung entsprechende Werte setzen. Man erhält daher folgende Differentialgleichung fü die Durchbiegung w[226]):

$$\frac{m^2}{m^2-1} E\frac{\delta^3}{12}\Delta\Delta w + \sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

223) Die Resultate rühren von *A. G. Greenhill* her. Inst. Mech. Eng. Proc 1883, p. 182; vgl. Art. IV 25 (*Tedone-Timpe*) Nr. **21**.

224) Vgl. *M. Lévy*, C. R. Paris 97 (1883), p. 694, p. 979; *J. Boussinesq* Paris C. R. 97 (1883), p. 843.

225) *E. Hurlbrink*, Schiffbau 9 (1908), p. 517.

226) Vgl. Art. IV 25 (*Tedone-Timpe*), Nr. **21**.

wobei σ_x, σ_y, τ_{xy} nun gegebene Funktionen von x und y sind, die die äusseren Kräfte als Parameter enthalten. Das Problem fordert die Ermittelung jener Parameterwerte, für welche die Gleichung mit den durch die Befestigungsart gelieferten Randbedingungen von der trivialen Lösung $w = 0$ verschiedene Lösungen hat. Die Methoden, die man für die Lösung der Differentialgleichung (27) für die Biegung einer ebenen Platte besitzt, lassen sich anwenden für den Fall der Stabilität eines homogenen Spannungszustandes (σ_x, σ_y, τ_{xy} konstant in der ganzen Plattenebene). So untersucht *G. H. Bryan*[227a]) die Stabilität der durch gleichförmig verteilte Kräfte beanspruchten Platten, *H. Reissner*[227b]) die Stabilität der viereckigen Platte, die an zwei frei aufliegenden Seiten durch gleichförmig verteilte Randkräfte beansprucht ist und an den übrigen zwei Seiten beliebigen Randbedingungen unterworfen werden kann. *S. Timoschenko*[228]) betrachtet Gebilde aus mehreren miteinander starr verbundenen Platten, um Aufschlüsse über die Knicksicherheit von Profileisen bei gleichförmigem Druck in der Längsrichtung zu erhalten. Einige schwierigere Aufgaben, die für die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen vom Interesse sind, suchte *A. Sommerfeld*[229]) zu lösen.

ε) *Stabilität von Rohren und Schalen.* Besondere praktische Wichtigkeit besitzt die Frage nach der Festigkeit dünnwandiger zylindrischer Rohre gegen äusseren Druck, da die *Flammrohre* der Dampfkessel in dieser Weise beansprucht sind. Die Grenze für die Stabilität der Kreisform ist bei einem sehr langen Rohre vom Radius R und Wanddicke δ durch die Bedingung[230])

$$p < \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E}{4} \frac{\delta^3}{R^3} \tag{51}$$

gegeben. Es fehlt bisher die Lösung für ein Rohr von endlicher Länge; den Einfluss der versteiften Rohrenden untersuchte *A. E. H. Love*[231]).

Ist das Rohr nicht genau kreisförmig, oder erleidet Formänderungen im Betriebe (z. B. infolge ungleichförmiger Erwärmung),

227a) *G. H. Bryan*, London Math. Soc. Proc. 22 (1891), p. 54; ibid. 25 (1894), p. 141.

227b) *H. Reissner*, Centralbl. d. Bauverw. 29 (1909), p. 93.

228) *S. Timoschenko*, Annales de l'Institut polyt. Kiew 1907.

229) *A. Sommerfeld*, Z. für Math. Phys. 54 (1907), p. 113 und p. 318.

230) Vgl. Art. IV 25 (*Tedone-Timpe*), Fussnote 200. — Das Resultat ist zuerst von *Bresse* gegeben worden; vgl. Cours de mécanique appliquée, Paris 1859, p. 326 usf.; ferner *W. C. Unwin*, Inst. Civ. Eng. Proc. 46 (1876), p. 225.

231) *A. E. H. Love*, Math. treatise of elasticity, 1. Auflage, Cambridge 1893 II. p. 316.

so kann die Widerstandsfähigkeit des Rohres bedeutend verminder werden. Die Gültigkeit der Formel beschränkt sich auf jene Wert von $\frac{\delta}{R}$, für welche die Normalspannung $\sigma = \frac{pR}{\delta}$ entsprechend der kritischen Drucke nach Formel (51) innerhalb der Elastizitätsgrenz liegt. Sonst ist man auf empirische Formeln angewiesen.

Grössere Versuchsreihen unternahmen zur Untersuchung der Festig keit zylindrischer Rohre gegen äusseren Druck *W. Fairbairn* un *Th. Tate*[232]), ferner *Fox*[233]). Über die auf der Kaiserlichen Werft i *Danzig* veranstalteten Versuche berichtete *C. Bach*[234]). Unter de neueren Versuchen sind die von *P. A. Carman*[235]) zu erwähnen; e fand für sehr dünne und lange Rohre die Gl. (51) gut bestätigt.

Die Festigkeit der gewellten Flammrohre gegen Einbeulung unte suchten *R. R. Werner*[236]) und *F. Grashof*[237]); die Festigkeit elliptische Flammrohre mit inneren Stützen *E. Hurlbrink*[238]).

Wird ein zylindrisches Rohr durch längs des Grundkreises gleic förmig verteilten axialen Druck beansprucht, so kann man zwe Grenzfälle unterscheiden: ist die Länge gross und die Wanddick nicht sehr klein gegen den Halbmesser, so knickt das Rohr als ei Stab von ringförmigem Querschnitt aus; ist dagegen die Länge nich gross und die Wanddicke sehr klein, so spielt die Ausbeulung de Wand die wesentliche Rolle, indem die Wand lediglich als eine in ihre eigenen Ebene gedrückte Platte sich verhält. Die Stabilität eine zylindrischen Schale gegen Längsdruck behandeln *R. Lorenz*[239]) un *S. Timoschenko*[240]).

Betreffs der Stabilität von Kugelschalen, bzw. z. B. gewölbte Kesselböden, die durch äusseren Druck beansprucht werden, verfüge wir nur über Erfahrungsformeln[241]).

232) *W. Fairbairn* und *Th. Tate,* London Phil. Trans. 1859, p. 213; fern *W. Fairbairn,* London Phil. Trans. 1858, p. 389; *F. Grashof,* Z. d. V. d. Ing. (1859), p. 234. Eine Zustammenstellung vieler Versuche findet man bei *C.* *Stromeyer,* Inst. Navat. Arch. Trans. 41 (1899), p. 128.

233) *Fox,* Engineering 25 (1878), p. 245.

234) *C. Bach,* Abhandlungen und Berichte p. 207, Z. d. V. d. Ing. (1894), p. 689.

235) *P. A. Carman,* Univ. of Illinois Bulletin nº 5 (1906); *P. A. Carma* Phys. Review 21 (1905), p. 381.

236) *R. R. Werner,* Z. d. V. d. Ing. 18 (1884), p. 135.

237) *F. Grashof,* Z. d. V. d. Ing. 28 (1884), p. 437.

238) *E. Hurlbrink,* Schiffbau 9 (1908), p. 517.

239) *R. Lorenz,* Z. d. V. d. Ing. 52 (1908), p. 1706.

240) *S. Timoschenko,* Annales de l'Institut polyt. Kiew. 1910.

241) Vgl. *C. Bach,* Z. d. V. d. Ing. 46 (1902), p. 333.

13b. Stabilität rotierender Wellen. Die ersten Untersuchungen[242]) hatten den Zweck, die Erscheinung des *Schleuderns* („whirling") bei rasch laufenden Wellen zu erklären. Man war der Meinung, dass das Schleudern der Steigerung der Umdrehungszahl eine obere Grenze setzt. Später zeigte *G. de Laval* (um 1883), dass nach Überschreitung der Umdrehungszahl die Welle wieder ruhig läuft; dieser praktischen Erfahrung folgten dann die allgemeineren theoretischen Untersuchungen über die Stabilität rotierender Wellen.

Ähnlich wie bei statischen Stabilitätsuntersuchungen kann man zwei Wege einschlagen: entweder untersucht man die Stabilität der geraden Gestalt bei dem *vollkommen axensymmetrischen System* (vollkommener Massenausgleich) oder nimmt schon in ruhendem (unbelasteten) System kleine Abweichungen, z. B. geringe Exzentrizität der Massenverteilung an. Unter Beschränkung auf stationäre Bewegungen, die mit kleinen Durchbiegungen der Welle verträglich sind, führt das erste Verfahren auf analoge Randwertaufgaben, wie die Stabilitätsprobleme des elastischen Gleichgewichts. Man hat im allgemeinen nur die gerade Form[243]) als einzige Lösung, bis auf einzelne Werte der Umdrehungszahl, die als Parameter betrachtet wird. Diese „Eigenwerte" des Parameters heissen „kritische Umdrehungszahlen"; bei diesen Umdrehungszahlen ist die Lösung nur bis auf eine Konstante bestimmt. Wird die Anordnung der Massen im Voraus exzentrisch angenommen, so entspricht den kritischen Umdrehungszahlen im Allgemeinen ein scheinbar unendlicher Wert der Durchbiegung, d. h. es giebt bei diesen Umdrehungszahlen überhaupt keinen stationären Bewegungszustand innerhalb der kleinen Formänderungen[244]).

Denkt man sich die Zentrallinie der Welle, die in dem Ruhezustande mit der x-Axe zusammenfallen soll, in der xz-Ebene durchgebogen und lässt das ganze System samt dieser Ebene mit der gleichmässigen Winkelgeschwindigkeit ω um die x-Axe rotieren, so muss die Durchbiegung z der Zentrallinie derselben Differentialgleichung genügen, wie ein ruhender Stab, der durch eine stetig verteilte Last

242) Vgl. *W. J. M. Rankine*, Machinery and millwork, London 1869, p. 549; ferner *A. G. Greenhill*, Inst. Mech. Eng. Proc. 1883, p. 182.

243) Die Durchbiegung infolge der Schwere wird zumeist vernachlässigt. Mit Berücksichtigung der Schwere ergiebt sich eine „kritische Geschwindigkeit zweiter Art", entsprechend der Resonanz zwischen Umdrehungszahl und Frequenz der Dehnungsschwingungen, die aber bei allen praktischen Ausführungen weit über den üblichen Umdrehungsgeschwindigkeiten liegt. Vgl. *A. Stodola*, Die Dampfturbinen, 3. Aufl., Berlin 1905, p. 410.

244) Für den Einfluss der Verteilung der Exzentrizität bei stetig belasteten Wellen vgl. *A. Kneser*, Zeitschr. Math. Phys. 51 (1904), p. 264.

vom Betrage $\gamma z \omega^2$ für die Längeneinheit belastet wird (γ Masse der Welle auf die Längeneinheit, JE Biegungssteifigkeit der Welle):

$$JE \frac{d^4 z}{dx^4} - \gamma \omega^2 z = 0. \tag{52}$$

Ist die Welle an den beiden Enden in der Entfernung l drehbar gelagert, so hat man die Randbedingungen

$$\text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (52) lautet mit $k = \sqrt[4]{\frac{\gamma \omega^2}{JE}}$

$$z = A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \operatorname{Cos}(kx) + D \operatorname{Sin}(kx). \tag{53}$$

Die Lösung kann von Null verschieden sein, falls

$$k = \frac{n\pi}{l},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

Somit ist die *niedrigste kritische Umdrehungszahl*[245])

$$\omega_k^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi^4 JE}{\gamma l^4}}. \tag{54}$$

Ist die Welle mehrfach gelagert und trägt sie mehrere Scheiben[246]), so gilt die Gl. (52) für die einzelnen Strecken zwischen je zwei Punkten, an welchen Scheibenräder oder Lagerungen angebracht sind. Die Scheibenräder liefern zur Belastung eine Einzelkraft vom Betrage $Z = mz\omega^2$ und ein Drehmoment in der xz-Ebene $M = (J_x - J_y)\frac{dy}{dx}\omega^2$ (m Masse, J_x, J_y Trägheitsmomente des Rades in bezug auf die x bzw. y-Axe). Alsdann gelten für diese Punkte die Randbedingungen

$$\begin{aligned} JE\left[\frac{d^2 z}{dx^2}\right]_1^2 &= M \\ JE\left[\frac{d^3 z}{dx^3}\right]_1^2 &= P, \end{aligned} \tag{55}$$

wobei z und $\frac{dz}{dx}$ stetig übergehen. An den gelagerten Punkten gelten die üblichen Randbedingungen je nach der Art der Lagerung.

Ist n die Anzahl der glatten Strecken, so liefern die Rand-

245) Vgl. z. B. *A. Stodola*, Die Dampfturbinen, 3. Aufl., Berlin 1905, p. 195.

246) *S. Dunkerley*, Phil. Trans. 185 (1894), p. 279. Das von *Dunkerley* gegebene rechnerische Verfahren stammt von *O. Reynolds* her. Man kann auch — wie *A. Stodola*, Die Dampfturbinen, 3. Aufl., Berlin 1905, p. 192 andeutet — ein graphisches Approximationsverfahren heranziehen, ähnlich, wie *L. Vianello* für das Knickungsproblem angab (siehe Fussnote 207[a])). Vgl. auch *Delaporte*, Revue de méc. 12 (1903), p. 517.

bedingungen für die $4n$ Konstanten ebensoviel homogene lineare Gleichungen. Die Bedingung, dass die Konstanten nicht sämtlich verschwinden, liefert alsdann eine transzendente Gleichung für die kritischen Geschwindigkeiten ω_k.

Für die Praxis ist die Bestimmung der niedrigsten kritischen Umdrehungszahl von besonderer Wichtigkeit. Man erhält diese zumeist mit guter Annäherung, wenn man die Welle als masselos betrachtet ($\gamma = 0$). Die Lösung lautet dann

$$z_i = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i.$$

Da die Rechnung auch mit dieser Annäherung ziemlich mühsam wird, sobald die Anordnung der Massen nicht ganz einfach ist, hat *S. Dunkerley*[245]) die Regel aufgestellt, dass man die kritische Geschwindigkeit eines Systems mit guter Annäherung durch die Formel

$$(56) \qquad \frac{1}{\omega^2} = \Sigma \frac{1}{\omega_i^2}$$

finden kann, wo ω_i die kritische Geschwindigkeit derselben Welle bedeutet, falls sie nur durch die i^{te} Scheibe belastet wäre. Diese zunächst empirisch aufgestellte Regel wurde von *C. Chree*[247]) in vielen Fällen als gute Annäherung bestätigt.

Die für die kritischen Umdrehungszahlen erhaltene Gleichung entspricht, falls man das *Moment der Trägheitskräfte* $M = 0$ setzt, genau der sogenannten Frequenzgleichung für die Biegungsschwingungen des ruhenden Systems. Nun ist häufig in praktisch wichtigen Fällen der Einfluss dieses Momentes gegenüber dem Einfluss der Kraft Z klein, so dass *die kritischen Umdrehungszahlen den Frequenzzahlen der transversalen Eigenschwingungen des ruhenden Systems* nahezu gleich sind. Man kann daher die Erscheinung der kritischen Geschwindigkeiten als *Resonanz* deuten, wobei als eingeprägte Kraft die *Zentrifugalkraft* zu betrachten ist; ihre Periode ist durch die Umdrehungszahl gegeben[247]). Verschwinden die Momente nicht, so ist

247) *C. Chree*, Phil. Mag. 7 (1904), p. 504 bestimmt die Frequenz der transversalen Schwingungen des *rotierenden* Systems nach der statischen Methode *Lord Rayleighs* und findet für die Frequenz bei einer Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω die Formel $k^2 = K^2 - \omega^2$, falls K die Frequenz der Schwingungen des ruhenden Systems bedeutet. Die kritischen Geschwindigkeiten sind dann durch $k = 0$ gegeben. Es ist jedoch zu beachten, dass *Chree* eine erzwungene Rotation der durchgebogenen Welle um die x-Axe annimmt; in der Tat erzwingt aber der äussere Antrieb unmittelbar nur eine Rotation um die Zentrallinie. Das Auftreten des Momentes M und sein Einfluss auf die kritische Umdrehungszahl wird vom Standpunkte der Kreiseltheorie aus untersucht von *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels, Heft 4, § 9, Leipzig 1910.

die kritische Umdrehungszahl höher als die Schwingungszahl der ruhenden Welle.

Trägt die Welle zahlreiche im Ganzen und Grossen gleichmässig verteilte Scheiben, so kann man nach *A. Stodola*[248]) ein mittleres „Massenträgheitsmoment auf die Längeneinheit" Θ einführen. Die Gleichung (52) wird dann ersetzt durch

$$(57) \qquad JE\frac{d^4z}{dx^4} - \Theta\omega^2\frac{d^2z}{dx^2} - \gamma\omega^2 z = 0.$$

Bei einer frei gelagerten Welle von der Länge l erhält man für die niedrigste kritische Geschwindigkeit den Wert

$$(58) \qquad \omega_k^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi^4 JE}{\gamma l^4}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\pi^2\Theta}{\gamma l^2}\right)}}.$$

Bei der rotierenden Welle ist bei vollkommen axensymmetrischer Anordnung die gerade Form der Zentrallinie jenseits der kritischen Geschwindigkeit wieder stabil. Dagegen ist die ausserhalb der kleinen Formänderungen liegende gebogene Gestalt (im Gegensatze zu den statischen Problemen der Nr. **13**a) labil.

Man erhält bessere Einsicht in die Stabilitätsverhältnisse, falls man statt der vollkommen axensymmetrischen Anordnung ein mit geringer Exzentrizität behaftetes System betrachtet. Diesen Weg haben *A. Föppl*[249]) und *A. Stodola*[250]) eingeschlagen. Namentlich erhält man Einsicht in die Verhältnisse oberhalb der ersten kritischen Geschwindigkeit.

Nimmt' man den einfachsten Fall einer masselos gedachten Welle mit zwei Lagern und einer einzigen etwas exzentrisch angebrachten Scheibe in der Mitte, so erhält man für die Durchbiegung der Wellenmitte bei gleichförmiger Rotation mit der Geschwindigkeit ω den Wert

$$(59) \qquad y_m = \frac{\omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2}\,e$$

(e Exzentrizität des Schwerpunktes der Scheibe, ω_k kritische Geschwindigkeit). Danach wächst y_m von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_k$; für $\omega = \omega_k$ wird y_m unendlich; für $\omega > \omega_k$ wird die Durchbiegung negativ, nimmt aber dem absoluten Werte nach ab bis $y_m = -e$ (für $\omega = \infty$). Der Schwerpunkt liegt von der Rotationsaxe aus betrachtet für $\omega < \omega_k$ ausserhalb der Zentrallinie (s. Figur 11), für $\omega > \omega_k$ zwischen Rotationsaxe und Zentrallinie (s. Figur 12). Für sehr grosse Werte von $\frac{\omega}{\omega_k}$

248) *A. Stodola*, Die Dampfturbinen 3. Aufl. Berlin 1905, p. 199.
249) *A. Föppl*, Civilingenieur 41 (1895), p. 633.
250) *A. Stodola*, Die Dampfturbinen, 3. Aufl. Berlin 1905, p. 188.

(grosse Geschwindigkeiten bzw. sehr biegsame Welle) rotiert die Scheibe nahezu um den eigenen Schwerpunkt (*de Lavals* Prinzip).

Man kann nun auch die Stabilität der stationären Rotation des exzentrischen Systems untersuchen. So untersucht z. B. *A. Stodola*[251])

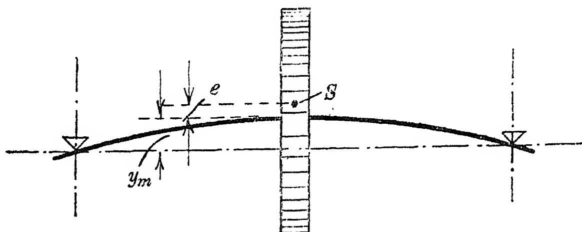


Fig. 11.

mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität des eben betrachteten einfachsten Systems unter der Bedingung, dass

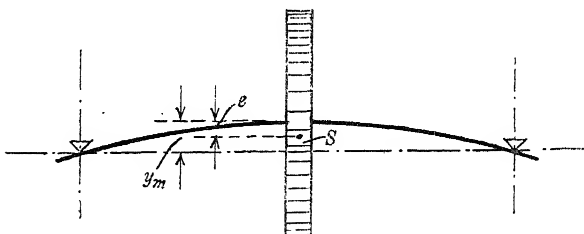


Fig. 12.

einerseits die Welle kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage, andererseits die Scheibe kleine Drehschwingungen um die Zentrallinie der Welle ausführen kann. Für dieses System mit *drei Freiheitsgraden* erweist sich die gleichförmige Rotation mit durchgebogener Zentrallinie als stabil bis zu der kritischen Geschwindigkeit ω_k, dann folgt ein Labilitätsbereich zwischen ω_k und einem Werte ω', alsdann wird die Bewegung wieder stabil zwischen ω' und ∞. Der Labilitätsbereich ist bei gleicher Exzentrizität desto grösser, je kleiner das Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf die Rotationsaxe ist; für sehr grosses Trägheitsmoment beschränkt sich der labile Bereich auf die unmittelbare Nähe der kritischen Geschwindigkeit, für sehr kleines Trägheitsmoment gewinnt die Welle die Stabilität nur bei sehr hohen

251) *A. Stodola,* Z. d. V. d. Ing. 47 (1903), p. 130; Die Dampfturbinen 3. Aufl., p. 406. Eine sehr ausführliche Berechnung der kleinen Schwingungen giebt *L. Lecornu,* Journal de l'école polytechn. 11 (1906), p. 95.

Geschwindigkeiten zurück. Die Grenzfälle ($J = 0$, $J = \infty$) kann man auch so auffassen, dass man dem System je einen Freiheitsgrad nimmt. *A. Föppl*[252]) findet, dass, wenn man sich auf die Biegungsschwingungen beschränkt, die Bewegung ausser den kritischen Tourenzahlen immer stabil ist.

Die Beanspruchung der rotierenden Wellen bei Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit diskutierten *A. Böttcher*[253]) und *Delaporte*[254]).

---

252) Vgl. *A. Föppl*, Vorlesungen über techn. Mechanik, Bd. 4, 3. Aufl. Leipzig 1909, p. 283 ff.; *Föppl* untersuchte auch die Stabilität einer „Hängespindel", d. h. einer rotierenden Scheibe, die am Ende einer pendelartig gelagerten Welle angebracht ist. Er findet, dass die gleichförmige Rotation labil wird, falls die Umdrehungszahl zwischen der Schwingungszahl des Systems als starres Pendel, und der Frequenz der elastischen Querschwingungen liegt. Vgl. Civilingenieur 41 (1895), p. 621; auch Vorlesungen über techn. Mechanik Bd. 6, Leipzig 1910, p. 66.

253) *A. Böttcher*, Z. d. V. d. Ing. 42 (1898), p. 1143.

254) *Delaporte*, Revue de mécanique 12 (1903), p. 517.

(Abgeschlossen im März 1910.)

IV 28. THEORIE DES ERDDRUCKS.

Von

H. REISSNER

IN AACHEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Ch. A. Coulomb, Essai sur une application des règles de maximis et minimis etc. Paris, Mém. prés. par. div. sav. 7 (1776) [1773] = *Coulomb,* Theorie des machines simples, Paris 1821, p. 318 ff.

C. Culmann, Die graphische Statik, Abschn. XIII: Theorie der Stütz- u. Futtermauern, Zürich 1866.

J. Boussinesq, Essai théorique sur l'équilibre de l'élasticité des masses pulvérulentes et sur la poussée des terres sans cohésion. Bruxelles, Mém. couronn. 40 (1876), Nr. 4.

A. Considère, Note sur la poussée des terres, Ann. des ponts et chaussées (4) 19 (1870), p. 547.

Fr. Engesser, Geometrische Erddrucktheorie, Zeitschr. f. Bauwesen 30 (1880), p. 189.

Fr. Kötter, Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck, Jahresber. d. dtsch. Math. Ver. 21 (1893), p. 77 ff.

M. Lévy, Essai sur une théorie nouvelle de l'équilibre des terres . . . J. de math. (2) 18 (1873), p. 241.

H. Müller-Breslau, Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906.

O. Mohr, Beiträge zur Theorie des Erddrucks, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 17 (1871), p. 344 u. 18 (1872), p. 67 u. 245 = *O. Mohr,* Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, Berlin 1906, p. 220.

J. V. Poncelet, Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations. Mém. de l'officier du génie 13 (1840).

W. J. M. Rankine, On the stability of loose earth, London Phil. Trans. 147 (1857).
— A manuel of applied mechanics, London 1858 und spätere Auflagen.

G. Rebhann, Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen, Wien 1875.

J. J. Weyrauch, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen, Allgem. Bauzeitung 1881.

E. Winkler, Neue Theorie des Erddrucks nebst einer Geschichte der Theorie des Erddrucks und der hierüber angestellten Versuche, Wien 1872.

Vorbemerkung. Überall wo Reibungskräfte ins Spiel treten, ist es bisher nur gelungen, die gesuchten Gleichgewichtszustände in Grenzen einzuschliessen, während das Zwischengebiet, in dem sich zeitlich und räumlich verwickelte elastische Vorgänge bleibender und zurückgehender Formänderung kleiner Spitzen gegeneinander abspielen, sich vollständig der physikalischen Kenntnis entzogen hat. Dieselbe Beobachtung gilt in verstärktem Maasse auch für das Gleichgewicht sandförmiger Massen.

Deshalb hat sich für die Entwicklung der Lehre vom Erddruck als fruchtbar erwiesen die Frage nach den hinreichenden und zulässigen Wandkräften, bei denen die inneren und äusseren Reibungskräfte gerade noch Gleichgewicht gewährleisten, während für die Zu-

stände zwischen den Grenzen physikalische Ansätze, die den *Hooke*schen Spannungs-Formänderungsbeziehungen beim vollkommen elastischen Körper entsprechen würden, nicht auffindbar zu sein scheinen, wenn man von einem nicht recht befriedigenden, rein formalen Ansatz *J. Boussinesqs* absieht.

Die Erkenntnis, dass diese Beschränkung der Behandlung des Erddrucks auf Grenzwertbestimmungen nötig ist, verdankt man *Ch. A. Coulomb*. Dass hier das Variationsproblem, ein Integral über unbekannte Funktionen, nämlich die Wanddrucke mit gewissen Nebenbedingungen zu einem Extremum zu machen vorlag, erkannte und formulierte allerdings erst *F. Kötter*, während sich *Coulomb* die Frage zu einem gewöhnlichen Maximum-Minimumproblem vereinfacht hatte, indem er nicht unter allen statisch möglichen Fällen den günstigen, sondern unter einer einfachen Mannigfaltigkeit von günstigen Annahmen die — allerdings nur summarisch — möglichen auswählte.

Die Verletzung der Gleichgewichtsbedingungen im Unendlichkleinen fühlte *W. J. M. Rankine*, als er eine jüngere Theorie aufstellte, die aber auch das Variationsproblem durch willkürliche Annahme eines bestimmten Grenzzustandes im Volumenelement umging.

Eine Vertiefung und Vereinigung der *Coulomb*schen und der *Rankine*schen Theorie unter dem Gesichtspunkt des Variationsproblems wird eine wichtige Aufgabe der Weiterentwicklung der Erddrucklehre sein. Der erste Teil der Aufgabe ist schon durch die Einführung und Vergleichung gekrümmter Gleitflächen von *F. Kötter* und *H. Müller-Breslau* teilweise geleistet, für den zweiten Teil wird versucht werden müssen, die neueren Methoden der Variationsrechnung nutzbar zu machen.

I. Der Spannungszustand des Erdkörpers und die Ermittlung der Wandkräfte.

Da für den Spannungszustand des kohäsionslosen Erdkörpers — wie für jeden Körper, insbesondere also auch den elastischen — die sechs Gleichgewichtsbedingungen im Innern (vgl. IV 23 Nr. 3b *C. H. Müller-A. Timpe*)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=X, \qquad X_y=Y_x,\\ (1)\qquad &\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=Y, \qquad Y_z=Z_y,\\ &\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=Z, \qquad X_z=Z_x, \end{aligned}$$

für die neun unbekannten Spannungen gelten, dagegen hier die dort

durch das *Hooke*sche Gesetz ausgedrückten Spannungsformänderungsbeziehungen fehlen, so besteht zunächst eine Unbestimmtheit der Aufgabe für die Spannungsbestimmung im Innern und an der Grenze des Erdkörpers. Diese wird auf ein kleineres Gebiet beschränkt und zum Teil behoben durch eine Ungleichung sowie das unten erörterte Minimalprinzip. Die Ungleichung (im sogenannten Grenzzustande des Volumenelements eine Gleichung) giebt die physikalische Charakteristik des Erdkörpers. Das Minimalprinzip kennzeichnet für den Grenzzustand eines endlichen Körperteils die notwendig verbleibende Unbestimmtheit der Aufgabe und liefert in gewissen Fällen die fehlenden Gleichungen, um das Problem zu einem bestimmten zu machen.

1. Die physikalische Kennzeichnung des kohäsionslosen Erdkörpers. Die Ungleichung, durch die die Charakteristik des kohäsionslosen Erdkörpers geliefert wird, kann so ausgesprochen werden:

Der Winkel, welchen die auf die Oberfläche eines Körperelementes wirkende Druckspannung mit der nach innen gezogenen Normalen einschliesst, darf einen gewissen Wert nicht überschreiten.

Dieser Winkel kennzeichnet im Innern den Reibungswiderstand des Erdreichs, an der Grenze die Rauhigkeit der Wand. Er ist im folgenden jenachdem mit φ_1 bzw. φ_2 bezeichnet.

W. J. M. Rankine[1]) hat diese physikalische Eigenart des Erdkörpers in den folgenden Sätzen analytisch formuliert:

1) Keiner der drei Hauptdrucke λ_1, λ_2, λ_3 darf eine Zugspannung sein.

2) Zwischen dem grössten und kleinsten Hauptdruck gilt die Ungleichung

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \leqq \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}. \tag{2}$$

In der Ebene dieser beiden Hauptdrucke kann man diese Ungleichung in allgemeinen Spannungskomponenten schreiben:

$$\frac{(X_x - Y_y)^2 + 4 X_y^2}{(X_x + Y_y)^2} \leqq \sin^2\varphi.$$

3) Während es beim allgemeinsten Spannungszustand immer unendlich viele konjugierte Flächenelemente giebt, so dass die Spannung p_u des einen in die Ebene des anderen p_v fällt und umgekehrt, ohne dass zwischen p_u und p_v eine Bedingung herrscht, muss beim kohäsionslosen Zustand zwischen den Spannungen p_u und p_v zweier so konjugierter Flächenelemente, die den Winkel ϑ miteinander bilden,

1) *W. J. M. Rankine*, On the stability of loose earth, Lond. Phil. Trans. 147 (1857), p. 9—27.

die folgende Beziehung erfüllt sein:

$$(3)\qquad \frac{\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi}}{\cos\vartheta - \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi}} < \frac{p_u}{p_v} < \frac{\cos\vartheta - \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi}}{\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi}}.$$

Ist insbesondere eine der Grenzen erreicht, so giebt es konjugierte Flächenelemente, die den Reibungswinkel $\vartheta = \varphi$ miteinander einschliessen und, auf die gleiche Spannungen unter dem Reibungswinkel zur Normale wirken (Gleitflächenelemente). Diese schliessen mit der Richtung des grössten Hauptdrucks beiderseits den Winkel $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ ein.

Den letzten Satz besonders verwendet *Rankine* in seiner Theorie des unbegrenzten Erdkörpers (vgl. unten Nr. **4**).

Da die Spannungskomponenten an einem Punkte sich auf andere Koordinaten wie die Produkte und Quadrate von Vektorkomponenten transformieren und also ein Tensortripel bilden (IV 14 *M. Abraham*), so lässt sich jeder räumliche Spannungszustand durch ein Ellipsoid, jeder ebene durch die Eigenschaften einer Ellipse oder eines Kreises darstellen. *Rankine*[1]), *O. Mohr*[2]) und *J. J. Weyrauch*[3]) leiten die obigen und einige andere Sätze geometrisch aus derartigen Spannungsellipsen und Spannungskreisen ab. Da dieselben in einem späteren Referate behandelt werden und andererseits identisch mit den Trägheitsellipsoiden, -ellipsen und -kreisen sind (IV 4 *G. Jung* und IV 5 *L. Henneberg*), sei dorthin verwiesen.

2. Das Köttersche Variationsprinzip. Es sei gegeben ein endlich ausgedehnter Erdkörper, dessen Grenzen teils von Wänden eingeschlossen, teils von gegebenen Oberflächenkräften ergriffen sind. Man hat dann nach dem Obigen die sechs für jeden Spannungszustand geltenden Differentialgleichungen des Gleichgewichts zur Verfügung nebst den Grenzbedingungen an den belasteten Oberflächen und den vom Rauhigkeitsgrad der Wände abhängenden Ungleichungen an den Wänden, wozu dann noch die in Nr. **1** behandelte Ungleichung tritt.

Um nun die Kräfte zu bestimmen, die auf die Wände ausgeübt müssen, damit sie (für den Grenzzustand) gegen den Druck der Erde *gerade* im Gleichgewicht sind, hat man ein Variationsproblem vor

2) *O. Mohr*, Beiträge zur Theorie des Erddrucks, Zeitschr. d. Arch.- u. Ingenieurvereins zu Hannover 17 (1871), p. 344 u. 18 (1872) p. 67 u. 245 = Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, Berlin 1906, p. 220.

3) *J. J. Weyrauch*, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen, Allgem. Bauzeitung, Wien 1881.

sich, das zuerst von *F. Kötter*[4]) in Erweiterung des *Coulomb*schen Prinzips (vgl. unten Nr. 8) formuliert wurde. Man kann es im folgenden beiden Sätzen aussprechen:

1) *Ist die Lage einer Wand durch n Parameter bestimmt, so liegen die n möglichen Wanddruckkomponenten in einem Gebiet, eingeschlossen von zwei Mannigfaltigkeiten n — 1ter Ordnung, welche gebildet werden durch je eine Gleichung zwischen den n Wanddruckkomponenten.*

2) *Widersteht die Wand einer Gleichgewichtsstörung, so genügen immer solche Wanddrucke, die der einen Grenze des Gebiets angehören, zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts (aktiver Erddruck); widersteht das Erdreich einer durch die Wand erstrebten Gleichgewichtsstörung (passiver Erddruck), so dürfen die Wanddrucke bis zu den der anderen Grenze des Gebiets entsprechenden Werten anwachsen.*

Die beiden Sätze lassen sich durch folgende Überlegungen ableiten: Da die Spannungen den Charakter von Reibungskräften haben, ist zu erwarten, dass sie jeder Verschiebung, sei es durch die Massenkräfte (die Schwere) einerseits, sei es durch die Oberflächenkräfte sowohl infolge von Auflast als von Grenzbedingungen andererseits, den grösstmöglichen Widerstand entgegensetzen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen sagt nun als Bedingung des Gleichgewichts aus, dass bei jeder mit den geometrischen Bedingungen — in diesem Fall mit dem Aufbau der Wände — verträglichen Verrückung die Summe der Arbeiten der Wandkräfte, der inneren Spannungen und der äusseren Kräfte (Schwere und Auflast) gleich oder kleiner als Null sein muss. Erfolgt die virtuelle Verrückung im Sinne der Schwere und der Auflast, so subtrahiert sich die innere von der äusseren Arbeit; erfolgt diese Verrückung entgegen der Schwere und Auflast, so addiert sich die innere Reibungsarbeit zur Arbeit der äusseren Kräfte, weil Reibungskräfte immer entgegen der Verrückung Arbeit leisten.

Im ersten Falle, dem des *aktiven Erddrucks*, wird demnach die Arbeit der Wandkräfte gleich der Differenz der beiden anderen Arbeiten, also so klein als möglich, im zweiten Falle, dem des *passiven Erddrucks*, gleich deren Summe, also so gross, als es sich mit den Gleichgewichtsbedingungen und der Neigung der Spannungen zur zugehörigen Flächennormale verträgt.

Der Aufbau der Wände bedingt eine bestimmte Anzahl von unabhängigen virtuellen Verrückungen und eine ebensolche Anzahl von

4) *F. Kötter*, Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck, Jahresber. des Deutsch. Math.-Ver. 2 (1891—92), p. 128 ff.

Komponenten des Erddrucks. Z. B. besitzt eine starre Wand eine sechsfache Bewegungsfreiheit und kann nur durch eine sechs Komponenten besitzende Kraft nach allen Richtungen gestützt werden; eine aus mehreren getrennten starren Körpern bestehende Wand würde entsprechend mehr Verschiebungs- und Kraftkomponenten bedingen.

Die bei einer virtuellen Verrückung Arbeit leistenden Resultanten der Oberflächenspannungen an der Wand $M_1 M_2 \dots M_n$ (d. h. die allgemeinen *Lagrange*schen Kräfte inbezug auf die Parameter der Wandlage, $p_1 \dots p_n$) sind infolge der Unbestimmtheit des Spannungsproblems im allgemeinen von einer Anzahl bestimmter über die Wand erstreckter Integrale willkürlicher Funktionen abhängig, die die willkürlichen Konstanten $c_1, \dots, c_r$ enthalten mögen. Die Arbeit der Spannungsresultanten,

$$\sum_1^n M_\alpha p_\alpha,$$

enthält also die M_α als Funktionen der $c_1, \dots, c_r$. Für eine bestimmte virtuelle Verrückung ergiebt sich das Minimum und Maximum von $\sum M_\alpha p_\alpha$ für gewisse von den virtuellen Verrückungen abhängende Werte der Parameter $c_1, \dots, c_r$. Man kann demnach schliessen, dass die extremen M_α und $\sum M_\alpha p_\alpha$ Funktionen der p_α sein werden, und zwar die letzteren homogene Funktionen ersten Grades, die ersteren vom nullten Grade, da die virtuellen Arbeiten sich um denselben Faktor vergrößern müssen, mit dem man alle Verrückungen multipliziert, dagegen können die Verrückungsverhältnisse in beliebigem Grade darin auftreten.

Kötter zeigt nun, dass die den maximalen und minimalen Arbeiten entsprechenden Wandkräfte die Differentialquotienten jener Arbeiten nach den Verrückungen sind.

So erhält man, da diese Ableitungen nur von den Verrückungsverhältnissen abhängen, n Gleichungen zwischen den $n-1$ Verrückungsverhältnissen und den Wandkräften, so dass man erstere eliminieren kann und je eine Gleichung zwischen den Kräften allein für den aktiven und den passiven Grenzzustand finden muss:

$$(4) \qquad \Psi_0(M_1, M_2, \dots, M_n) = 0, \qquad \Psi_1(M, \dots, M_n) = 0.$$

Sobald also die Wand eine mehr als einfache Beweglichkeit hat, giebt es nicht je einen aktiven oder passiven Erddruck, sondern eine einfache Mannigfaltigkeit von solchen, indem man $n-1$ der Erddruckkomponenten willkürlich annehmen, die n^{te} aus der Gleichung

$$\Psi(M_1, M_2, \dots, M_n) = 0$$

entnehmen kann, willkürlich natürlich nur soweit, dass sich für diese n^{te} Kraft kein unmöglicher Wert ergiebt.

Das *ebene Problem des Erddrucks* gegen eine starre Wand lässt danach zweifach unendlich viel verschiedene Werte des aktiven und des passiven Erddrucks je nach der Art der Stützung zu, da der ebene Erddruck durch drei Komponenten nach Grösse und Lage gegeben ist.

Es giebt auch hier zwei Gleichungen:

$$\Psi_0(M, X, Y) = 0,$$
$$\Psi_1(M, X, Y) = 0,$$

zwischen den drei Komponenten des Erddrucks, z. B. dem Drehmoment um den Koordinatenanfang, der Horizontal- und der Vertikalkomponente, bei deren Erfüllung ein Fall des aktiven bzw. passiven Erddrucks eintritt. Diese Gleichungen werden natürlich nur innerhalb enger Grenzen einen Sinn haben und stellen, geometrisch aufgefasst, geschlossene Flächen vor, deren Koordinaten nur um kleine Teile ihrer Werte an einem Punkt variieren.

Danach dürfte man, so lange man *im möglichen Bereich* der Gleichungen bleibt, von den drei Unbekannten des ebenen Erddrucks — Grösse, Richtung und Lage (Angriffspunkt) — zwei willkürlich annehmen und die dritte dann ermitteln oder, versuchsmässig gesprochen, man müsste, um die Erddruckaufgabe zu einer bestimmten zu machen, der Wand *nur eine* Bewegungsbeschränkung auferlegen, z. B. die Wand auf einem Gleitlager drehbar stützen, dessen Anordnung innerhalb des möglichen Bereiches von Ψ willkürlich ist (Fig. 1).

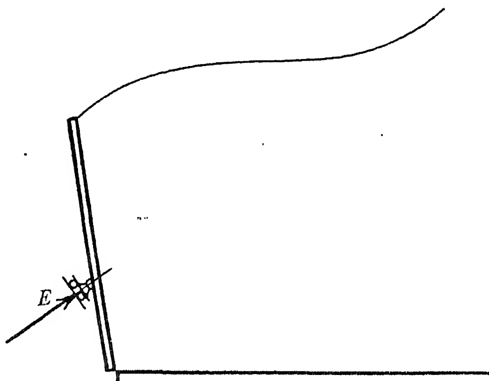


Fig. 1.

Die Grundaufgabe der Erddrucktheorie ist also nach *F. Kötters* Prinzip nur bei Bestehen einer geometrischen Bedingung oder nur einer Kraftkomponente für die Wand eine bestimmte, in allen anderen Fällen eine notwendig so oft unbestimmte, als man geometrische Bedingungen oder Stützkräfte hinzufügt.

Der gewöhnliche Fall der Anwendung ist der, dass die Wandkräfte des aktiven Erddrucks durch den passiven Erddruck des Wandfundaments hervorgerufen werden.

Hier sind streng genommen die Hinterseite und die Sohle der Wand als eine einzige Wandfläche aufzufassen. Der Erddruck ist in diesem Fall eine nach Grösse und Richtung gegebene Kraft, nämlich das Gewicht der Mauer, und es ist zu untersuchen, ob diese gegebene Wandkraft innerhalb des Bereiches der möglichen Gleichgewichtszustände fällt.

Fällt der die Grösse und das Drehmoment des Mauergewichts darstellende Punkt ausserhalb des Gebietes zwischen den Flächen $\Psi_0(M_1, \ldots, M_n) = 0$ und $\Psi_1(M_1, \ldots, M_n) = 0$, so sinkt die Mauer entweder in die Fundamentsohle ein oder weicht nach aussen oder innen aus.

3. Die streng gelösten Fälle des rechteckigen und des kreisförmigen Spaltes und ihre überschlägliche Behandlung. Das *Kötter*sche Kriterium führt also das Problem des Erddrucks auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurück, die allerdings bisher nur in den einfachsten Fällen eine Lösung erfahren hat. Diese Fälle sind von *Kötter* selbst gegeben worden und betreffen den Bodendruck in unendlicher Tiefe in einem Spalt zwischen parallelen Wänden und in einem kreisförmigen Rohr [5]).

Da diese Aufgaben bisher die einzigen dem erweiterten *Coulomb*schen Prinzip zugänglichen gewesen sind, sollen sie hier näher betrachtet werden.

Für beliebige Gefässform wird zunächst bewiesen, dass in einer Tiefe, in der der Bodendruck nach unten nicht mehr zunimmt (in unendlicher Tiefe), überall der Grenzzustand des Gleichgewichts ohne der Allgemeinheit zu schaden, angenommen werden kann, d. h. in jedem Punkt ein Flächenelement liegen muss, in dem die Spannung mit der Flächennormale den Reibungswinkel bildet.

In dem besonderen *Fall des Parallelspaltes* wird sodann gezeigt, dass die Normalspannung auf vertikale Querebenen senkrecht zu den Wänden zwischen gewissen Grenzen, ohne den Bodendruck zu ändern, beliebig angesetzt werden darf, dass ferner die Schubspannungen an diesen Flächenelementen verschwinden.

Es wird dann die Aufgabe ein ebenes Spannungsproblem, bei dem überall der Grenzzustand herrscht. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt ein konstanter Horizontalschub H senkrecht zu den Wänden und für die senkrechte Schubspannung in Schichten parallel den Wänden ein von der Mitte nach den Wänden hin linear wachsender Wert.

---

5) *F. Kötter*, Der Bodendruck von Sand in vertikalen, zylindrischen Gefässen, Journ. f. Math. 120 (1899), p. 189—241.

Der Bodendruck auf die Flächeneinheit kann dann aus Horizontalschub H und senkrechter Schubspannung aus der Bedingung des Grenzzustandes ganz wie im unten erörterten *Rankine*schen Problem angegeben werden und es ist schliesslich H so zu bestimmen, dass der gesamte Bodendruck ein Minimum wird.

Für den *kreisförmigen Querschnitt* wird nun zuerst mit Hilfe des Superpositionsprinzips abgeleitet, dass zu jeder nicht axensymmetrischen Spannungsverteilung eine gewisse andere durch Integration aus der ersten erhaltene axensymmetrische mit demselben Bodendruck gehört und man also zur Ermittlung des Spannungszustandes mit dem kleinsten Bodendruck nur unter den axensymmetrischen zu suchen braucht.

Für diese werden die Hauptdrucke aus den Spannungen inbezug auf das Polarkoordinatensystem der Symmetrieaxe ausgedrückt und aus der physikalischen Ungleichung zwischen den Hauptdrucken ein physikalisch allein möglicher Bereich für den Radialdruck angegeben. Durch diesen bedingt sich die spezifische Bodenpressung und damit der gesamte Bodendruck als Integral, das zu einem Minimum gemacht werden soll, um den aktiven Erddruck anzugeben.

Es ergiebt sich weiter eine Trennung in zwei Gebiete, in deren einem die Normalspannung in axialen Schnitten der mittlere Hauptdruck, während sie in dem anderen der grösste Hauptdruck ist. In beiden Gebieten herrscht überall der Grenzzustand.

Durch eine komplizierte Betrachtung wird jetzt nachgewiesen, dass dem kleinsten Bodendruck der Zustand entspricht, wo die Normalspannung in Axialschnitten gleichzeitig mittlerer und grösster Hauptdruck ist, d. h. wo die beiden grössten Hauptdrucke gleich sind.

Dann genügt der Radialdruck R einer Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integration in geschlossener Form gelingt und deren Integrationskonstante so bestimmt werden muss, dass der Wanddruck den Reibungswinkel nicht überschreitet und der Bodendruck ein Minimum wird. Merkwürdigerweise wird dabei die Wandreibung nicht voll ausgenützt, d. h. der Wanddruck erreicht die Grenze des Reibungswinkels im allgemeinen nicht.

Die Berechnungsvorschriften werden am Schluss so übersichtlich, als es die Natur des Problems erlaubt, zusammengefasst und durch eine Zahlentabelle der Bodendrucke für verschiedene Reibungskoeffizienten bei rauher Wand abgeschlossen. Überall ist die innere Reibung grösser oder gleich der Wandreibung gesetzt.

Die schwierigen Entscheidungen und Grenzeinschliessungen, durch die sich der Verf. besonders beim zweiten Problem hindurchkämpft, lassen erkennen, wie schwierig eine Weiterführung der Theorie sein wird.

Für die *Bedürfnisse der Praxis* bei der Berechnung der Wandstärken von solchen röhrenartigen Gefässen oder „Silos" hat sich ein Verfahren bewährt, das den Bodendruck und den Seitendruck in beliebiger Tiefe mit *genügender Annäherung* zu berechnen gestattet. Diese von *G. Hagen, Ph. Forchheimer, M. Koenen* und *H. A. Janssen*[6]) angewandte Methode setzt voraus, dass in jeder Tiefe die Hauptdrucke parallel der Rohraxe und senkrecht zu ihr in der Querschnittsebene liegen und dass die beiden letzteren gleich und in der Querschnittsebene konstant sind, und ferner, dass überall der Grenzzustand herrscht, d. h. zwischen der der Rohraxe parallelen Hauptspannung, d. h. dem Bodendruck p und der Hauptspannung in der Querschnittsebene, der Horizontalkomponente des Wanddrucks H die *Rankine*sche Beziehung gilt (siehe Nr. **6**):

$$H = p\,\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = p \operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = p\cdot k.$$

Schliesslich wird im Widerspruch dazu der Wanddruck unter dem Reibungswinkel φ_1 wirkend angenommen.

So entsteht, wenn mit F der Rohrquerschnitt, mit U der Umfang bezeichnet wird, zwischen dem Gewicht des Volumenelements $F\gamma dy$, der Vertikalkomponente des Wanddrucks

$$H \operatorname{tg}\varphi_1\, dy\, U = pk \operatorname{tg}\varphi_1\, dy\, U,$$

und dem Zuwachs der Bodenpressung die Differentialgleichung des Gleichgewichts:

$$\frac{dp}{dy} + pk \operatorname{tg}\varphi_1 \frac{U}{F} = \gamma$$

und deren Integral mit der Anfangsbedingung $p = p_0$ für $y = 0$ und der Abkürzung $c = \dfrac{\gamma}{k \operatorname{tg}\varphi_1 \frac{U}{F}}$:

$$p = c\left(1 - \frac{c-p_0}{c}\, e^{-yc}\right).$$

Hier ist c der Bodendruck in unendlicher praktisch schon in endlicher Tiefe, wo das Gewicht eines Volumenelements vollständig von dem

6) *G. Hagen,* Untersuchung über den Druck u. die Reibung des Sandes § 5, Ann. Phys. Chem. 28 (1833), p. 316 ff.; *Ph. Forchheimer,* Über den Sanddruck und Bewegungserscheinungen im Innern trockenen Sandes, Dissertat. Tübingen 1883 (Aachen), p. 18 ff.; *H. A. Janssen,* Versuche über Getreidedruck in Silozellen, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 39 (1895), p. 1045; *M. Koenen,* Zentralblatt der Bauverwaltung.

Wanddruck e auf die Flächeneinheit

$$e_\infty = \frac{ck}{\cos\varphi_1} = \frac{\gamma}{\sin\varphi_1 \frac{U}{F}}$$

aufgenommen wird. Dieser Druck ist also unabhängig von der inneren Reibung und nur von der Wandreibung abhängig.

Die Ergebnisse lassen sich in gute Übereinstimmung mit den Versuchen bringen, wenn k nicht aus dem Reibungswinkel φ, sondern aus besonderen Versuchen bestimmt wird. Z. B. findet *Janssen*

$$k = 0{,}67 \operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}3$$

für Weizen und Holzwände. (Siehe Abschnitt III unten, Versuche.)

Später hat *Kötter*[7]) auch Grenzwerte für die Drucke auf den Verschluss einer Bodenöffnung beliebiger Gestalt eines Gefässes mit weit entfernten Wänden ausgegeben, die der Erfahrung gemäss für den aktiven Erddruck (auf den nachgebenden Stempel) einen endlichen Wert bei unendlich grosser Schütthöhe liefern, für den passiven Erddruck ein stärkeres Anwachsen mit der Schütthöhe als das lineare, hydrostatische zeigen. Die wirklichen Grenzwerte können noch etwas weiter auseinanderliegen, weil bei der Ableitung Spannungszustände nach Zylinder- und Kegelschalen über der Öffnung geordnet vorausgesetzt werden. Die als Ergebnis auftretenden bestimmten Integrale werden durch bequem berechenbare Potenzreihen, für $\varphi = 30^0$, in geschlossener Form dargestellt und durch Kurven erläutert. Ein Vergleich mit den früheren Ergebnissen über den Bodendruck in Röhren zeigt die theoretisch zu erwartenden Unterschiede.

4. Rankine-Schefflers Spannungsverteilung im unbegrenzten Erdkörper und die davon ausgehenden Arbeiten. *Rankine* hat die Beobachtung, dass das ebene Spannungsproblem ein bestimmtes wird, wenn überall der Grenzzustand als erreicht angenommen ist, benutzt, um eine neue Erddrucktheorie gegenüber der unten zu besprechenden Gleitprismatheorie der *Coulomb*schen Schule aufzustellen. Sein Verfahren befriedigt die Differentialgleichungen des Gleichgewichts und die physikalische Ungleichung, lässt dagegen die Fragen nach den kleinsten und grössten Wanddruckarbeiten bei vorgeschriebenem Freiheitsgrade der Wand und den zugehörigen Bedingungen an den Grenzen und insbesondere im Unendlichen unerledigt und liefert einen immer möglichen, oft wahrscheinlichen, in einzelnen Fällen aber weit von der oberen und unteren Grenze abliegenden Zustand.

7) *F. Kötter*, Über den Druck von Sand gegen Öffnungsverschlüsse im horizontalen Boden kastenförmiger Gefässe, Sitzungsber. d. Pr. Ak. d. W. 1909, S. 493.

Für den Fall von Massenkräften (Schwere) hat sich sein Verfahren für ebene Spannungszustände in eben begrenzten Halbräumen und den daraus abgeleiteten Winkelräumen und für einige weitere unten erwähnte Spannungszustände in gewichtslosen Sandkörpern als verwendbar erwiesen.

Die Darstellungsweise der ursprünglichen *Rankine*schen Abhandlung erscheint in anbetracht der Ergebnisse unnötig abstrakt, offenbar hoffte *Rankine* auf ein umfassenderes Anwendungsgebiet.

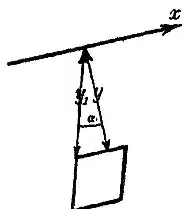


Fig. 2.

Bei Eigengewicht lauten im ebenen Problem die Gleichgewichtsbedingungen (Fig. 2):

$$\text{(3a)}\quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = \gamma \sin\alpha, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial y} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \gamma \cos\alpha.$$

Die physikalische Bedingung nimmt die Form an:

$$\text{(1a)}\quad (X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 \leqq (X_x + Y_y)^2 \sin^2\varphi.$$

Die Lösung ergiebt sich sehr einfach, unter der Annahme

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} = 0,$$

d. h. bei unveränderlicher Spannungsverteilung längs der Oberfläche, und den Grenzbedingungen:

$$X_y = Y_y = 0 \quad \text{für} \quad y = 0$$

zu

$$X_y = Y_x = \gamma y \sin\alpha, \quad Y_y = \gamma y \cos\alpha, \quad X_x = \gamma y \cdot h,$$

wo h je nach der Art des Grenzzustandes einer der Werte

$$\frac{\cos\alpha(1 \mp \sin^2\varphi) \mp 2\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\alpha}}{\cos^2\varphi}.$$

Rankine selbst benutzt nicht ein rechtwinkliges Koordinatensystem, sondern geht von zwei konjugierten Spannungen aus, nämlich der vertikalen Spannung auf ein der Oberfläche paralleles Element und der der Oberfläche parallelen Spannung auf ein vertikales Flächenelement. Im Grenzfall müssen beide Spannungen das Verhältnis

$$\frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}$$

haben, und da die vertikale Spannung auf das der Oberfläche parallele Element $\gamma y_1 \cos\alpha$ beträgt, muss die der Oberfläche parallele Spannung einen der beiden Werte

$$\gamma y_1 \cos\alpha \frac{\cos\alpha \mp \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}{\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}}$$

besitzen.

Der Druck senkrecht zur Spannungsebene nimmt als „passiver Druck“ den kleinsten mit dem Gleichgewicht verträglichen Wert, den des kleineren Hauptdruckes in der Ebene des Problems an. Die Hauptdrucke in dieser Ebene und ihre Lage werden aus den konjugierten Spannungen nach den Sätzen in (1) gefunden. Auch die Ebenen grösster Druckneigung (Gleitflächen) sind dann unmittelbar bekannt.

Auf ganz denselben Überlegungen teils analytischer, teils graphischer Natur beruhen die Arbeiten von *M. Lévy*, *E. Winkler*, *A. Considère*, *J. Weyrauch* und *O. Mohr*[7a]).

Weyrauch geht von der Annahme ebener Gleitflächen und der Erfüllung aller drei Gleichgewichtsbedingungen für ein endliches Prisma aus und gelangt zu den Ansätzen und Ergebnissen von *Rankine* bezüglich des längs der Oberfläche unveränderlichen Zustandes und des auf senkrechte Wände der Oberfläche parallelen Drucks zurück. *E. Winkler* führt mit Hilfe der *Airy*schen Spannungsfunktion (IV 23, Nr. 3b) die Reibungsgleichung auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und vierten Grades zurück, wodurch er aber nichts Neues gewinnt. *O. Mohr* stellt die Sätze in (1) mit Hilfe eines Spannungskreises übersichtlich dar.

Für unendliche Erdkörper von gekrümmter Begrenzung hat *J. Boussinesq*[8]) die *Rankine*schen Ansätze vervollkommnet und ein näherungsweises Lösungsverfahren angegeben.

Der Übertragung des *Rankine*schen Spannungszustandes auf die Ermittlung des Drucks auf einschliessende Wände wurde von *B. de St.-Venant* und *Boussinesq* der Vorwurf gemacht, dass die Grenzbedingungen, die die Rauhigkeit der Wand angeben, im allgemeinen nicht berücksichtigt seien und ein Korrektionsverfahren aufgestellt, das unter Voraussetzung kleiner Abweichungen vom *Rankine*schen Zustand zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führt und diese Grenzbedingungen erfüllt.

Allerdings werden durch dieses Verfahren manche Unwahrscheinlichkeiten des *Rankine*schen Spannungszustandes in dem durch Wände

7a) *M. Lévy*, Essai sur une théorie nouvelle de l'équilibre des terres, J. de math. (2) 18 (1873), p. 241: *E. Winkler*, Neue Theorie des Erddrucks, Zeitschr. d. österr. Ingenieur- u. Architektenvereins 23 (1871), p. 79; *A. Considère*, Note sur la poussée des terres, Ann. des ponts et chaussées (4) 19 (1870), p. 547; *J. J. Weyrauch*, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen, Allgem. Bauzeitung 1881; *O. Mohr*, vgl. Fussn. 2.

8) *J. Boussinesq*, Essai théorique sur l'équilibre de l'élasticité des masses pulvérulentes et sur la poussée des terres sans cohésion, Bruxelles Mém. couronn. 40 (1876) Nr. 4, p. 169.

begrenzten Erdkörper behoben, jedoch kann dieses an sich bemerkenswerte Korrektionsverfahren von dem eingangs besprochenen Standpunkt aus nicht als wesentliche Verbesserung anerkannt werden, da auch durch dasselbe wieder nur mögliche, aber keine Grenzfälle errechnet werden. Ein besonders unwahrscheinlicher *Rankine*scher Zustand ergiebt sich für abfallendes Gelände und senkrechte Wand (Fig. 3).

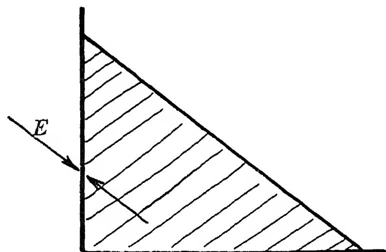


Fig. 3.

O. Mohr[2]) will die *Rankine*sche Theorie nur in solchen Fällen anwenden, in denen die Hauptspannungslinien die Geländeoberfläche schneiden und empfiehlt für die aus diesem Rahmen herausfallenden Aufgaben eine Interpolation, für die dann aber gar keine Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind.

In einzelnen Fällen würde sich wohl herausstellen, dass der *Kötter*sche Grenzzustand die Erreichung der maximalen Druckneigung in jedem Punkte in sich schliesst, so dass manche bisher unter dieser Voraussetzung gefundene Lösungen ihren Wert behalten werden.

5. Grenzzustände im ring- und spaltförmigen gewichtslosen Erdkörper. Dahin gehören die von *Boussinesq* angegebenen Fälle von Spannungsverteilung bei Abwesenheit der Massenkräfte (Schwere) infolge von Grenzkräften allein.

Ein solcher Fall ist die ebene Spannungsverteilung in ringförmigen schwerelosen Erdkörpern. *Boussinesq* führt hier zunächst Polarkoordinaten ein und stellt als die drei abhängigen Variablen die Differenz der Hauptspannungen, ihre Summe und den Winkel, den die kleinere der Hauptspannungen mit dem Radiusvektor bildet, auf. Die beiden so entstehenden Differentialgleichungen des Gleichgewichts und die für die innere Reibung charakteristische Gleich. (1) werden integriert in dem Falle axensymmetrischen Zustandes und wenn der Winkel zwischen Hauptspannung und Radiusvektor längs des Radius oder der Ringkreise konstant ist.

Die letzte Bedingung liefert das Bild eines diedrischen Erdkörpers zwischen starren, rauhen, sich in der Axe schneidenden Ebenen[9]).

In einer anderen Arbeit[10]) bestimmt *Boussinesq* den Grenzspan-

9) *J. Boussinesq*, Équilibre des massivs pulverulents, p. 134—150.

10) Sur les modes d'équilibre limite les plus simples que peut présenter un massiv sans cohésion fortement comprimé, Paris C. R. 80 (1874), p. 546—549.

nungszustand eines gewichtslosen zwischen zwei rauhen und zwei glatten einen Rechteckquerschnitt bildenden Wänden enthaltenen Erdkörpers, dessen Spannungen in der Richtung senkrecht zu den glatten Wänden sich nicht ändern.

Einen weiteren einfachen derartigen Fall giebt *Kötter*[11]) in seinem Referat an.

6. Das Pauker-Rankinesche Fundamentproblem. Hierher gehört schliesslich die *Pauker-Rankine*sche Untersuchung der zulässigen Fundamentpressungen. *Rankine* nimmt einen zentralen durch Auflast $+p$ beanspruchten Zylinder und einen äusseren unbelasteten, unbegrenzten Erdkörper an. In beiden Gebieten werden die Hauptspannungen näherungsweise wagerecht (parallel der Oberfläche) und senkrecht vorausgesetzt. Im Grenzfalle beträgt im Aussenraum die senkrechte Hauptspannung γh, die kleinste bzw. grösste wagerechte Hauptspannung nach Gl. (2) (1):

$$\gamma h \frac{1 \mp \sin\varphi}{1 \pm \sin\varphi}.$$

Diese wagerechte Hauptspannung wirkt auf den inneren Zylinder und erzeugt dort wieder nach Gl. (1) eine grösste bzw. kleinste senkrechte Hauptspannung oder Auflast:

$$p_{\substack{\min\\\max}} = \gamma h \left(\frac{1 \mp \sin\varphi}{1 \pm \sin\varphi}\right)^2 = \frac{\mathrm{tg}^4}{\mathrm{cotg}^4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Der so gefundene Spannungszustand ist statisch möglich und das Ergebnis also im Gleichgewichtsgebiet; aber die Erfahrung zeigt, dass der Erdboden sehr viel grössere Belastungen mit Sicherheit tragen kann und auch tragfähig ist für die Fundamenttiefe $h = 0$[12]).

7. Boussinesqs Kennzeichnung körniger Stoffe und die Zustände zwischen den Grenzwerten. Im Gegensatz zu allen anderen Bearbeitern des Erddruckproblems, die sich mit einer Feststellung der Grenzen des Gleichgewichtsgebiets begnügen, sucht *Boussinesq* durch eine genauere physikalische Kennzeichnung des Erdkörpers, die die bis dahin übliche von *Coulomb* mit umfasst, auch die Zwischenzustände zu umfassen.

11) Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck, p. 120.

12) *Rankine*, loc. cit.; *Pauker*, Erklärender Bericht zum Projekt einer Seebatterie zu Cronstadt, J. d. Minist. d. (russischen) Verkehrsanstalten, Sept. 1889; *P. Jankowski*, Widerstand d. Gründungen, J. d. Minist. d. Verkehrsanst., Jan. Febr. Dez. 1889, vergl. Fortschr. d. Math. 21 (1889), p. 888.

Zu dem Zweck erweitert er die Spannungs-Formänderungsbeziehung bis zu Gliedern zweiten Grades dergestalt, dass:

1) eine Formänderung nur in dem Maasse Spannungen bedingt, als gleichzeitig ein allseitiger Druck p stattfindet;

2) bei allen Formänderungen die Summe der Dehnungen, d. h. die Volumänderung verschwindet;

3) dieser sandförmig elastische Zustand nur so lange besteht, als die grösste Hauptdehnung kleiner als $\frac{\sin\varphi}{m}$ ist, wo φ der Reibungswinkel und m eine Elastizitätskonstante.

Der analytische Ausdruck dieser drei Annahmen lautet in der gebräuchlichen Bezeichnungsweise:

$$X_x = -p(1-2me), \quad Y_y = -p(1-2mf), \quad Z_z = -p(1-2mg),$$
$$Z_y = pma, \quad X_z = pmb, \quad Y_x = pmc,$$
$$e+f+g=0, \quad p = -\tfrac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z) > 0,$$

wo e, f, g die drei Dehnungen, a, b, c die drei Winkeländerungen bedeuten.

Die Integration der Differentialgleichungen des Gleichgewichts (1) unter Beachtung dieser Spannungs-Formänderungsbeziehungen führt *Boussinesq* nur für den ebenen Spannungszustand, der sich parallel einer unbelasteten, ebenen Oberfläche nicht ändert, in einfacher Weise aus, erreicht es aber, das Resultat mit Hilfe der verfügbaren Integrationskonstanten auf Erdkörper, die auf einer Seite von ebenen glatten oder rauhen Wänden begrenzt sind, anzuwenden.

Bei weiterer Untersuchung zeigt sich, dass ein Teil der gewonnenen Ergebnisse in einer von der unbekannten Elastizitätskonstante m abhängigen Tiefe die Elastizitätsgrenze überschreitet und also unmöglich wird, und dass auch für die Werte der Integrationskonstanten dadurch Grenzen gegeben sind.

Bei Erreichung dieser Grenzen stellt sich der *Rankine*sche Spannungszustand in allen seinen Ergebnissen dar.

Boussinesq fügt seinen Ausführungen in einem späteren Kapitel selbst die Beschränkung hinzu, dass ein Sandkörper in Wirklichkeit wohl nie bei der Auffüllung innerhalb seiner Elastizitätsgrenze bleiben werde und dass deshalb die Bedingung einer rauhen Mauer, die anliegende Schicht festzuhalten, wohl nie erfüllt sein wird. Um trotzdem die Zwischenzustände ermitteln zu können, schafft er den Begriff des stabilen Zustandes, d. h. des Zustandes, bei dem die grösste Hauptdehnung den grössten mit der Standfestigkeit der Mauer verträglichen Wert hat, und nimmt an, dass dieser Zustand wirklich eintreten wird.

Die übrigen Teile seiner Abhandlung sind schon in den vorhergehenden Nummern erwähnt.

Gegen die *Boussinesq*sche Auffassung, die bisher seit 1876 keine Schule gemacht hat, lassen sich manche Bedenken erheben.

Zunächst erscheint es falsch, dass die Volumänderung des Sandes unendlich klein von höherer als der betrachteten Ordnung sein soll, während in Wirklichkeit sehr grosse Verschiedenheiten im spezifischen Gewicht eines und desselben Sandes auftreten können, z. B. bei genügend grossem allseitig gleichem Druck ohne Überschreitung der *Boussinesq*schen Elastizitätsgrenze. Sodann müsste aus den Spannungs-Dehnungsbeziehungen unterhalb der Elastizitätsgrenze ein Zurückgehen in den natürlichen Zustand bei verschwindenden Spannungen hervorgehen. Statt dessen ergeben sich die Spannungen $\frac{0}{0}$, also abhängig von der Art des Verschwindens der Spannungen.

II. Coulombs Prisma des grössten Drucks und die Gleitflächentheorie.

In Anbetracht der grossen Schwierigkeiten, die sich einer einwandfreien Darstellung der Spannungszustände im Erdreich entgegenstellen, muss man es natürlich und notwendig finden, dass sich eine mehr summarische Abschätzung der Grenzwerte des Wanddrucks für die Praxis entwickelt hat, die sich einerseits mit Erfahrungen an ausgeführten Bauwerken und mit Laboratoriumsversuchen gut verträgt, andererseits in neuerer Zeit auch den Anschluss an die schärfere Theorie zu finden anfängt. (Vgl. die Vorbemerkung.)

Es handelt sich hier hauptsächlich um das ebene Problem des Erddrucks eines hinter der Mauer unendlich ausgedehnten Erdkörpers mit beliebiger Geländebegrenzung und Auflast.

8. Das Prisma des grössten Druckes. Ihren Ausgangspunkt nimmt diese Entwicklung von *Coulomb*, während seine Vorgänger nur unbrauchbare Versuche geliefert hatten. Von der schon oben erörterten Vorstellung des Reibungskoeffizienten ausgehend, stellt *Coulomb* als die mindeste Forderung auf, dass alle Prismen, die durch die Wand, die Geländeoberfläche und einen beliebigen *ebenen* Schnitt durch den Mauerfuss (den untersten Punkt der Wandoberfläche) begrenzt sind, im Gleichgewicht sein müssen, unter dem Einfluss des Eigengewichts und der Kräfte an den Grenzflächen. Über die letzteren Kräfte brauche man nur die mit der Reibung verträgliche günstigste Annahme zu machen und habe als massgebend dann das-

jenige Prisma anzusehen, das den grössten Wanddruck gegen Abgleiten auf die Wand zu (aktiven Erddruck), bezw. den kleinsten Druck gegen Abgleiten in Richtung des Drucks (passiven Erddruck) erfordere[13]).

Auch die Kohäsion berücksichtigt *Coulomb* durch eine der Länge der Fuge proportionale Schubkraft in der Fuge und führt seine Auffassung analytisch für eine senkrechte Wand von gegebenem Rauhigkeitsgrad und horizontal abgeglichenes, irgendwie belastetes Gelände mit Hilfe einer Maximalrechnung durch.

Wie schon oben bemerkt wurde, sind diese *Coulomb*schen Grenzwerte aus einer anderen Mannigfaltigkeit ausgewählt, als die des *Kötter*schen Variationsprinzips: während *Coulomb* unter den günstigsten Annahmen die statisch summarisch möglichen sucht, denkt sich *Kötter* aus allen möglichen Zuständen die günstigsten bestimmt. Von den *Coulomb*schen Schnittfugen, in denen die Reibung gerade erschöpft ist, werden die beiden möglichen (aktiven und passiven) Gleitflächen herausgesucht; dagegen ist die *Rankine-Kötter*sche Theorie bestrebt, unter allen möglichen Gleitflächen die günstigste zu wählen.

Dass die dem grössten bzw. kleinsten Wanddruck entsprechende Schnittfuge in Wirklichkeit die einzige, an der die Reibung voll ausgenutzt ist, sein kann, sieht man daraus, dass bei Annahme einer anderen Schnittfuge erstere nicht ins Gleichgewicht zu bringen wäre, ohne dass der Druck an ihr den Reibungswinkel überschritte.

Coulomb nimmt Angriffspunkt und Richtung des Wanddrucks als gegeben an, wie das innerhalb gewisser Grenzen auch die im ersten Teil behandelte Theorie als zulässig nachweist und kann seine, verschiedenen Prismen entsprechenden Grössen durch eine Zerlegung von Eigengewicht und Auflast nach den beiden gegebenen Richtungen des Drucks an der Schnittfuge und an der Wandfläche finden (Fig. 4).

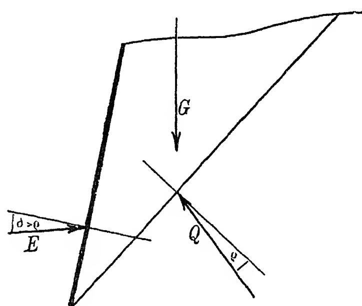


Fig. 4.

Von den aus dieser Zerlegung entstehenden Widersprüchen und ihrer Deutung soll weiter unten die Rede sein.

13) *Ch. A. Coulomb*, Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatif à l'architecture. Paris, Mém. près. par div. savants 7 (1776) [1773]. Abgedruckt in *Coulomb*, Théorie des machines simples, Paris 1821, p. 318 ff. und deutsch in Böhms Magazin f. Ingenieure u. Artilleristen 5 (1779), p. 161.

Français[14]) hat den *Coulomb*schen Ansatz für geneigte Wand und horizontales Gelände einwandfrei und analytisch elegant durchgeführt durch Benutzung der Tatsache, dass für diesen Fall die Gleitlinie den Winkel zwischen Mauer und Böschung halbiert und durch Einführung der Kohäsionshöhe, d. h. der Höhe, bis zu der das Erdreich unter der Wandneigung stehen bleibt. Später hat *H. Audoy*[15]) in recht unübersichtlichen Formeln auch Ergebnisse für gebrochene Geländelinie abgeleitet.

Damit war die Fähigkeit der Analyse zu einer handlichen Darstellung der Abhängigkeit zunächst erschöpft, und erst die graphische Statik in den Händen von *J. V. Poncelet*, *C. Culman*, *G. Rebhann*, *St. Guilhem* und *E. Winkler* hat dem *Coulomb*schen Gedankengang für beliebige Wandformen und Neigungen und beliebige Geländeform und Auflast einen in der Anwendung ausserordentlich bequemen Ausdruck gegeben.

In der Erläuterung der hier gegebenen verschiedenen geometrischen Methoden folgen wir der zwar nicht ganz historischen, aber übersichtlichen Darstellung von *H. Müller-Breslau*[16]).

9. Das Ponceletsche gedrehte Kräftepolygon[17]). Alle geometrischen Methoden benutzen den Umstand, dass das aus Gewicht des Prismas G, Wanddruck E und Gleitflächendruck Q gebildete Kräftedreieck durch Drehung zwischen die Böschungsebene (unter Winkel ϱ gegen die Wagerechte) und die Versuchsgleitfläche so eingepasst werden kann, dass die dritte Seite mit der Wandfläche einen Winkel gleich der Summe von Böschungswinkel und Reibungswinkel der Wand einschliesst (Fig. 5).

Es soll nun derjenige Winkel φ gefunden werden, für den der aus dieser Konstruktion sich ergebende Erddruck ein Maximum wird, analytisch

$$E = \left(\frac{G \sin(\varphi - \varrho)}{\sin(\varphi - \varrho + \psi)}\right)_{\max},$$

wo ψ der Winkel zwischen Wanddruck und der Vertikalen.

---

14) *Français*, Recherches sur la poussée des terres, sur la forme et les dimensions des revêtements et sur le talus d'excavation, Mém. de l'off. du génie (1820) 157—206; *Köszeg*, Versuche über den Seitendruck der Erde, Wien 1828.

15) *Audoy*, Note additionel au mémoire de M. Michaux sur la constructions de revêtements, Mém. de l'officier du génie 11 (1832), p. 349—374.

16) *H. Müller-Breslau*, Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906.

17) *J. V. Poncelet*, Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations, Note additionelle sur les relations analytiques, qui lient entre elles la poussée et la butée de la terre. Mém. de l'officier du génie 13 (1840).

Bei nicht ganz regelmässiger Anordnung wird G eine schwer oder garnicht analytisch darzustellende Funktion vom Gleitflächenwinkel φ.

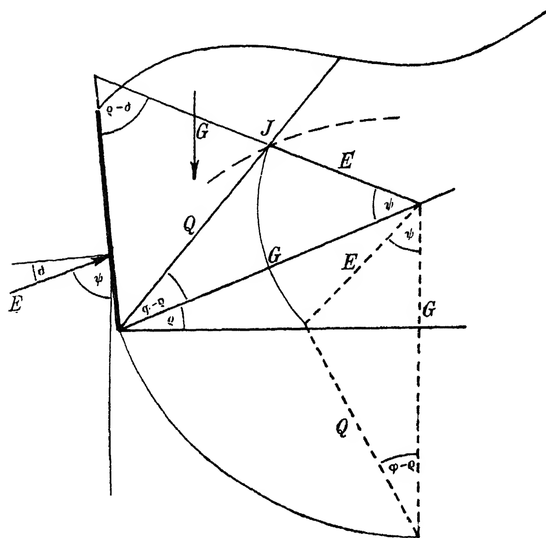


Fig. 5.

10. Die Culmannsche Kurve und das Engessersche Polgebiet. Um das Maximum von E zu finden, zeichnet *C. Culmann*[18]) für verschiedene φ eine von der Spitze J des gedrehten Kräftedreiecks beschriebene Kurve, deren dem Maximum von E entsprechender Gleitflächenwinkel φ durch eine zur Böschung parallele Tangente gefunden wird.

Bei gleichmässiger Geländebelastung zwischen gewissen Grenzen stellt sich diese Kurve als ein durch den Fusspunkt der Mauer und den Schnittpunkt von Böschung und Gelände gehender Hyperbelast heraus und die Lage der Gleitflächen als unabhängig von der Auflast. Die geometrische Einführung der von *Coulomb* betrachteten Kohäsion führt dagegen hier zu keinem Ergebnis. Die Zeichnung der *Culmann*schen Kurve für beliebig veränderliche, auch unstetige Geländebelastung und gebrochene Wandfläche wird von *Müller-Breslau* gezeigt und stellt wohl die einzige niemals versagende Anwendung des *Coulomb*schen Prinzips vom Prisma des grössten Druckes vor.

Zur Lösung derselben Aufgabe zerlegt *Fr. Engesser*[19]) den Erdkörper vom Mauerfuss aus in eine Reihe schmaler Prismenkeile mit gemeinsamer Kante, für deren Gewichte er sich das Seilpolygon gezeichnet denkt. Er zeigt, dass die Pole aller möglichen Seilpolygone in einem von zwei Kurven begrenzten Gebiet liegen, die von den

---

18) *C. Culmann*, Die graphische Statik, Abschnitt XIII: Theorie der Stütz- und Futtermauern, Zürich 1866.

19) *Fr. Engesser*, Geometrische Erddrucktheorie, Zeitschr. f. Bauwesen 30 (1880), p. 189.

Reibungskegeln eingehüllt werden. Aus diesem Gebiet kann man sich die Pole der Grenzwerte heraussuchen.

11. Der Rebhannsche Satz[20]). Unter der Voraussetzung, dass der Wanddruck als analytisches Maximum gefunden wird, was im allgemeinen der Fall ist, wenn die Auflast stetig verteilt ist, lässt sich der Ausdruck für E in (9) differenzieren und liefert für ebene Wand und fehlende Auflast zur Lagenbestimmung der Gleitfläche den Satz (Fig. 6):

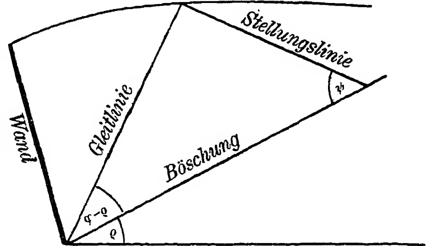


Fig. 6.

Der Inhalt der Fläche zwischen Wand, Gleitfläche und Gelände ist gleich dem Inhalt des Dreiecks zwischen Gleitfläche, Böschung und Parallelen zur Stellungslinie durch den Geländepunkt der Gleitfläche. Die Stellungslinie schließt mit der Böschung denselben Winkel ein, wie der Wanddruck mit der Vertikalen und giebt die Richtung der einen Seite des *Poncelet*schen um $\frac{\pi}{2} - \varrho$ gedrehten Kräftedreiecks an.

E. Winkler[21]) hat diesen Satz für gebrochene Wandfläche und stetig veränderliche Auflast erweitert, indem er das spezifische Sandgewicht γ durch ein ideelles γ' ersetzt, das ermittelt wird aus

$$\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h},$$

wo p die Belastung auf die Flächeneinheit am Schnittpunkt der Gleitfläche mit dem Gelände und h die Länge des Lotes vom Mauerfusspunkt auf die Geländetangente in demselben Punkt. Die gebrochene Wandfläche wird berücksichtigt, indem im *Poncelet*schen Kräftepolygon durch Verlängerung des Wanddrucks auf den untersten Mauerteil das Prismagewicht G auf G'' reduziert und der unterste Wanddruck allein für die Stellungslinie benutzt wird (Fig. 7).

21. Die Ponceletsche[22]) **Konstruktion der Gleitflächen.** Zeitlich lange vorher hat *Poncelet* eine noch heute viel angewandte Konstruktion der Gleitfläche ohne Berücksichtigung der Auflast und für ebene beliebig geneigte Wandfläche angegeben, deren ursprüngliche Ab-

---

20) *G. Rebhann*, Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen, Wien 1871.

21) *E. Winkler,* Vorträge über die Theorie des Erddrucks, gehalten an der Kgl. Techn. Hochschule zu Berlin, Lithogr. 1880.

22) *Poncelet*, Mém. de l'off. du génie 13 (1840).

leitung recht umständlich ist, die sich aber ohne weiteres aus dem *Rebhann*schen Satz folgern lässt (Fig. 8).

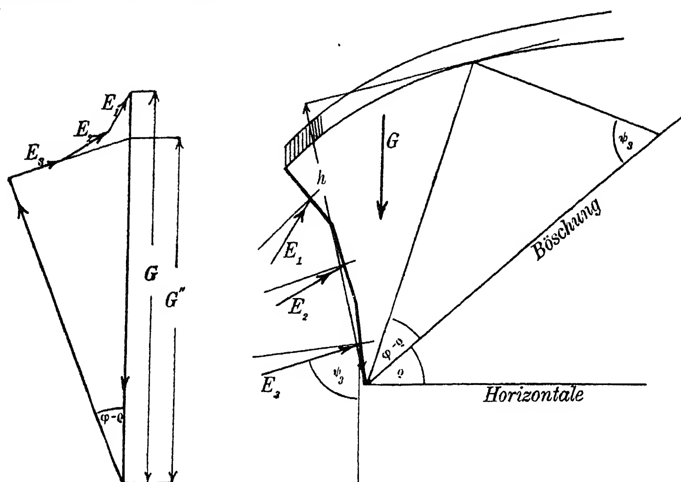


Fig. 7.

Aus der *Rebhann*schen Flächengleichheit lässt sich zunächst auf die Gleichheit der beiden Strecken d schliessen und dann aus den

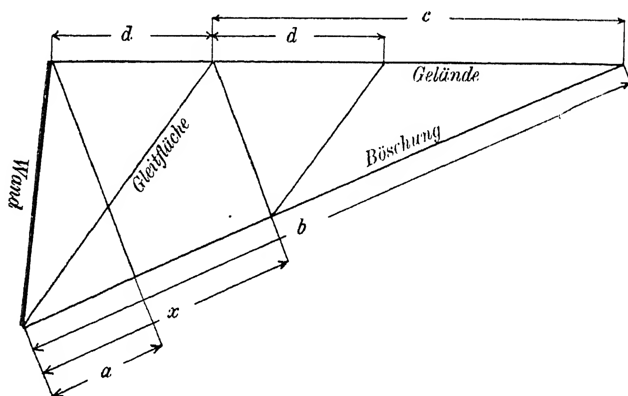


Fig. 8.

beiden Proportionen

$$\frac{b}{x} = \frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \frac{b-x}{x-a} = \frac{c}{d}$$

das Gesetz aufstellen, dass

$$x = \sqrt{ab}\,,$$

d. h.: *Der Abschnitt, den die Parallele zur Stellungslinie durch den Geländepunkt der Gleitfläche auf der Böschungslinie durch den Mauerfuss*

abschneidet, ist das geometrische Mittel zwischen den auf derselben Linie von Stellungslinie und Geländetangente am Gleitflächenpunkt abgeschnittenen Strecken. Ist das Prisma über der Gleitfläche infolge gebrochener Geländebegrenzung kein dreieckiges, so ist die Stellungslinie (die mit der Mauer die Summe der Reibungswinkel einschliessende Gerade) durch die auf der Geländetangente des Gleitflächenpunkts liegende Spitze eines Ausgleichsflächendreiecks zu ziehen (Fig. 9).

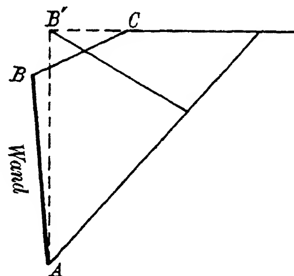


Fig. 9.

St. Guilhem[23]) hat nachgewiesen, dass für den Fall, in dem die Gleitlinie in eine Ecke der Geländelinie bei Benutzung der Geländetangente auf einer Seite führt, auch die Geländetangente auf der anderen Seite der Ecke dieselbe Gleitlinie liefert.

13. Grösse und Lage des Drucks an einer ebenen Gleitfläche. *Coulomb* und seine Nachfolger hatten bei angenommener Lage des Erddrucks seinen geringsten zulässigen Wert und gleichzeitig den Druck an der Gleitfläche durch die Zerlegung des Prismengewichts nach den gegebenen Richtungen beider gefunden. Dabei waren die Gleichgewichtsbedingungen im Unendlichkleinen unberücksichtigt geblieben, und diese Ausserachtlassung machte sich in gewissen Unstimmigkeiten bemerkbar, die durch eine Betrachtungsweise, die von *J. Weingarten, O. Mohr* und *E. Winkler*[24]) ausgeht und ihren vorläufig letzten Ausdruck bei *F. Kötter* und *H. Müller-Breslau* gefunden hat, offenbar wird.

Für eine ebene Gleitfläche zunächst lässt sich die Druckverteilung an ihr auf sehr einfache Weise ableiten. Nach der Darstellungsweise von *Müller-Breslau* kann man aus Fig. 10a ablesen:

Das Gewicht eines schmalen, der Gleitfläche anliegenden Prismas von der beliebigen Länge z:

$$dG = \frac{1}{2}\gamma' z^2 d\varphi = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h}\right) z^2 d\varphi .$$

Aus Fig. 10b dem Kräfteplan unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Winkel zwischen Gleitflächendruck und Gleitfläche sich in

23) *De St. Guilhem,* Mémoire sur la poussée des terres avec ou sans surcharge, Ann. d. ponts et chaussées 1885 I, p. 319—350.

24) *J. Weingarten,* Vortrag über Erddruck, Zeitschr. f. Bauwesen 20 (1869), p. 122—123; *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie des Erddrucks, Zeitschr. d. Hann. Arch.- u. Ing.-Ver. 17 (1871), p. 344; *E. Winkler,* Bemerkungen hierzu, ebd. p. 494; *E. Winkler,* Neue Theorie des Erddrucks, p. 38.

deren Umgebung nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung ändert:

$$Q_z = \frac{dG}{d\varphi} \sin(\varphi - \varrho) = \frac{1}{2}\gamma' z^2 \sin(\varphi - \varrho).$$

Daraus folgt, dass der Gleitflächendruck längs einer ebenen Gleitfläche linear nach abwärts wächst und seine Resultante von der Grösse $\frac{1}{2}\gamma z^2 \sin(\varphi - \varrho)$ demnach im oberen Endpunkt des unteren Drittels angreift.

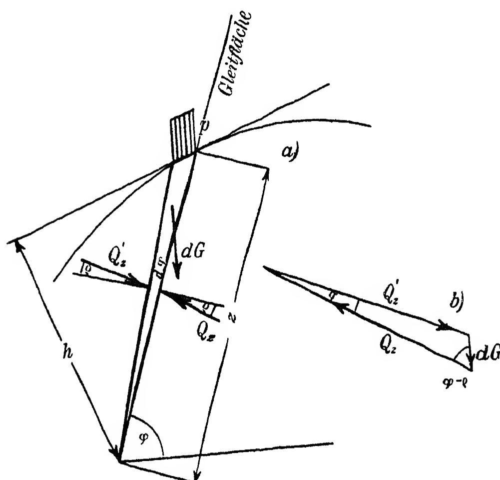


Fig. 10.

Die Unstimmigkeit dieses Ergebnisses mit der *Coulomb*schen Theorie ist nun folgende:

Einerseits ist der Erddruck nach Lage und Grösse vollständig bestimmt durch das Gewicht des Gleitflächenprismas und den Gleitflächendruck auf Grund der Zusammensetzung dieser drei Kräfte, während *Coulomb* und seine Nachfolger Angriffspunkt und Richtung des Erddrucks von vornherein annehmen. Andererseits lehrt das *Kötter*sche Variationsprinzip (siehe Nr. 2), dass der Wanddruck innerhalb gewisser Grenzen nach Angriffspunkt und Richtung willkürlich angenommen werden darf.

Der richtige von *Kötter* und *Müller-Breslau* hieraus gezogene und von ihnen näher begründete Schluss ist der, dass die Gleitfläche im allgemeinen keine Ebene sein kann.

Eine ebene Gleitfläche ist, wie *J. Weyrauch*[25]) gezeigt hat, ohne Widerspruch nur dann möglich, wenn die Gültigkeitsbedingungen der *Rankine*schen Theorie gegeben sind, wenn also insbesondere der Erddruck auf ein senkrechtes Flächenelement parallel der Oberfläche ist.

Aber auch dann ist im Allgemeinen diese mögliche ebene Gleitfläche nicht diejenige, die einen Grenzwert des Erddrucks im *Kötter*schen Sinne liefert.

Einen anderen Widerspruch hat *O. Mohr*[26]) unberechtigter Weise

---

25) *J. Weyrauch*, Zur Theorie des Erddrucks, Zeitschr. f. Baukunde 1878, p. 193.

26) *O. Mohr*, Zeitschr. d. Hann. Arch.- u. Ing.-Ver. 53 (1907), p. 441.

aufdecken wollen. Er hat nämlich das Verfahren von *Coulomb* so gedeutet, als ob der grösste, allen möglichen Gleitflächen entsprechende Wanddruck zu bestimmen sei, während es doch bei der Wahl zwischen *möglichen* Zuständen sich gar nicht um das *Coulomb*sche Verfahren handelt, sondern um die Auffindung des kleinsten mit den physikalischen Ungleichungen verträglichen Wanddrucks. Das *Coulomb*sche Verfahren sucht aber aus den günstigsten Zuständen den statisch möglichen auszuscheiden, wie schon in (8) auseinandergesetzt, und lässt sich dabei Ungenauigkeiten zu schulden kommen, deren Ausmerzung, wie *Müller-Breslau*[27]) gezeigt hat, in genügendem Grade durch ein Korrektionsverfahren geleistet werden kann.

14. Grösse und Lage des Drucks an einer gekrümmten Gleitfläche. Den Grund zu einer solchen Verbesserung hat wiederum *F. Kötter*[28]) gelegt durch seine Bestimmung der Druckverteilung an einer gekrümmten Gleitfläche. Die Lösung des Problems wird durch eine der Natur der Sache nach recht umständliche Erweiterung des vorhergehenden Ableitungsverfahrens gefunden, und zwar durch folgende Überlegungen:

Es handelt sich darum, die Differentialgleichungen des Gleichgewichts

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau}{\partial x} = \gamma \end{cases}$$

längs der Gleitfläche in eine Differentialgleichung zwischen Druck p auf das Gleitflächenelement, Neigungswinkel φ desselben und Bogenlänge s der Gleitfläche zu verwandeln.

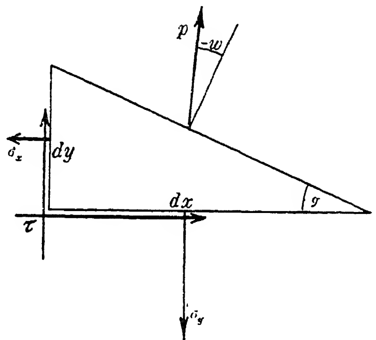


Fig. 11.

Zunächst kann man den Druck p auf irgend ein unter φ gestelltes Flächenelement und den Winkel u zwischen p und Flächenelement mit Hilfe von σ_x, σ_y und τ (Fig. 11) angeben in der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\cos u - \{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi - u) + \tau \sin(2\varphi - u)\}, \\ 0 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\sin u + \{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\varphi - u) - \tau\cos(2\varphi - u)\}. \end{cases}$$

27) *Müller-Breslau*, Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906, p. 91 ff. Zeitschr. d. Hann. Arch.- u. Ing.-Ver. 54 (1908), p. 43—56.

28) Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck, Verhandl. d. Phys. Gesellsch. zu Berlin 7 (1888); Berlin Berichte 1903; Zeitschr. d. Hann. Arch.- u. Ing.-Ver. 54 (1908), p. 55.

Wird die letzte Gleichung nach φ differenziert in der Umgebung der Gleitfläche, wo $u = \varrho$ und $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ sind, so ergiebt sich die zweite Klammer der ersten Gleichung zu Null und also an der Gleitfläche

$$(3) \qquad p = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\cos\varrho.$$

Aus dieser Gleichung kann nun durch Differentiation nach der Bogenlänge s $\left(\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)$ eine Gleichung gebildet werden, deren rechte Seite die linken Seiten der Gleichgewichtsbedingungen (1) enthält, nämlich

$$(4) \quad \frac{dp}{ds} - 2p\,\mathrm{tg}\,\varrho\,\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\right)\cos(\varphi - \varrho) + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x}\right)\sin(\varphi - \varrho) = \gamma \sin(\varphi - \varrho).$$

Dies ist die *Kötter*sche Differentialgleichung für den Druck p an einer durch den Neigungswinkel φ als Funktion der Bogenlänge gegebenen Gleitfläche (Fig. 12) und ihr Integral lautet für das obere Vorzeichen (aktiver Erddruck):

$$(5) \qquad p = \gamma e^{2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varrho}\int e^{-2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varrho}\sin(\varphi - \varrho)\,dt.$$

Kötter giebt in seiner ersten Veröffentlichung[28]) an, wie er sich die Verwendung der Differentialgl. (4) unter gewissen Vereinfachungen denkt.

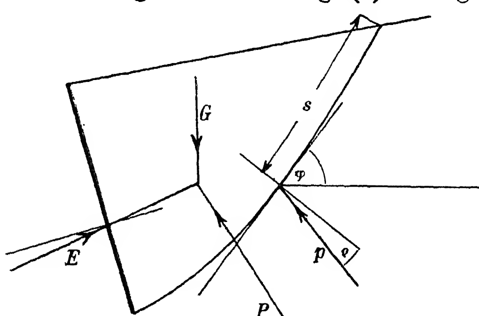


Fig. 12.

Die strenge Fassung des Erddruckproblems auf Grund der Gleitflächeneinführung müsste nach dem Vorhergehenden folgendermassen lauten: *Welche Form der Gleitfläche $\varphi = f(s)$ macht den von der Resultante aller $p\,ds$ und dem Prismengewicht H abhängenden Wanddruck E zum* **Minimum** *(zur unteren Grenze) bzw. Maximum mit den Nebenbedingungen, dass E eine bestimmte Lage hat, dass die physikalische Ungleichung nirgends verletzt ist und dass die endliche Gl.* (5) *oder die sie bedingende Differentialgleichung* (4) *befriedigt ist.*

H. Müller-Breslau[29]) und *O. Mohr*[30]) geben graphische Integrationsmethoden der Differentialgl. (4) an. *Müller-Breslau*[29]) benutzt die

29) Erddruck auf Stützmauern 1906, S. 9 ff.; Zeitschr. d. Hann. Arch. u.-Ing.-Ver. 54 (1908), p. 43 ff.

30) Zeitschr. d. Hann. Arch.- u. Ing.-Ver. 53 (1907), p. 441.

Einführung gekrümmter Gleitflächen, um überzeugend nachzuweisen, dass man eine gekrümmte Gleitfläche immer so wählen kann, dass der Erddruck eine vorgeschriebene Richtung annimmt. In den von ihm gerechneten Beispielen entfernen sich dann der Angriffspunkt und die Grösse des Erddrucks nur wenig von den *Coulomb*schen Werten, wodurch für diese Fälle nachgewiesen ist, dass die *Coulomb*schen Vereinfachungsannahmen zu einer guten Annäherung führen.

III. Versuche.

15. Elementareigenschaften des Erdreichs. Alle Versuche müssen sich zuerst auf die physikalischen Eigenschaften des zu untersuchenden Sandkörpers erstrecken, nämlich auf spezifisches Gewicht, Korngrösse, Reibungskoeffizienten, Böschungswinkel, Kohäsion und Feuchtigkeitsgehalt.

Das spezifische Gewicht eines und desselben Materials hängt erheblich von der Schüttung, den Erschütterungen, dem äusseren Druck und dem Feuchtigkeitsgehalt ab.

Die Korngrösse wird nach den durch verschiedene Siebe mit bestimmter Maschenzahl hindurchgehenden, verhältnismässigen Mengen angegeben. Der Einfluss grosser und unregelmässiger Körner zeigt sich im allgemeinen durch steile Böschung, kleines spezifisches Gewicht und kleinere Wanddrucke (Kohlen und Koks), während rundes Korn von gemischter Grössenordnung die entgegengesetzten Eigenschaften besitzt.

Der Koeffizient der inneren Reibung wird am häufigsten durch den Böschungswinkel bestimmt, wobei entweder das Volumenelement als ein auf einer rauhen, schiefen Ebene im Grenzfall gleitender Massenpunkt angesehen oder die Erscheinung der ebenen Böschung aus der Annahme ebener Gleitflächen rechnerisch abgeleitet wird. Von manchen sind allerdings konvexe Böschungen beobachtet und von *J. Boussinesq* theoretisch plausibel zu machen versucht worden. Hier sind auch die Schüttfiguren von *F. Auerbach*[31]) auf verschiedenen Grundrissformen zu erwähnen.

E. P. Goodrich behauptet, dass im Innern gleitende, an der Oberfläche rollende Reibung zur Wirkung komme[33]).

Die Böschungswinkel liegen immer in einem Intervall von etwa 1^0 je nach der Schnelligkeit der Böschungsbildung. Angaben über die Böschungswinkel verschiedener pulverförmiger Massen finden sich in allen einschlägigen Lehrbüchern.

Noch zweifelhafter scheint die Bestimmung der inneren Reibung

31) *F. Auerbach,* Über das Gleichgewicht pulverförmiger Massen, Ann. d. Phys. 5 (1901), p. 140

durch Verschiebung zweier Erdkörper übereinanderhin zu sein, wobei der erstmaligen Verschiebung Kohäsion und Reibung, der wiederholten Verschiebung die Reibung allein entgegenwirkend gedacht sind[32].

Auf dieselbe Weise wird auch der Rauhigkeitsgrad einer Wandfläche geprüft.

Die Kohäsion einer Erdart von bestimmtem Feuchtigkeitsgehalt ist auch indirekt durch die Höhe einer senkrecht stehenbleibenden Böschung auf der in Nr. 8 erwähnten theoretischen Grundlage gekennzeichnet worden.

Auf die Kohäsion und im Zusammenhang damit die Wanddrucke hat der Feuchtigkeitsgehalt einen wechselnden Einfluss, indem er bis zu einer gewissen Grenze die Kohäsion verstärkt und den Wanddruck verkleinert, aber von einem gewissen Gehalt an, Böschungswinkel und Kohäsion verkleinert bei vermehrtem spezifischen Gewicht, wodurch die Wanddrucke nach Grösse und Richtung gefährlicher werden.

Zahlenmässige Angaben darüber finden sich bei *E. P. Goodrich*[33], der die Abhängigkeit der Seitenpressung vom Feuchtigkeitsgehalt durch eine aus seinen, *Steeles* und *Wilsons* Versuchen abgeleitete Kurve vierten Grades darstellt.

16. Experimentelle Bestimmung der Grenzwerte. Die Fragestellung in ihrer einwandfreien Fassung ist in Nr. 2 angegeben. Bisher sind Ansätze zu solchen Versuchen nur von *Gauthey*[34] und *E. Cramer*[35] gemacht worden, die ungefähr bestimmt haben, wo die Drehaxe einer sonst ungestützten senkrechten Wand im Gleichgewichtsfall liegen darf.

Alle anderen Grenzwertbestimmungen begnügen sich mit der Feststellung des Drehmoments des Wanddrucks um eine gegebene Drehaxe im Augenblick des Ausweichens.

Schwierig ist die Festsetzung des Beginns des Ausweichens. *F. Engesser* nennt den Druck, bei dem ein Ausweichen beginnt, aber wieder zur Ruhe kommt, den Druck im Ruhezustande und bezeichnet den Druck, bei dem eine dauernde Störung des Gleichgewichtzustandes stattfindet, als Grenzwert.

Nach dieser anderweitig allerdings nicht klar ausgesprochenen Anschauung haben *Gauthey*, *Woltmann*, *Mayniel*, *Martony de*

32) *C. Martony de Köszegh*, Versuche über den Seitendruck der Erde usw. Wien 1828.

33) Trans. Am. Soc. of Civ. Engineers 53 (1904—05), p. 322.

34) Dijon, Nouv. Mém. 1784, II, p. 28—66; 1785, I, p. 1—45.

35) *E. Cramer*, Die Gleitfläche des Erddruckprismas u. der Erddruck gegen geneigte Stützwände, Zeitschr. f. Bauwêsen 29 (1879), p. 521.

Köszegh, *G. Hagen*, *Audé*[35a]), *E. Winkler*, *F. Engesser* und *H. Engels* gearbeitet.

Als Ergebnis kann ausgesprochen werden, dass für alle die Fälle, wo nahezu ebene Gleitflächen nachgewiesen oder zu erwarten sind, eine befriedigende Übereinstimmung mit der *Coulomb*schen und zum Teil auch der *Rankine*schen Theorie herrscht.

In die Reihe dieser Grenzwertbestimmungen gehören auch die Messungen über den Bodendruck und Seitendruck in Silos, d. h. rohrartigen Behältern, durch Auswägung und Beobachtung des gerade ausreichenden, durch einen Wagebalken erzeugten Drucks von *Is. Roberts*[36]), *H. A. Janssen*[37]) und *J. Pleissner*[38]). Soweit sich die Messungen auf einzelne aus den Wänden herausgeschnittene Stücke beziehen, geben sie zu kleine Werte, da in der Umgebung einer kleinen nachgiebigen Stelle sich eine Gewölbewirkung herausbildet.

Für die Berechnung von Bohlwerken wichtig ist eine Untersuchung von *H. Engels*[38a]) über die Einspannung von Stäben durch Erddruck. Als Grenzzustand wird der Anfang einer Bewegung des untersten Punktes des eingespannten Stabes angesehen. *Mohr* zeigt in derselben Arbeit, dass dieser Augenblick eintritt, wenn der Druck das Gewicht der darüber lastenden Erdsäule erreicht und dass bisherige Erfahrungsregeln mit den Versuchen stimmen.

17. Bestimmung wirklich auftretender Erddrucke zwischen den Grenzwerten. Eine zweite, ebenso berechtigte Untersuchungsart beschäftigt sich mit der Frage, welche Drucke auf Wände von bestimmter elastischer, unvollkommen elastischer oder starrer Stützung in Wirklichkeit ausgeübt werden. Man muss sich nur bewusst sein, dass dann im allgemeinen weder im Innern noch an der Oberfläche ein Reibungsgrenzzustand herrschen wird und also weder die *Rankine*sche noch die *Coulomb*sche Theorie auf solche Fälle angewandt werden darf. Allerdings muss eine richtige Grenzwerttheorie die beobachteten Werte zwischen ihren Grenzen einschliessen. Dagegen würde die *Boussinesq*sche Erddruckstheorie einen unmittelbaren Vergleich mit der Messung gestatten.

Messungen an unbeweglichen Wänden und Böden sind von

35a) Den Monographieen von *F. Kötter* und *E. Winkler* entnommen.

36) *Is. Roberts*, The pressure of stored grain, Enginering 34 (1882), p. 399; Lond. Roy. Soc. Proceed. 36 (1884), p. 225.

37) *H. A. Janssen*, Versuche über Getreidedruck in Silozellen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure 39 (1895), p. 1045.

38) Z. d. V. d. Ing. 50 (1906), p. 976.

38a) Centralbl. d. Bauverw. 1903, p. 273, 649, Zur Berechnung der Bohlwerke.

Siégler[39]) mit Hilfe eines Reibungsdynamometers ausgeführt worden und haben das Auftreten von Wandreibung auch bei unnachgiebiger Wand bewiesen. Ausserordentlich kleine Verschiebungen lässt *Ad. Donath*[40]) bei seinen Messungen des Wanddruckdrehmomentes in bezug auf die Unterkante der Wand zu, indem er eine Hebelübertragung auf eine Emerysche Druckdose anwendet. Bei dieser Messvorrichtung wird ein Flüssigkeitsdruck gemessen, der in einem durch eine Membran geschlossenen Zylinder durch einen Kolben etwas kleineren Durchmessers entsteht.

H. Müller-Breslau[41]) hat die Aufgabe in der allgemeinsten Weise aufgefasst. Er benutzt die Tatsache, dass der nach Grösse und Lage zu bestimmende Wanddruck durch sechs bestimmt liegende Kraftkomponenten darstellbar sein muss, und zerlegt ersteren mechanisch in diese Komponenten durch Anordnung von sechs elastischen, in Spitzen gelagerten Stützstäben, deren elastische, sehr kleine Längenänderungen durch Fühlhebelapparate aufgezeichnet werden.

Die Versuche ergaben bisher in den einfachen Fällen Kräfte, die besonders bei grösserem Maassstab der Anordnung nicht unwesentlich grösser als die *Coulomb*schen Werte sind, lassen aber auch den rechnerisch schwer fassbaren Einfluss von Erschütterungen, Einzellasten u. dergl. erkennen. Der Einfluss der Einzellasten konnte durch die *Culmann*sche Kurve (Nr. **10**) befriedigend dargestellt werden. Entlastungen zeigten ein nur geringes Zurückgehen des Wanddrucks infolge der Entwicklung passiven Wanddrucks. Die Versuche sind in erheblich grösserem Maassstab mit verschiedenen elastischen Stützstäben, trockenem und feuchtem Sande, verschiedenen Schüttungsarten und Seitenwandentfernungen usw. im Fortgange.

Auch die Siloversuche mit Hilfe der Messung elastischer Durchbiegung der Wände und des Flüssigkeitsdruckes hinter schmalen Diaphragmen gehören in diese Klasse. Hier sind die Arbeiten von *M. Tolz*[42]), *M. S. Ketchum* und *Whited*[43]), *J. A. Jamieson*[44]), *H. T. Bovey*[45]), *E. Lufft*[45]) *J. Pleissner*[46]), und *E. P. Goodrich*[33]) zu nennen.

39) Annales d. ponts et chaussées (6) 13 (1887), p. 488—505.

40) Zeitschr. f. Bauwes. 41 (1891), p. 491.

41) Erddruck auf Stützmauern, Stuttgart 1906, p. 122 ff.

42) Trans. Canad. Soc. Civ. Eng. 17 (1903).

43) Proc. Soc. Engin. of West-Pennsylvania, 1901 April.

44) Engin. News 51 (1904), p. 236.

45) *H. T. Bovey*, Trans. Canad. Soc. Civ. Eng. 17 (1903) u. Engin. News 52 (1904); *E. Lufft*, Engin. News 52 (1904), p. 531.

46) *J. Pleissner*, Versuche zur Ermittelung der Boden- u. Seitenwanddrucke in Getreidesilos, Zeitschr. d. Ver. dtsch. Ing. (1906), p. 976.

Die Versuche von *L. Leygue*[47]) dagegen, der die Wandkräfte mit sehr stark nachgebenden Spiralfedern gemessen hat, stehen etwas zweifelhaft in der Mitte zwischen beiden Fragestellungen, insofern er den wirklichen Betrag der Nachgiebigkeit von Mauern nach Grösse und Richtung weit überschreitet.

18. Die Bestimmung der Gleitflächen. Zuerst hat wohl *Ph. Forchheimer*[48]) mit Hilfe von verschieden gefärbten und nach der Gleichgewichtstörung mit Paraffin getränkten Sandschichten die Gleitflächen zu bestimmen gesucht, sodann hat *V. J. Kurdjümoff*[49]) die viel schärfere Methode der Photographie von Gleitkurven bei Fundamenteindrückungen entdeckt. Diese Methode ist schliesslich von *H. Müller-Breslau*[50]) zur Bestimmung von Gleitflächen bei vorgeschriebener Wandbewegung in der Weise ausgebaut worden, dass in einem Kasten mit Seitenwand aus Glas der Vorderwand durch eine Schraubenspindel eine Bewegung von bestimmter Grösse und Richtung gegeben wird und die während dieser Bewegung aufgenommene Photographie durch Streifung die Bewegung der Sandkörner, und die Grenze des Bewegungsgebiets die Gleitfläche anzeigt.

Während *Kurdjümoff* bei seinen Fundamentgleitlinien Kurven erhalten hatte, die den Unterschied von der *Pauker-Rankine*schen Fundamenttheorie deutlich erkennen lassen, hat *Müller-Breslau* gegezeigt, dass die *Coulomb*schen Gleitflächen sich in allen solchen Fällen ergeben, wo sie die Grenzbedingungen an der Wand und der Oberfläche nicht erheblich verletzen, dass dagegen in allen anderen Fällen, z. B. bei überhängenden Wänden, fallendem Gelände, Einzellasten u. dergl., gekrümmte Gleitflächen sichtbar werden und eine befriedigende Übereinstimmung der Theorie mit den Druckmessungen in solchen Fällen die rechnerische Heranziehung von gekrümmten Gleitflächen verlangt.

---

47) *L. Leygue*, Nouvelles recherches sur la poussée des terres, Ann. des ponts et chaussées (6) 10 (1885) II, p. 788.

48) Diss. Tübingen 1883, Über den Sanddruck und Bewegungserscheinungen im Innern trockenen Sandes.

49) *V. J. Kurdjümoff*, Zur Frage des Widerstandes der Gründungen auf natürlichem Boden, Civilingenieur 38 (1892), p. 292—311.

50) Erddruck auf Stützmauern, p. 133.

(Abgeschlossen im November 1909.)

IV 29 a. THEORIE DER BAUKONSTRUKTIONEN I: ALLGEMEINE THEORIE DES FACHWERKS UND DER VOLLWANDIGEN SYSTEME.*)

Von

M. GRÜNING

IN DÜSSELDORF.

Inhaltsübersicht.

---

*) Bei der Ausgestaltung des Referates ist der Verfasser Herrn *C. Müller* (Hannover) für seine Mitwirkung verpflichtet. *M. Grüning.*

III. Die Spannkraftermittelung in statisch bestimmten Systemen.

20. Die Polygonalmethode und die Methoden der Stabvertauschung.
21. Die Schnittmethoden.
22. Die kinematische Methode.
23. Einflusslinien.

IV. Die Bestimmung der elastischen Formänderungen.

24. *Maxwells* und *Mohrs* Methoden.
25. *Castiglianos* Methode.
26. Die Sätze von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen.
27. Die Gleichung der Biegungslinie eines Stabes.
28. Darstellung der Biegungslinie als Seilkurve bzw. als Seilpolygon der elastischen Gewichte.
29. Die Biegungslinie als Einflusslinie einer elastischen Formänderung.
30. Vollständige Darstellung der Formänderung eines Fachwerks durch den Verschiebungsplan *Williots*.
31. Vollständige Darstellung der Formänderungen nach dem Stabzugverfahren.
32. Lösung des Formänderungsproblems mit Hilfe der Elastizitätsellipse.
33. Der Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegung des steifen Stabes.

V. Theorie der statisch unbestimmten Systeme.

34. Allgemeiner Gang der Untersuchung.
35. Herleitung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen mit Hilfe der Arbeitsgleichungen.
36. Herleitung der Bedingungsgleichungen mit Hilfe des Satzes von der Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen.
37. Herleitung der Bedingungsgleichungen nach dem Verfahren *Menabreas* und *Castiglianos*.
38. Allgemeine Auflösung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen.
39. Aufstellung von „Bedingungsgleichungen" mit einer Unbekannten: Graphisches Verfahren.
40. Aufstellung von „Bedingungsgleichungen" mit einer Unbekannten: Analytische Verfahren.
41. Mathematischer Zusammenhang und Vergleichung der Lösungsmethoden für die „Bedingungsgleichungen".
42. Einige besondere Methoden zur Lösung der „Bedingungsgleichungen".

Litteratur.

Lehrbücher und Monographieen.

A. Castigliano, Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Turin 1879, deutsch von *E. Hauffe*, Wien 1886.
A. Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880.
— Das Fachwerk im Raume, Leipzig 1892.
C. Kriemler, Einführung in die energetische Baustatik, Berlin 1911.
G. C. Mehrtens, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Bd. 1. Einführung in die Grundlagen, Leipzig 1903. Bd. 2. Statisch

bestimmte Träger, Leipzig 1904. Bd. 3. Formänderungen und statisch unbestimmte Träger, Leipzig 1905; 2. Aufl. Leipzig 1909—1912.
H. Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880.
— Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. 1. 2. Aufl., Berlin 1887, 4. Aufl., Stuttgart 1905. Bd. 2. Abt. 1. 2. Aufl., Leipzig 1892, 4. Aufl., Stuttgart 1907. Bd. 2. Abt. 2, Leipzig 1908.
— Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1886, — 3. Aufl. ebd. 1904.
O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906.
A. Ostenfeld, Technische Statik, deutsch von *D. Skouge*, Leipzig 1904.
W. Ritter, Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken, Zürich 1871 u. 1883.
— Der elastische Bogen, Zürich 1886.
— Anwendungen der graphischen Statik. Zürich 1. Teil 1888, 2. u. 3. Teil, ebd. 1900.
W. Schlink, Statik der Raumfachwerke, Leipzig-Berlin 1907.
L. Vianello, Der Eisenbau, München-Berlin 1905; 2. Aufl. besorgt von *Carl Stumpf,* ebd. 1912.
J. Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873.
— Theorie elastischer Körper, Leipzig 1884.
— Die elastischen Bogenträger, 2. Aufl., München 1897.
E. Winkler, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867.
— Theorie der Brücken, 1. Teil, Äußere Kräfte der Balkenträger, Wien 1873 u. 1886; 2. Heft, Theorie der gegliederten Balkenträger, Wien 1881.
H. Zimmermann, Über Raumfachwerke, Berlin 1901.
A. Zschetsche, Handbuch der Baustatik, 1. Bd., Düsseldorf 1912.

---

1. Vorbemerkung. Das vorliegende erste Referat über die Theorie der Baukonstruktionen behandelt vorzugsweise die *Statik* solcher Konstruktionen, welche entweder aus *Fachwerken* oder *steifen* (*geraden* bzw. *gekrümmten*) *Stäben,* oder aus Verbindungen beider bestehen und so gelagert sind, dass sie unter dem Einfluss der angreifenden Kräfte weder im ganzen noch in einzelnen Teilen andere als *elastische* Verschiebungen erfahren. Meist bestehen diese Konstruktionen aus zwei in der verticalen Ebene und einem oder zwei in der horizontalen Ebene stabilen Systemen, welche so miteinander verbunden sind, dass die räumliche Stabilität gesichert ist. Infolge dieser Anordnung hat es die Statik der Baukonstruktionen in der Mehrzahl der Fälle mit *ebenen Problemen* zu tun.

Der hier behandelte Gegenstand greift z. T. auch auf den des Referates IV 5 (*L. Henneberg*) über graphische Statik über. Doch soll dieser im Gegensatz zu der dort gegebenen graphischen Behandlung vorwiegend vom analytischen Standpunkt aus betrachtet werden, so

dass die graphischen Verfahren hier als Hilfsmittel der analytischen Methoden erscheinen. Gleicherweise lehnt sich das Referat auch an die Referate IV 23 (*Müller-Timpe*) und 25 (*Tedone-Timpe*) an, indem es auf die Probleme der mathematischen Elastizitätstheorie so weit eingeht, als es zur Begründung allgemeiner Prinzipien und zur Beleuchtung des Zusammenhanges der gebräuchlichen Annäherungen der Statik der Baukonstruktionen mit der genaueren Theorie wünschenswert erscheint. Die Abgrenzung gegen den folgenden Artikel ist dadurch gegeben, dass hier in der Hauptsache die *allgemeine Theorie* des Fachwerks und der vollwandigen Systeme ihre Darlegung findet, während in IV 29b (*K. Wieghardt*) speziellere Ausführungen gegeben werden. Die wichtigsten Typen spezieller ebener Fachwerke sind bereits in IV 5 (*Henneberg*) kurz genannt. Die Anwendung der allgemeinen Theorie bezieht sich bei ihnen in erster Linie auf eine Herausarbeitung der für die jeweils vorliegenden Zwecke praktischen Rechenvorschriften, über die man sich in den Lehrbüchern der Statik der Baukonstruktionen orientieren möge.

2. Einleitung. Die Definition des *Fachwerkes* und die Kennzeichnung seiner Arten ist in IV 5 (*L. Henneberg*) Nr. 29 und Nr. **40** gegeben. Wesentlich ist die Verbindung der Fachwerkstäbe durch reibungslose Gelenke. Denn sie begründet die axiomatische Annahme, dass der Einfluss eines Stabes durch zwei in seine Axe fallende Kräfte von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung ersetzt werden kann. Demgemäss erleidet der Fachwerkstab nur axiale Beanspruchungen.

Im Gegensatz hierzu ist der *steife Stab* widerstandsfähig gegen Kräfte beliebiger Richtung und Lage. Seine Untersuchung wird der Theorie durch die Annahme zugänglich gemacht, dass der Einfluss eines durch einen Querschnitt abgetrennten Teiles ersetzt werden kann durch eine Kraft von unbestimmter Richtung und Lage. Diese ist die Resultierende der im trennenden Querschnitt wirkenden Spannungen. Systeme, welche aus stabilen Verbindungen steifer Stäbe bestehen, werden als *Stabwerke* bezeichnet.

Von *C. Fränkel* und *H. Müller-Breslau* sind starre Scheiben in der Ebene, von *A. Föppl* beliebige starre Körper im Raume als Hilfsmittel der Theorie eingeführt. Andere Konstruktionselemente, als die obengenannten, sind indess dadurch nicht geschaffen.

Vermöge des Gesetzes von Aktion und Reaktion kann der *Widerstand der Lager,* auf deren Anordnung die Standsicherheit einer Konstruktion beruht, in gleicher Weise wie die äusseren Lasten als Kraft — *Stützenreaktion* — aufgefasst werden. Zufolge dieser Auffassung in Verbindung mit den obengenannten Annahmen bietet sich damit der

theoretischen Betrachtung an Stelle der konstruktiven Anordnung ein System von Kräften dar, welches mit den gegebenen angreifenden Kräften ein Gleichgewichtssystem bilden muss. Die *Ermittlung dieses Gleichgewichtszustandes* ist die *erste Aufgabe* der Statik der Baukonstruktionen. Ihre *zweite Aufgabe* ist die *Ermittlung des elastischen Verschiebungszustandes,* welcher sich infolge der Elastizität des Materiales unter dem Einfluss der Kräfte des Gleichgewichtszustandes einstellt. Die Lösung der zweiten Aufgabe ist immer abhängig von der ersten, im allgemeinen besteht aber auch das umgekehrte Abhängigkeitsverhältnis.

Die elastischen Formänderungen sind innerhalb der aus physikalischen Rücksichten gegebenen Grenzen für die Beanspruchung des Baumateriales sehr klein im Vergleich mit den Abmessungen der Konstruktionsteile. Es ist daher zulässig, sie als unendlich klein anzusehen und die Spannungs- und Formänderungskomponenten auf die anfängliche Lage des Systems zu beziehen. Diese Annahmen gelten für die von der allgemeinen Theorie behandelten, sogenannten *Hauptspannungen.* In Wirklichkeit ergeben sich aus der Tatsache, dass die konstruktiven Anordnungen die Voraussetzungen der Theorie nicht genau erfüllen, in Verbindung mit der Endlichkeit der Formänderungen Abweichungen, welche als *Nebenspannungen* bezeichnet werden. Sie sind Gegenstand besonderer Methoden, welche in dem folgenden Referate behandelt werden.

Schliesslich wird die Annahme gemacht, dass die angreifenden Kräfte allmählich von Null bis zu ihren Endwerten anwachsen, der endliche Gleichgewichtszustand sich also ohne Schwingungen einstellt. Einzelne Autoren haben von dieser Annahme abgesehen und eine *Dynamik der Tragwerke* aufgestellt, über die gleichfalls der folgende Artikel zu vergleichen ist.

Es erschien zweckmässig, im vorliegenden Referate die in den Lehrbüchern der Statik der Baukonstruktionen z. T. eingebürgerten einheitlichen *Bezeichnungen* zu verwenden, die in der folgenden Liste zusammengestellt sind. Es bezeichnet:

P_m eine im Punkte m angreifende Last;

C_m eine im Punkte m wirkende Stützenreaktion;

Q_m eine im Punkte m angreifende Kraft bzw. die Resultante aller im Punkte m angreifenden Kräfte, sowohl Lasten als Stützenreaktionen umfassend;

Q_{xm}, Q_{ym}, Q_{zm} die Komponenten von Q_m parallel zu den Koordinatenaxen;

q die auf die Oberfläche eines Körpers verteilt wirkende Kraft pro Flächeneinheit;

q_x, q_y, q_z deren Komponenten parallel zu den Koordinatenaxen;

σ die Normalspannung in einem Punkte eines Querschnittes pro Flächeneinheit;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ die Spannungskomponenten (Normalspannungen und Schubspannungen) in einem Punkte eines Kontinuums parallel bzw. senkrecht zu den Koordinatenaxen;

S die Spannkraft eines Fachwerkstabes;

u, v, w die Änderungen der Koordinaten x, y, z eines Punktes eines Kontinuums;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ die Verzerrungskomponenten (Dehnungen und Gleitungen) in einem Punkte eines Kontinuums parallel bzw. senkrecht zu den Koordinatenaxen;

dv das Volumendifferential;

dw das Flächendifferential;

$\Delta x_m, \Delta y_m, \Delta z_m$ die Änderungen der Koordinaten x_m, y_m, z_m des Knotenpunktes m eines Fachwerkes;

s die Länge, Δs die Längenänderung, F den Querschnitt, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ die Richtungskosinus } eines Fachwerkstabes;

δ_m die wirkliche Verschiebung, $\bar{\delta}_m$ eine virtuelle Verschiebung } des Punktes m in der Richtung und im Sinne der angreifenden Kraft Q_m;

$\delta x_m, \delta y_m, \delta z_m$ die Komponenten der Verschiebung δ_m parallel zu den Koordinatenaxen;

E den Elastizitätsmodul (*Young*schen Modul),

G den Gleitmodul,

m die *Poisson*sche Konstante, zwischen denen die Beziehung $G = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E$ besteht;

ϱ den Koeffizienten $\frac{s}{EF}$;

t die Temperaturänderung in einem Punkte eines Kontinuums bzw. in einem Fachwerkstab;

ε die Längenänderung der Längeneinheit für eine Temperaturänderung von 1^0 C.

I. Allgemeine Prinzipien.

3. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Gleichgewichtsbedingungen. Die Statik der Baukonstruktionen steht im engsten Zusammenhang mit der mathematischen Elastizitätstheorie. Hier wie dort bilden die Grundlage entweder gewisse Gleichgewichtsbedingungen, welche aussagen, dass in jedem Punkte die Summe aller Kräfte gleich Null sein muss, oder das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Für ein System von endlichem Freiheitsgrade ist die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen in IV 1 (*A. Voss*) Nr. **30**ff. gegeben, für einen kontinuierlichen Körper in IV 30 (*E. Hellinger*), Nr. **3** und **4**.

A. Cauchy geht bei der Untersuchung eines *elastischen (kontinuierlichen) Körpers* von den Spannungsgleichungen und den Oberflächenbedingungen aus. Diese stellt er als Gleichgewichtsbedingungen eines aus dem deformierten Körper, welcher sich unter dem Angriff von Massen- und Oberflächenkräften im Gleichgewicht befindet, herausgeschnittenen unendlich kleinen Parallelepipedums bzw. Tetraeders auf. Da in der Statik der Baukonstruktionen Massenkräfte nicht berücksichtigt werden, lauten die *Cauchy*schen *Spannungsgleichungen* für das Innere:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Als Oberflächenbedingungen ergeben sich

$$(1')\qquad \begin{aligned} \sigma_x \cos nx + \tau_z \cos ny + \tau_y \cos nz &= q_x \\ \tau_z \cos nx + \sigma_y \cos ny + \tau_x \cos nz &= q_y \\ \tau_y \cos nx + \tau_x \cos ny + \sigma_z \cos nz &= q_z, \end{aligned}$$

wobei die Normale n positiv nach außen gewählt ist.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen durch Multiplikation der Gleichungen (1) mit den entsprechenden Komponenten $\delta u, \delta v, \delta w$, einer virtuellen Verrückung, Addition der Produkte und Integration über den Körper. Unter virtuellen Verrückungen werden solche Verrückungen verstanden, welche mit den Bedingungen des Systems verträglich, deren Komponenten also stetige Funktionen der Koordinaten sind. Durch Anwendung des *Gauss*schen Integralsatzes (partieller Integration) und Einführung der Oberflächenkräfte ergiebt sich dann sofort das *Prinzip der virtuellen*

Verrückungen in der für die Statik wichtigen Form.

$$(2) \qquad U' - \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) dv = 0.$$

Hierin ist

$$U' = \int (q_x \delta u + q_y \delta v + q_z \delta w) dw$$

die Arbeit, welche von den Oberflächenkräften bei der virtuellen Verrückung geleistet wird. Im Falle von Einzelkräften wird hierfür in der Statik der Baukonstruktionen unter Berücksichtigung des *de St. Venantschen Prinzips* (vgl. IV 25, *Tedone-Timpe,* Nr. **15**) die entsprechende Arbeit der äusseren Kräfte $\sum Q_m \bar{\delta}_m$ eingesetzt, trotzdem die Spannungen im Angriffspunkt der Kräfte unendlich werden. Den hier beschriebenen Weg zur Aufstellung des Prinzips der virtuellen Verrückungen haben *G. Lamé* und *E. Clapeyron*[1]), später insbesondere *G. Kirchhoff*[2]) eingeschlagen.

Für *allgemeine Stabgebilde* der nachstehend beschriebenen Art stellt *S. D. Poisson*[3]) das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Gleichgewichtsbedingungen auf. Er betrachtet ein durch äussere Kräfte Q belastetes und im Gleichgewicht befindliches System materieller Punkte, welche durch Stäbe untereinander verbunden und im übrigen entweder völlig frei oder in ihrer Bewegung gewissen Bedingungen unterworfen sind. Über die Anzahl der Stäbe werden keine Voraussetzungen getroffen. Jeder Stab übt eine Kraftwirkung aus, deren Richtung mit der Stabaxe zusammenfällt. Die Wirkung aller Stäbe kann daher durch äussere in den Punkten des Systems angreifende Kräfte ersetzt werden. Es gelten dann für jeden Knotenpunkt die drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} Q_{xm} + \sum S \cos \alpha &= 0, \\ Q_{ym} + \sum S \cos \beta &= 0, \\ Q_{zm} + \sum S \cos \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Die Summen erstrecken sich über alle in einem Punkt zusammenstossenden Stäbe.

Jeder Punkt kann nunmehr einer virtuellen Verrückung unterworfen werden, welche an die erwähnten etwaigen Bedingungen ge-

1) Vgl. *G. Lamé,* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852; 2. éd. Paris 1866, p. 80.

2) *G. Kirchhoff,* Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen Stabes, J. f. Math. 56 (1858), p. 291 = Ges. Abhandlgn., Leipzig 1882, p. 292 und Vorlesgn. über math. Physik, Bd. 1: Mechanik, Leipzig 1876, 11. Vorl.

3) *S. D. Poisson,* Traité de mécanique 1, 2. éd., Paris 1833, p. 666 ff.

bunden ist und den Zusammenhng des Systems nicht aufheben darf. Multipliciert man die Gleichungen (3) mit den Komponenten δ_x, δ_y, δ_z einer virtuellen Verrückung und addiert sie sodann, so erhält man für jeden Knotenpunkt die Beziehung

$$Q_m \bar{\delta}_m + \sum S \bar{\delta}_S = 0.$$

Hierin bezeichnet $\bar{\delta}_m$ die virtuelle Verrückung des Punktes m in Richtung der Kraft Q_m und $\bar{\delta}_S$ die Projektion der virtuellen Verrückung des Punktes auf die zugehörige Stabrichtung. Durch Addition der vorstehenden Gleichungen für *alle* Punkte, Zusammenfassung der gleiche S enthaltenden Glieder und Einführung der *geometrischen Beziehung*

$$(4)\quad \begin{aligned}\Delta s_{ik} &= \Delta x_k \cos\alpha_{ik} + \Delta y_k \cos\beta_{ik} + \Delta z_k \cos\gamma_{ik}\\ &\quad + \Delta x_i \cos\alpha_{ki} + \Delta y_i \cos\beta_{ki} + \Delta z_i \cos\gamma_{ki}\\ &= (\Delta x_k - \Delta x_i)\cos\alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i)\cos\beta_{ik}\\ &\qquad + (\Delta z_k - \Delta z_i)\cos\gamma_{ik},\end{aligned}$$

welche zwischen der Längenänderung eines Stabes und den Verschiebungskomponenten seiner Endpunkte besteht, ergiebt sich:

$$(5)\qquad \sum Q_m \bar{\delta}_m - \sum S \overline{\Delta s} = 0.$$

Die Summen erstrecken sich über alle äusseren Kräfte und alle Stäbe. Diese Gleichung drückt das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* für elastische Stabgebilde der betrachteten Art aus. Ihre Gültigkeit ist von der Anzahl der Stäbe und Knotenpunkte unabhängig, sie besteht also für jedes *Fachwerk*.

Umgekehrt kann man die Theorie auf der Grundlage des *Prinzips der virtuellen Verrückungen* aufbauen und die Gleichgewichtsbedingungen aus diesem ableiten. Auf diesem Wege haben *L. Navier* und später *G. Green* die Spannungsgleichungen und Oberflächenbedingungen eines elastischen (continuierlichen) Körpers aufgestellt. (Vgl. IV 23 (*Müller-Timpe*) Nr. 5a.) In analoger Weise hat *S. D. Poisson*[3]) die Gleichgewichtsbedingungen eines Systems materieller Punkte entwickelt, deren Verbindung untereinander durch Gleichungen zwischen ihren Koordinaten

$$L = 0,\quad L' = 0,\quad L'' = 0, \ldots,$$

gegeben ist, und welche durch Kräfte Q belastet sind. Aus der Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen und den Bedingungsgleichungen, welche die Verträglichkeit der virtuellen Verrückungen mit den Gleichungen $L = 0$, $L' = 0, \ldots$ ausdrücken, erhält er durch *Lagranges* Methode der Multiplikatoren für jeden Punkt drei Glei-

chungen von der Form:

$$Q_{xm} + \lambda \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial L'}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial L''}{\partial x} + \cdots = 0,$$

$$Q_{ym} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial L'}{\partial y} + \lambda'' \frac{\partial L''}{\partial y} + \cdots = 0,$$

$$Q_{zm} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z} + \lambda' \frac{\partial L'}{\partial z} + \lambda'' \frac{\partial L''}{\partial z} + \cdots = 0.$$

Sie stellen Gleichgewichtsbedingungen dar und gehen für den Fall, dass die Punkte des Systems untereinander durch Stäbe verbunden sind, in die Gleichgewichtsbedingungen (3) über, da dann

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \cos\beta, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \cos\gamma,$$

$$\lambda = S, \quad \lambda' = S', \quad \lambda'' = S'', \quad \text{usw. ist.}$$

In gleicher Weise wie *S. D. Poisson* leitet *O. Mohr*[4]) das Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Fachwerk in Form der Gleichung (5) ab. Aus dem Ausgangspunkt seiner Entwicklung, den Gleichgewichtsbedingungen, folgert er, dass das Prinzip der virtuellen Verrückungen alle Bedingungen des Gleichgewichts der äusseren und inneren Kräfte umfasst, daher die gebräuchlichen Methoden zur *Bestimmung des Gleichgewichtszustandes eines Fachwerkes* als besondere Fälle in sich einschliesst.

4. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die elastischen Formänderungen. Das Gebiet der elastischen Formänderungen erschliesst *O. Mohr*[5]) dem Prinzip der virtuellen Verrückungen durch eine Schlussfolgerung, welche sich darauf stützt, dass in diesem Prinzip die virtuellen Verrückungen völlig unabhängig von dem Belastungs- und Spannungszustand sind und letzterer nur der Bedingung des Gleichgewichts zwischen inneren und äusseren Kräften unterworfen ist. Da die virtuellen Verrückungen nur an die geometrischen Bedingungen des Systems gebunden sind, können an deren Stelle in das Prinzip der virtuellen Verrückungen auch die für einen gegebenen Belastungszustand tatsächlich eintretenden elastischen Formänderungen eingeführt werden. Die letzteren combiniert *O. Mohr* nun mit einem nur gedachten Belastungszustand, den man daher auch als *virtuellen* Be-

4) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Civilingenieur 31 (1885), p. 289 und Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, p. 344.

5) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 20 (1874), p. 223; Beitrag zur Theorie des Fachwerks, ebd. 20 (1874), p. 509 und 21 (1875) p. 17 und Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Civilingenieur 31 (1885), p. 289. Vgl. auch *O. Mohr,* Abhandlgn. aus dem Gebiete d. techn. Mechanik, Berlin 1906.

lastungszustand bezeichnen kann, und bemerkt, dass man einfache Beziehungen zwischen den *elastischen Formänderungen* erhält, wenn man den virtuellen Belastungszustand geeignet wählt. Die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen umfasst daher in dieser Interpretierung alle geometrischen Beziehungen, welche bei der Formänderung in Betracht kommen. Mit Rücksicht auf ihre der zweifachen Interpretierung entspringende Bedeutung bezeichnet *O. Mohr* die Gleichung des Prinzips als *Hauptgleichung der Theorie des Fachwerkes.*

Einen ausführlichen Beweis für die Stellung, welche *O. Mohr* dem Prinzip zu den Formänderungen angewiesen hat, giebt *H. Müller-Breslau.*[6]) Er geht von den geometrischen Bedingungsgleichungen des Fachwerks aus

$$(4)\qquad \Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik},$$

multipliziert jede mit einer zunächst beliebigen Spannkraft $\bar{S}$ und führt nach Addition der Gleichungen und Zusammenfassung der zu einem Knotenpunkt gehörigen Glieder Lasten $\bar{Q}_m$ mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen ein, indem er nunmehr die Bestimmung trifft, dass zwischen den Lasten $\bar{Q}_m$ und den Spannkräften $\bar{S}$ Gleichgewicht bestehe. So erhält er die Gleichung:

$$(5a)\qquad \sum \bar{Q}_m \delta_m - \sum \bar{S} \Delta s = 0,$$

in welcher δ_m und Δs die wirklichen elastischen Formänderungen des Fachwerks bezeichnen. *H. Müller-Breslau* nennt die Gleichung *Arbeitsgleichung für den Belastungszustand* $\bar{Q}$.

Für *kontinuierliche elastische Körper* hat *O. Mohr*[5]) die Umdeutung des Prinzips der virtuellen Verrückungen nur angedeutet. Er betrachtet den elastischen Körper als eine Gruppe von unendlich vielen materiellen Punkten, die untereinander durch Stäbe verbunden sind, also als ein Fachwerk mit unendlich vielen überzähligen Stäben und folgert daraus ohne weiteres die Gültigkeit seiner für das Fachwerk gefundenen Ergebnisse. Er zieht diese Schlussfolgerung, deren Berechtigung in Nr. **9** erörtert ist, übrigens in einer Anmerkung, ohne selbst den Gegenstand weiter zu verfolgen. Doch hat seine Anregung zu verschiedenen Anwendungen des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf stabförmige elastische Körper geführt. (Vgl. Nr. **35.**)

H. Müller-Breslau[7]) giebt eine allgemeine Entwicklung des Gegen-

6) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abt. 1, Leipzig 1892, p. 9, 4. Aufl. Stuttgart 1907, p. 9.

7) *H. Müller-Breslau,* Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper, Berechnung der Formänderungen, Wochenblatt f. Architekten u. Ingenieure

standes, indem er von der Gleichung (2) des Prinzips der virtuellen Verrückungen ausgeht und in dieser den wirklich eintretenden Formänderungszustand mit einem virtuellen Belastungszustand combiniert.

Die Übertragung der oben dargestellten Überlegungen *O. Mohrs* auf das Continuum ergiebt sich sofort, wenn man als Ausgangspunkt die den geometrischen Bedingungen des Fachwerks entsprechenden Beziehungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

wählt, die zwischen den Verrückungen u, v, w und den Verzerrungskompenenten bestehen. Man multipliziert jede der vorstehenden Gleichungen mit der entsprechenden Komponente einer willkürlichen Spannung ($\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \tau_x, \bar{\tau}_y, \bar{\tau}_z$), welche nur die Spannungsgleichungen erfüllen müssen, addiert die so erhaltenen Gleichungen, integriert über den Körper und führt mit Hilfe des *Gauss*schen Integralsatzes die Oberflächenspannungen $\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z$ ein. Ersetzt man dann noch die letzteren durch Einzelkräfte Q_m nach dem de *St. Venant*schen Prinzip, so erhält man die Gleichung

$$(7)\qquad \sum \bar{Q}_m \delta_m = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z)\, dv,$$

welche also das Prinzip der virtuellen Verrückungen für den gedachten Belastungszustand $\bar{Q}_m$ und den wirklichen Formänderungszustand $\varepsilon, \gamma, \delta_m$ ausspricht.

5. **Das elastische Potential.** Das Prinzip der virtuellen Verrückungen löst, da in ihm der Belastungs- und Spannungszustand völlig unabhängig neben dem Formänderungszustand steht, entweder das Spannungsproblem für eine gegebene Belastung oder das Formänderungsproblem, sofern diejenigen Grössen gegeben sind, welche den Formänderungszustand eines elastischen Systems eindeutig festlegen. Die Verbindung zwischen dem Belastungs- und Spannungszustand einerseits und dem Formänderungszustand anderseits wird durch den Begriff des *elastischen Potentiales* vermittelt, dessen Einführung in die Elastizitätstheorie zunächst aus rein theoretischen Erwägungen hervorgegangen ist.

Für das *elastische Potential*, welches auch Kräftefunktion oder *Verzerrungsenergiefunktion* genannt wird, hat schon *L. Navier* einen An-

---

6 (1884), p. 373 und Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2 Abt. 1 Leipzig 1892 p. 38 ff., 4. Aufl. Stuttgart 1907, p. 37 ff.

satz aus molekulartheoretischen Betrachtungen hergeleitet. Seine Bedeutung in der Elastizitätstheorie verdankt das Potential *G. Green.*[8]) Ausgehend von dem Prinzip der Erhaltung der Energie behauptet *Green* die Existenz einer Funktion der Verzerrungskomponenten, deren totales Differential die Elementararbeit der Volumeneinheit ist, welche die inneren Spannungen während einer Deformation leisten. Es ist also

$$(8)\qquad \delta\varphi = \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_x \delta\gamma_x + \tau_y \delta\gamma_y + \tau_z \delta\gamma_z.$$

Damit ergiebt das Potential die Spannungskomponenten als Funktionen der Verzerrungskomponenten nach folgenden Formeln:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_x}, & \sigma_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_y}, & \sigma_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_z}, \\ \tau_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_x}, & \tau_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_y}, & \tau_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_z}. \end{aligned}$$

Den Ansatz des Potentiales erhält *Green* durch Entwicklung nach Potenzen und Produkten der Verzerrungskomponenten. Infolge der Voraussetzung, dass dem unbelasteten Zustand eines Körpers ein spannungsloser Anfangszustand entspricht, für welchen die Funktion φ mit Rücksicht auf die Stabilität — vgl. *G. Kirchhoff*[9]) — ein wahres Minimum sein muss, verschwinden die Glieder vom ersten Grade. Die Glieder vom dritten und höheren Grade kann man vernachlässigen, da die Verzerrungen sehr kleine Grössen sind. Das Potential ist also eine homogene quadratische Funktion der sechs Verzerrungskomponenten, welche mit Rücksicht auf die zwischen Spannungs- und Verzerrungskomponenten bestehenden Beziehungen im allgemeinen Falle 21 Konstante, im Falle der Isotropie deren zwei enthält.

W. Thomson und nach ihm *G. Kirchhoff*[2]) folgern die Existenz der Funktion φ aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Daher ist die Existenz des elastischen Potentiales an die Bedingung adiabatischer oder isothermer Zustandsänderungen geknüpft (vgl. IV 23, Nr. 5c, *Müller-Timpe*). *Kirchhoff* führt die Variation des Integrals der Funktion φ, genommen über den ganzen Körper, in die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ein. Seine Gleichung lautet:

$$(10)\qquad U' - \delta\int\varphi\,dv = 0.$$

8) *G. Green,* On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two noncrystallised media, Cambr. Phil. Soc. Trans. 7 (1842), p. 1 = Math. Papers ed. by *Ferrers*, London 1871, p. 253.

9) *G. Kirchhoff,* Vorlesungen über math. Physik, Bd. 1: Mechanik, Leipzig 1876, 27. Vorlesg., 4. Aufl., Leipzig 1897.

Haben die äusseren Kräfte ein Potential U, so ist $U' = \delta U$. Für den isotropen Körper findet er:

$$(11) \quad \varphi = K[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \tfrac{1}{2}(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2) + \Theta(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2],$$

hierin ist:

$$K = G, \quad \Theta = \frac{1}{m-2}.$$

Aus der Bedingung des stabilen Gleichgewichts, welche unter gewissen Umständen verlangt, dass $-\int \varphi dv$ ein Maximum ist, folgert er, dass die Koeffizienten der Glieder der quadratischen Form positiv, die Funktion selbst für reelle Argumente also auch stets positiv sein muss.[9]) Die Konstanten des elastischen Potentiales, die sogenannten elastischen Konstanten, ergeben sich durch das Experiment.

Lediglich auf experimentaler Grundlage beruht eine andere Beziehung zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten, das sogenannte *Hookesche Gesetz*. Das verallgemeinerte *Hooke*sche Gesetz stellt die sechs Spannungskomponenten als lineare Funktionen der sechs Verzerrungskomponenten dar. Damit stimmt es überein, dass das elastische Potential eine homogene quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten ist. Man hat es daher neuerdings vorgezogen, diese Eigenschaft des elastischen Potentiales anstatt auf theoretische Erwägungen auf das Experiment zu stützen.

Die in der Statik der Baukonstruktionen gebräuchlichen Ansätze des *Hooke*schen Gesetzes sind in Nr. **14** durch Gleichung (38) und in Nr. **15** durch Gleichung (40) gegeben.

6. Die Formänderungs- oder Deformationsarbeit und der Clapeyronsche Satz. Als logische Konsequenz des elastischen Potentiales erscheint der Begriff der Formänderungs- oder Deformationsarbeit, welcher durch *G. Lamé* und *E. Clapeyron* in die theoretischen Untersuchungen der Technik eingeführt ist.

G. Lamé[10]) spricht für einen elastischen kontinuierlichen Körper, welcher so abgestützt ist, dass er keine Verschiebungen als starrer Körper erfahren kann, den Satz aus: „Wenn äussere Kräfte auf die Oberfläche eines solcherweise unverschieblich gestützten elastischen Körpers wirken, so stellt die Summe der Produkte aus den Kräften und den Projektionen der Verschiebungen ihrer Angriffspunkte das Doppelte der Arbeit dar, welche die Kräfte leisten, während sie und gleichzeitig die Formänderungen von Null bis zu ihren Endwerten

10) *G. Lamé,* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852, 2. éd. Paris 1866, p. 79.

wachsen." Vorausgesetzt ist hierbei die Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes. Diese von den *äusseren Kräften* während der *Deformation geleistete Arbeit* nennt *Lamé* die *Deformationsarbeit.* Er behauptet also, dass sie stets halb so gross ist als die virtuelle Arbeit, welche die mit ihren Endwerten konstant angenommenen Kräfte während der Deformation leisten.

Den Beweis des behaupteten Satzes giebt *Lamé* für den Fall eines Drahtes, welcher an einem Ende aufgehängt und am anderen durch ein Gewicht belastet ist. Wenn die Last Q allmählich von Null bis zu ihrem Endwert anwächst, dann gilt für jede Phase das Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$Q d\Delta s = S d\Delta s.$$

Statt der virtuellen Verrückungen werden die wirklichen Formänderungen eingeführt, und die Spannkraft S wird mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes eliminiert. Es ergiebt sich also mit $S = \frac{1}{\varrho}\Delta s$

$$Q d\Delta s = \frac{1}{\varrho}\Delta s \cdot d\Delta s$$

und die von Q während der Deformation geleistete Arbeit D ist

$$D = \int_0^{\Delta s} Q d\Delta s = \frac{1}{2}\frac{(\Delta s)^2}{\varrho}.$$

Andererseits ist nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$Q\Delta s = S\Delta s = \frac{(\Delta s)^2}{\varrho},$$

mithin folgt

$$D = \tfrac{1}{2} Q\Delta s.$$

Auch im allgemeinen Falle des elastischen kontinuierlichen Körpers definiert *G. Lamé* die Deformationsarbeit durch die Aussage des oben angeführten Satzes, also für den Fall, dass nur Oberflächenkräfte wirken, durch den Ansatz

$$D = \tfrac{1}{2}\int (q_x u + q_y v + q_z w)\, dw.$$

Für die solcherweise definierte *Deformationsarbeit* gewinnt nun *E. Clapeyron* — nach *Lamé*s Bericht — einen zweiten Ausdruck, indem er sie *als Funktion der inneren Spannungen* darstellt unter der Voraussetzung, dass der Körper im unbelasteten Zustand *spannungslos* ist und die Deformation *isotherm* erfolgt. Ausgehend von der allgemeinen Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, führt er die wirklichen Verschiebungen und Verzerrungskomponenten anstatt der virtuellen ein. Für die Verzerrungskomponenten setzt er

die Werte, welche sie als Funktionen der Spannungskomponenten bei isotroper Struktur und bei Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes darstellen, und findet so die Gleichung:

$$(12)\qquad \int (q_x u + q_y v + q_z w)\,dw =$$

$$\int \left[\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda+2\mu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2 - \frac{1}{\mu}(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y-\tau_x^2-\tau_y^2-\tau_z^2)\right]dv;$$

hierin ist:

$$E = \frac{3\lambda+2\mu}{1+\frac{\lambda}{\mu}},\quad G = \mu,\quad m = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Die beiden Klammerausdrücke der rechten Seite sind invariant gegenüber rechtwinkliger Koordinatentransformation, der unter dem Integral stehende Ausdruck hat also für jeden Punkt des Körpers einen bestimmten und festen Wert. Auf der linken Seite steht nach *Lamés* Definition der doppelte Wert der Deformations- oder Formänderungsarbeit. Diese Arbeit, die von den äusseren Kräften während der Deformation geleistet wird, erscheint durch die Gleichung (12) also auch ausgedrückt als Funktion der inneren Spannungen. Die rechte Seite der Gleichung giebt somit einen zweiten Ausdruck für den doppelten Wert der Deformationsarbeit. Darin liegt das von *G. Lamé* so genannte *Clapeyronsche Theorem.*

G. Lamé hat für den allgemeinen Fall des elastischen Körpers keinen Beweis des oben angeführten Satzes gegeben. Der Beweis kann, wie es *Lamé* auch in dem erwähnten Spezialfalle tut, nur mit Hilfe der Arbeit der inneren Spannungen geführt werden. Denn die Gültigkeit des Satzes ist an ein lineares Formänderungsgesetz gebunden. Deshalb ist in späteren Lehrbüchern zur Ableitung des *Clapeyron*schen Theorems ein anderer Weg eingeschlagen worden. Das Differential der Arbeit, welche die äusseren Kräfte leisten, während sie von Null bis zu ihren Endwerten anwachsen, wird mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch das Differential der Arbeit der inneren Kräfte ausgedrückt, indem statt der virtuellen die wirklichen Verschiebungen und Verzerrungskomponenten eingeführt und letztere durch die Spannungskomponenten ersetzt werden. Integriert man nun auf beiden Seiten, so ergiebt das Integral der Arbeit der äusseren Kräfte, genommen von Null bis zu ihren Endwerten, die Formänderungsarbeit. Mithin stellt das Integral der Arbeit der inneren Kräfte, genommen von Null bis zu den Endwerten der Spannungskomponenten, einen zweiten Ausdruck der Formänderungsarbeit dar. Führt man die letztere Integration aus, so erhält man einen Ausdruck,

welcher gleich dem mit $1/2$ multiplizierten Ausdruck der rechten Seite der Gleichung (12) ist. Durch Vergleich der so gewonnenen Gleichung mit Gleichung (12) folgt also der von *G. Lamé* angeführte Satz.

Der vorstehenden Beweisführung entsprechend hat man später die Definition *G. Lamé*s für die Deformationsarbeit verlassen, indem man sie zur Arbeit der inneren Kräfte in Beziehung gesetzt hat. Man hat also die *Deformationsarbeit* als die zur *Überwindung der inneren Kräfte geleistete mechanische Arbeit* definiert.

So giebt *F. Grashof*[11]) für die *Deformationsarbeit* eines elastischen Körpers folgende Ansätze:

bei unbestimmtem Elastizitätsgesetz

$$(13)\quad A = \int dv \int (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_x \delta\gamma_x + \tau_y \delta\gamma_y + \tau_z \delta\gamma_z),$$

bei Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes für isotrope Körper

$$(14)\quad A = G \int \Big[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)\Big] dv$$

als *Funktion der Verzerrungskomponenten* und

$$(15)\quad A = \frac{1}{2E} \int \Big[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\Big] dv + \frac{1}{2G} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\, dv$$

als *Funktion der Spannungskomponenten.*

H. Müller-Breslau[12]) formuliert das Gesetz *Clapeyron*s für das Fachwerk: „Wird ein anfänglich spannungsloses Fachwerk, dessen Temperatur sich in keinem Punkt ändert, von äusseren Kräften ergriffen, welche allmählich von Null aus anwachsen, so ist die mechanische Arbeit der äusseren Kräfte unabhängig von dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte zunehmen und auch unabhängig von der Reihenfolge, in der die äusseren Kräfte am Fachwerk angebracht werden. Sie ist stets halb so gross, als wenn sämtliche Kräfte während der ganzen Formänderung ihre Endwerte hätten."

Vergleicht man das Differential des *Green*schen Potentiales mit dem ersten *Grashof*schen Ansatz (13) und *Kirchhoff*s Ausdruck (11) der Funktion φ für elastisch isotrope Körper mit dem zweiten Ansatz *Grashof*s (14), dann ist ersichtlich, dass das elastische Potential die Form-

11) *F. Grashof,* Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, p. 372.

12) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2 Abt. 1, Leipzig 1892, p. 12.

änderungsarbeit der Volumeneinheit darstellt. Nach *F. Grashof*[11]) und *A. E. H. Love*[13]) stellt die Formänderungsarbeit die potentielle Energie der Deformation eines Körpers, das elastische Potential die potentielle Energie der Deformation der Volumeneinheit dar.

Für den Fall *nicht-isothermer Deformation* entwickelt *J. Weyrauch*[14]) den *Ausdruck der Deformationsarbeit,* indem er in dem Ansatz (13) die Spannungskomponenten als Funktionen der Verzerrungskomponenten und der Temperaturänderung t einführt — vgl. unten die Gleichungen (40) —. Bei Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes erhält er für den isotropen Körper den Ansatz:

$$(16) \qquad A = G\int\Big[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)\Big]dv - 2G\,\frac{m+1}{m-2}\,\varepsilon\int dv\int t\,(\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y + \delta\varepsilon_z).$$

Verschwinden die Spannungskomponenten, so wird auch die Formänderungsarbeit zu Null. Im übrigen hängt der Wert des zweiten Integrales davon ab, wie sich die Temperatur während des Deformationsvorganges ändert. Die Formänderungsarbeit kann also für ein und denselben Endzustand des deformierten Körpers verschiedene Werte haben. *J. Weyrauch* versteht eben auch im Falle nicht-isothermer Deformation unter der Deformationsarbeit die Arbeit der äusseren Kräfte, welche zur Überwindung der inneren Kräfte geleistet wird. Gegen diese Auffassung, welcher sich nahezu alle späteren Autoren angeschlossen haben, wendet sich *J. Weingarten*[15]) mit der Begründung, dass der Name Deformationsarbeit sinnlos wäre, wenn einer bestimmten Deformation mehrere Werte der Deformationsarbeit zugehören könnten. Er behauptet, dass im Falle des Auftretens einer Wärmeeinwirkung die verbrauchte, in Arbeit umgesetzte Wärme als äussere Arbeit aufzufassen sei. Demgemäss definiert er die Deformationsarbeit eines festen elastischen Körpers als dasjenige (fiktive) Arbeitsquantum, welches

13) *A. E. H. Love,* A treatise on the mathematical theory of elasticity, 2 vols, Cambridge 1892, 1893; 2. ed. Cambridge 1906; deutsch von *A. Timpe,* Leipzig 1907, p. 113.

14) *J. Weyrauch,* Theorie elastischer Körper, Leipzig 1884, p. 163 und Über statisch unbestimmte Fachwerke und den Begriff der Deformationsarbeit, Zeitschr. f. Architektur- und Ingenieurwesen 54 (1908), p. 91; vgl. auch p. 457.

15) *J. Weingarten,* Zur Theorie der Wirkung der ungleichen Erwärmung auf elastische Körper, Zeitschr. f. Architektur- u. Ingenieurwesen (53) 12 (1907), p. 453; Über den Begriff der Deformationsarbeit ebd. 54 (1908), p. 277; Über das Clapeyronsche Theorem in der technischen Elastizitätstheorie, ebd. 55 (1909), p. 515, und Über den Begriff der Deformationsarbeit in der Theorie der Elastizität fester Körper, Gött. Nachr. Math.-phys. Klasse 1909, p. 64.

äussere den Körper angreifende Kräfte aufwenden müssen, um ihn unter der Voraussetzung *isotherm* geschehender Deformation aus seiner natürlichen Lage in die gegebene deformierte Gleichgewichtslage überzuführen. Nach dieser Definition ist die Deformationsarbeit nicht gleich der Arbeit der tatsächlich auftretenden inneren Kräfte und verschwindet nicht, wenn die Spannungskomponenten zu Null werden.

Die Auffassung *Weingartens* von dem Begriff „Deformationsarbeit" wäre an sich natürlich möglich, sie ist im Sinne der mechanischen Wärmetheorie auch durchaus logisch; sie deckt sich jedoch nicht mit dem in die Theorie der Baukonstruktionen eingeführten Begriff, welcher ausgehend von dem *Clapeyron*schen Theorem auf der Gleichheit der Arbeit der äusseren und inneren Kräfte beruht.

7. Das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit von Menabrea für das Fachwerk. Angeregt durch *D. Bernoulli* hat schon *L. Euler*[16]) in dem Integral des Quadrates der Krümmung, genommen längs eines Stabes, eine Funktion aufgestellt, welche die bei der Biegung geleistete Arbeit darstellt, und in dem Minimum dieser Funktion ein Kriterium der Gleichgewichtslage des deformierten Stabes gefunden. Ein analoges Gesetz für das *Fachwerk* hat *F. Menabrea*[17]) entdeckt und seine Bedeutung für die Statik erkannt. Er stellt den Satz auf: „Wenn ein elastisches System unter dem Angriff äusserer Kräfte eine Gleichgewichtslage einnimmt, dann ist die bei der Formänderung der Stäbe, welche die verschiedenen Punkte des Systems verbinden, geleistete Arbeit ein Minimum." Die unzulängliche Formulierung dieses Satzes, welche die dem Minimum benachbarten Funktionswerte nicht kennzeichnet, ergänzt *Menabrea* durch folgende Ausführungen: Wenn in einem Fachwerk, welches von äusseren im Gleichgewicht befindlichen Kräften angegriffen wird, die Anzahl der Stäbe grösser ist als die Anzahl der unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen, so werden diese durch unendlich viele Spannungssysteme in den Stäben erfüllt (vgl. IV 5, Nr. **31**, *L. Henneberg*). Dasselbe ist der Fall, wenn abgesehen von der Existenz solcher Bedingungen, welche die Erfüllung der äusseren Gleichgewichtsbedingungen sichern, einige Punkte des Fachwerks fest sind. Man kann also das tatsächlich eintretende Spannungssystem einer Variation ohne Störung des Gleichgewichts unterwerfen. Mit einer solchen Variation ist eine Variation der Stablängen-

16) *L. Euler,* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausannae 1744. Additamentum I: De curvis elasticis.

17) *F. Menabrea,* Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques, Paris C. R. 46 (1858), p. 1056.

änderungen $\delta\Delta s$ verbunden, welche nach dem Hookeschen Gesetz durch

$$\delta\Delta s = \varrho\,\delta S$$

ausgedrückt ist, und also auch eine Variation der von den Spannkräften bei der Deformation geleisteten Arbeit, das ist der Formänderungsarbeit des Fachwerks. Letztere ist gegeben durch den Ansatz

$$\sum S\delta\Delta s = \sum S\delta S\varrho = \delta\tfrac{1}{2}\sum S^2\varrho.$$

Menabra schliesst nun, dass die gedachte Variation der Formänderungsarbeit gleich Null sein müsse, und erhält so die Gleichung

$$\sum S\delta S\varrho = \delta\tfrac{1}{2}\sum S^2\varrho = 0,$$

welche er als *Elastizitätsgleichung* bezeichnet. Sie drückt das Minimum der Formänderungsarbeit aus. Als Nebenbedingungen des Minimums bestehen die unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen.

Menabreas Beweisführung für das Verschwinden der gedachten Variation der Formänderungsarbeit ist indessen nicht zutreffend. Er schliesst zunächst, dass mit einer Variation der Spannkräfte Arbeit äusserer Kräfte verbunden sei, und weiter, dass diese Arbeit notwendig gleich Null sei, da der Gleichgewichtszustand durch die Variation nicht gestört werde. Diese Schlussfolgerung ist nicht richtig. *Menabrea* übersieht, dass die Variation des Spannungssystems notwendig den Zusammenhang des Fachwerks aufhebt, sofern die zwischen der Spannkraft und der Längenänderung eines Stabes bestehende Beziehung beibehalten wird. Deshalb kann eine Aussage über die fragliche Arbeit der äusseren Kräfte nicht gemacht werden. Andererseits kann die Arbeit der äusseren Kräfte, welche entsteht, wenn die Stablängenänderungen unter Wahrung des Zusammenhanges variiert werden, nicht zu Null werden. Für eine solche Variation gilt die Gleichung

$$\sum S\delta\Delta s = \sum Q_m\delta\delta_m,$$

in welcher die Q voneinander unabhängig sind, da die Stützpunkte keine Verrückungen erfahren. Sie gilt ferner für jedes willkürliche Belastungssystem, also kann die rechte Seite nur verschwinden, wenn die $\delta\delta_m$ einzeln verschwinden, d. h. wenn die Knotenpunkte des Fachwerks keine Verrückungen erfahren und also die Variationen der Stablängenänderungen einzeln zu Null werden.

Der Beweis für den Satz *Menabreas* ergiebt sich auf folgendem Wege. Für das deformierte System gilt die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen

$$\sum S\Delta s = \sum Q_m\delta_m.$$

Sie kann einer Variation unterworfen werden unter der Bedingung,

dass sowohl der Gleichgewichtszustand als auch der geometrische Zusammenhang des Systems bestehen bleibt, sofern man S und Δs als voneinander unabhängig betrachtet. Dann ergiebt sich

$$\sum \delta S \Delta s + \sum S \delta \Delta s = \sum Q_m \delta \delta_m .$$

Die $\delta \Delta s$ und $\delta \delta_m$ sind virtuelle Verrückungen, infolgedessen gilt die Gleichung

$$\sum S \delta \Delta s = \sum Q_m \delta \delta_m ,$$

es folgt also

$$\sum \delta S \Delta s = 0 .$$

In dieser Gleichung sind die Variationen δS nur den Bedingungen des Gleichgewichts, die Δs der Bedingung des geometrischen Zusammenhanges, unterworfen, mithin kann hier $\Delta s = S\varrho$ eingeführt werden. Damit ergiebt sich

$$\sum S \varrho \delta S = \delta \tfrac{1}{2} \sum S^2 \varrho = 0.$$

Dagegen kann in dem Ausdruck $\sum S \delta \Delta s$ nicht $\delta \Delta s = \delta S \varrho$ gesetzt werden, da die $\delta \Delta s$ der Bedingung des geometrischen Zusammenhanges unterworfen sind, welche durch $\delta S \varrho$ allgemein nicht erfüllt wird.

Wegen der nicht einwandfreien Begründung durch *Menabrea* hat der Satz denn auch trotz weiterer Arbeiten *Menabreas*[18]) zunächst nur wenig Beachtung gefunden.

8. Die Sätze Castiglianos für das Fachwerk. Eine erste einwandfreie Begründung und seine jetzige zentrale Stellung verdankt das Prinzip *Menabreas* *A. Castigliano*[19]), wohl nicht zum geringsten Teil infolge der zahlreichen Anwendungen, durch welche dieser dessen Ergiebigkeit beweist.

A. Castigliano betrachtet elastische Systeme, deren Punkte keine anderen gegenseitigen Verschiebungen als elastische erfahren; er bezeichnet sie als „Systeme von unveränderlicher Form“. Bewegungen als Ganzes verhindert er durch die Annahme unverschlieblicher Abstützung durch sechs unbekannte Stützenreaktionen. Als einfachsten Fall solcher Abstützung stellt er die Anordnung von drei unverschieblich

18) *F. Menabrea*, Sur la concordance des quelques méthodes générales pour déterminer les tensions dans un système de points réunis par des liens élastiques et sollicités par des forces extérieures en équilibre, Paris C. R. 98 (1884), p. 714. Vgl. auch die früheren Arbeiten in: Torino, Memorie della R. Accademia (2) 25 (1871), p. 141; Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche 6 (1873), und Roma, Atti della R. Accad. dei Lincei (2) 2 (1875), p. 201.

19) *A. Castigliano*, Nuova teoria intorno dell' equilibrio dei sistemi elastici, Torino, Atti della Accademia delle scienze 1875, und Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879; deutsch von *E. Hauffe*, Wien 1886.

gestützten Punkten dar, von welchen einer in drei zueinander senkrechten Richtungen, ein zweiter in zwei und der dritte in einer Richtung unverschieblich ist. Die Stützenreaktionen sind dann durch die sechs Gleichgewichtsbedingungen starrer Systeme bestimmt. Ferner trifft er die Voraussetzung, dass das System im unbelasteten Zustand spannungslos sei. Die *Formänderungsarbeit eines Fachwerkes*, welches durch Kräfte Q_m belastet und durch die Stützenreaktionen im Gleichgewicht erhalten wird, ist dann als *Funktion der Spannkräfte* in den Stäben durch den Ausdruck:

(17) $$A = \tfrac{1}{2}\sum S^2 \varrho$$

und als *Arbeit der äusseren Kräfte* durch

(18) $$A = \tfrac{1}{2}\sum Q_m \delta_m = \tfrac{1}{2}\sum (Q_{xm}\delta x_m + Q_{ym}\delta y_m + Q_{zm}\delta z_m)$$

gegeben. (*Castigliano* bezeichnet δ_m als relative Verschiebung des Angriffspunktes.) Aus den Gleichgewichts- und Elastizitätsbedingungen (vgl. Nr. **14**) kann man nun durch Elimination der Spannkräfte lineare Gleichungen ohne absolute Glieder zwischen den Lasten Q_m und den Knotenpunktverschiebungen δx_m, δy_m, δz_m gewinnen, deren Anzahl ebenso gross ist wie die der unbekannten Knotenpunktverschiebungen. Mit Hilfe der so gewonnenen Gleichungen lassen sich die Q_m als lineare Funktionen der δ_m, und ebenso die δ_m als lineare Funktionen der Q_m ausdrücken. Damit folgt, dass man aus Gleichung (18) die Formänderungsarbeit A als homogene quadratische Funktion entweder der δ_m oder der Q_m darstellen kann.

Nach dem *Euler*schen Satze über homogene Funktionen ist, wenn A als Funktion der δ_m ausgedrückt ist,

$$A = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial A}{\partial \delta_m}\,\delta_m,$$

oder, wenn A als Funktion der Q_m dargestellt ist,

$$A = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial A}{\partial Q_m}\,Q_m.$$

Daraus folgt durch Vergleich mit Gleichung (18) sofort

(19) $$\frac{\partial A}{\partial \delta_m} = Q_m$$

für die erste, oder

(20) $$\frac{\partial A}{\partial Q_m} = \delta_m$$

für die zweite Form des Ausdrucks der Formänderungsarbeit.

A. Castigliano giebt die *Lehrsätze von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit* in folgender Fassung:

Erster Teil: Wenn man die Deformationsarbeit eines gegliederten

Systemes in Funktionen der „relativen Verrückungen“ der an den Eckpunkten wirkenden Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Verrückungen den Wert der korrespondierenden Kräfte geben.

Zweiter Teil: Wenn man andererseits die Deformationsarbeit eines gegliederten Systemes in Funktionen der äusseren Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Kräfte die „relativen Verrückungen“ ihrer Angriffspunkte geben.

Zwei wichtige Spezialfälle ergeben sich bei Anwendung des zweiten Satzes, wenn zwei parallele Kräfte P_1 und P_2 von gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung in den beiden Knotenpunkten m_1 und m_2 angreifen. In der Formel, welche die Deformationsarbeit als Funktion der äusseren Kräfte darstellt, sind P_1 und P_2 als unabhängige Veränderliche anzusehen. Es wird also

$$\delta m_1 + \delta m_2 = \frac{\partial A}{\partial P_1} + \frac{\partial A}{\partial P_2}.$$

Der erste Spezialfall ist der, dass die beiden Kräfte in die Verbindungsgerade $m_1 m_2$ fallen. Bezeichnet dann S_m einen Zug bzw. Druck zwischen den Knotenpunkten m_1 und m_2, dessen Grösse der Grösse der beiden Kräfte P gleich ist, und Δs_m die Änderung der gegenseitigen Entfernung der Knotenpunkte m_1 und m_2, dann ist die statische Wirkung von S_m dieselbe wie die der beiden Kräfte P_1 und P_2, und $\delta m_1 + \delta m_2 = \Delta s_m$. Mithin folgt

(21a) $$\Delta s_m = \frac{\partial A}{\partial S_m}.$$

Der zweite Spezialfall ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kräfte P_1 und P_2 rechtwinklig zur Verbindungsgeraden $m_1 m_2$ gerichtet sind. Wird dann das Moment $M_m = P \cdot m_1 m_2$ eingeführt und A als Funktion von M_m dargestellt, so ergiebt sich, wenn τ_m den Winkel bezeichnet, um den sich die Verbindungsgerade $m_1 m_2$ infolge der elastischen Deformation des Fachwerks dreht, die Gleichung

(21b) $$\frac{\partial A}{\partial M_m} = \tau_m.$$

Den Satz *F. Menabreas* bezeichnet *A. Castigliano* als *Lehrsatz von der kleinsten Arbeit* und spricht ihn in folgender Form aus:

„Sucht man das Minimum der Funktion $\frac{1}{2} \Sigma S^2 \varrho$, welche die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems ausdrückt, indem man die $3k - 6$ Gleichungen zwischen den Spannungen aller Stäbe des Systems in Rechnung zieht, so erhält man für diese Spannungen jene Werte, welche in dem System nach der Deformation herrschen.“

Der Satz setzt natürlich voraus, dass die Zahl der Stäbe grösser als $3k - 6$ ist. Werden $3k - 6$ Stäbe so ausgesucht, dass sie ein System von unveränderlicher Form (Hauptsystem) bilden, so können die anderen Stäbe ohne Störung des Gleichgewichtszustandes beseitigt werden, wenn man in den durch sie verbundenen Knotenpunkten je zwei in die Stabaxe fallende Kräfte von entgegengesetzter Richtung wirken lässt, welche der Spannkraft in dem betreffenden Stab gleich sind. Die Spannkräfte der beseitigten Stäbe seien allgemein mit X bezeichnet. Dann lassen sich die Spannkräfte S des Hauptsystems mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen als lineare Funktionen der äusseren Kräfte und der X darstellen. Die Formänderungsarbeit des ganzen Systems kann zerlegt werden in die des Hauptsystems und die der beseitigten Stäbe, also:

$$A = \tfrac{1}{2}\sum S^2 \varrho + \tfrac{1}{2}\sum X^2 \varrho = A_1 + A_2.$$

Nach Gleichung (21a) aber ist allgemein für jedes X:

$$\frac{\partial A_1}{\partial X} = - X \cdot \varrho,$$

und da die X voneinander unabhängig sind, ist

$$X\varrho = \frac{\partial A_2}{\partial X};$$

mithin folgt:

(22) $$\frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{\partial A_2}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial X} = 0,$$

womit der Satz *Menabreas* bewiesen ist. Man kann den Beweis auch kürzer fassen, indem man nur einen überzähligen Stab durchschneidet und dessen Spannkraft als äussere Kraft X auf beiden Ufern des Schnittes anbringt. Dann folgt er ohne weiteres aus dem zweiten Lehrsatz *Castiglianos* und der Bedingung, dass sich die beiden Ufer des Schnittes bei der Deformation gegeneinander nicht verschieben dürfen.

A. Castigliano gibt noch einen anderen sehr übersichtlichen Beweis, welcher von ihm bereits 1873 veröffentlicht worden ist.[20]) Er zeigt, dass, wenn man das Minimum der Funktion $\frac{1}{2}\sum S^2 \varrho$ unter der Bedingung, dass die Spannkräfte die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, sucht, diese ausgedrückt werden vermittelst der Gleichungen:

$$S_{pq} = \frac{1}{\varrho}\left[(A_q - A_p)\cos\alpha_{pq} + (B_q - B_p)\cos\beta_{pq} + (C_q - C_p)\cos\gamma_{pq}\right],$$

wo die $3k - 6$ Konstanten A, B, C *Lagrange*sche Multiplikatoren sind, deren Werte aus den $3k - 6$ Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen

20) *A. Castigliano,* Thèse pour obtenir le diplôme d'Ingenieur, Turin 1873; vgl. Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, p. 32.

sind. Andererseits werden aber gerade die Spannkräfte des Fachwerkes, die nach einer Deformation stattfinden, aus denselben Gleichgewichtsbedingungen und einem System von Gleichungen bestimmt, das mit dem obigen identisch ist, wo aber die Konstanten A, B, C durch die Verschiebungskomponenten Δx, Δy, Δz der Knotenpunkte ersetzt sind. (Vgl. die Gleichungen (36) und (37) unten.) Es ergeben sich also aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Konstanten A, B, C dieselben Werte wie für die Verschiebungskomponenten Δx, Δy, Δz. Mithin muss die Aufsuchung des Minimums von $\frac{1}{2}\Sigma Ss$ gerade auf die nach der Deformation in den Stäben herrschenden Spannkräfte führen.

Infolge der Voraussetzung, welche *Castigliano* über die statische Bestimmtheit der Abstützung der Systeme getroffen hat, ist die Gültigkeit der Sätze zunächst auf sogenannte *innerlich statisch unbestimmte Systeme* beschränkt. Es bedarf jedoch nur ganz unwesentlicher Änderungen in der Beweisführung, um ihre Gültigkeit auch für *äusserlich statisch unbestimmte Systeme* darzutun. *Castigliano* zeigt dies in einigen Sonderfällen, in denen er Stützenreaktionen als statisch unbestimmte Grössen einführt und beweist, dass die Formänderungsarbeit ein Minimum wird, wenn deren Angriffspunkte keine Verschiebung erfahren.

Der Satz von der kleinsten Arbeit verliert seine Gültigkeit, sobald die freie Verrückung irgendwelcher Systempunkte durch *Reibung* gehindert wird. Doch kann man in diesem Falle den Lehrsatz von dem Differentialquotienten der Arbeit anwenden.

Der Satz von der kleinsten Arbeit ist auch dann nicht gültig, wenn das System im unbelasteten Zustand nicht spannungslos ist, also sogenannte *Anfangsspannungen* vorliegen, ein Fall, der auch *Temperaturänderungen* einzelner oder aller Stäbe einschliesst. Dann wird aber der Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\sum S^2\varrho - \sum S\lambda$$

durch die nach der Deformation eintretenden Spannkräfte zu einem Minimum gemacht. Die zweite Summe erstreckt sich nur über die überzähligen Stäbe, und λ ist die Grösse, um welche diese im spannungslosen Zustand zu kurz sind (vgl. unten Nr. 12).

9. Die Sätze Castiglianos für den festen elastischen Körper. *A. Castigliano*[21]) vollzieht den Übergang zum festen elastischen Körper vermittelst der *I. Newton*schen Auffassung von der Materie, nach welcher diese aus kleinen mit Zentralkräften aufeinander wirkenden Mole-

21) *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin, 1879, Ch. 2, p. 45.

külen, welche *L. Navier* als materielle Punkte betrachtet, aufgebaut ist. Vermöge dieser Auffassung erscheint der feste elastische Körper als der Grenzfall eines hochgradig statisch unbestimmten Fachwerks. Indessen geht *Castigliano* auf die genaue Präzisierung dieser Auffassung nicht näher ein. Im Grunde operiert er mit einem Fachwerk mit nur endlich vielen, wenn auch sehr vielen, Knotenpunkten und Stäben. Ausgehend von seinen früheren Voraussetzungen hinsichtlich der unverschieblichen Stützung und eines spannungslosen Anfangszustandes findet er für die *Deformationsarbeit* sofort den Ansatz:

$$A = \tfrac{1}{2}\sum Q_m \delta_m = \tfrac{1}{2}\sum (Q_{xm}\delta x_m + Q_{ym}\delta y_m + Q_{zm}\delta z_m),$$

wo nun Q_m die in den Molekülen angreifenden Kräfte sind.

Als Funktion der inneren Spannungen und Verzerrungen stellt er die Deformationsarbeit dann durch einen Ausdruck dar, welcher mit demjenigen *F. Grashofs* in Gleichung (13) übereinstimmt. Für *Stäbe*, deren Querschnittabmessungen sehr klein im Verhältnis zur Länge des Stabes sind — und auf diese sind alle seine Überlegungen zugeschnitten —, macht er die von *B. de St. Venant* in seiner Balkentheorie (vgl. IV 25, *Tedone-Timpe*, Nr. **13**) eingeführte Annahme, dass auf die zur Stabaxe parallelen Ebenen keine normalen Spannungen wirken. Wählt man also die Stabaxe als x-Axe, so werden:

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_x = 0$$

und damit, wenn man, wie es üblich ist, jetzt die Stabaxe mit s bezeichnet:

$$A = \tfrac{1}{2}\int ds \iint \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_y^2}{G_2} + \frac{\tau_z^2}{G_3}\right) dy\,dz,$$

worin G_2 und G_3 die Koeffizienten der „tangentialen Elastizität“ (*Schubmoduln*) bezeichnen. *Castigliano*[22]) stellt nunmehr für die Spannungskomponenten σ_x, τ_y, τ_z diejenigen Ausdrücke als Funktionen der resultierenden Kräfte und Momente auf, die sich unter der Annahme ergeben, dass wirklich das *de St. Venant*sche Balkenproblem vorliegt. Es werden dann, wenn N_x die Längskraft, Q_y und Q_z die Querkräfte, M_x das Torsionsmoment und M_y, M_z die Biegungsmomente, bezogen auf die Stabaxe und Hauptträgheitsaxen des Querschnittes, sind:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z,$$

$$\tau_y = A_1 \frac{Q_z}{F} + B_1 \frac{Q_y}{F} + C_1 \frac{M_x}{J},$$

$$\tau_z = A_2 \frac{Q_z}{F} + B_2 \frac{Q_y}{F} + C_2 \frac{M_x}{J},$$

22) *A. Castigliano,* ebd. p. 148 ff.

Hier bedeuten F den Querschnitt des Stabes, J_y und J_z die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts für die y- bzw. z-Axe und J ein Moment zweiter Ordnung des Querschnittes für den Mittelpunkt (für den Kreisquerschnitt das polare Trägheitsmoment); A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 sind Funktionen, die von der Form des Querschnittes abhängen. Damit wird die Deformationsarbeit durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{N_x^2}{F} + \frac{M_z^2}{J_z} + \frac{M_y^2}{J_y}\right) ds$$

$$+ \frac{1}{2}G\int\left(\bar{A}\frac{Q_z^2}{F} + \bar{B}\frac{Q_y^2}{F} + \bar{C}\frac{M_x^2}{J} + H\frac{Q_y M_x}{FJ} + K\frac{Q_z M_x}{FJ} + L\frac{Q_y Q_z}{F^2}\right) ds.$$

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$; H, K, L sind 6 neue Funktionen des Querschnittes, die in einfacher Weise mit den früheren A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2, den Schubmoduln G_2 und G_3 und dem Moment J zusammenhängen.

Hat der Querschnitt eine Symmetrieaxe, was in der Praxis meist der Fall, so verschwinden die Koeffizienten K und L. Ist ausserdem — wie in den praktischen Fällen stets angenommen wird — das Torsionsmoment M_x gleich Null, so folgt für die *Deformationsarbeit der einfachere Ausdruck:*

$$(23) \qquad A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{N_x^2}{F} + \frac{M_z^2}{J_z} + \frac{M_y^2}{J_y}\right) ds + \frac{1}{2G}\int\left(\bar{A}\frac{Q_z^2}{F} + \bar{B}\frac{Q_y^2}{F}\right) ds.$$

Für den am häufigsten vorkommenden Fall, dass alle Stabaxen einer Ebene angehören, alle Querschnitte in dieser eine Trägheitshauptaxe haben und alle äusseren Kräfte bzw. ihre Resultanten in diese Ebene fallen, fällt in dem Ausdruck von A noch das Wertepaar M_z, Q_y fort, falls die y-Axe senkrecht zur Ebene des Stabes liegt. Damit wird:

$$(24) \qquad A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{M_y^2}{J_y} + \frac{N_x^2}{F}\right) ds + \frac{1}{2G}\int \bar{A}\frac{Q_z^2}{F}\, ds.$$

Castigliano bezeichnet die drei Glieder in diesem Ausdruck als Deformationsarbeit herrührend von der „Biegung" der „Kompression" (Dehnung) und der „Verschiebung" (Gleitung).

Der somit aufgestellte Ausdruck für die Deformationsarbeit gilt streng nur für den Fall der *St. Venant*schen Balkentheorie. Er wird aber in der Statik der Baukonstruktionen für alle vorkommenden Biegungsfälle verwandt, da er jedenfalls eine gute Annäherung darstellt (vgl. IV 25, Nr. **13** *Tedone-Timpe*). Dies hat *Castigliano* im einzelnen näher begründet, wobei sich noch ergiebt, dass das zweite Integral in dem Ausdruck (23) für A im allgemeinen gegenüber dem ersten vernachlässigt werden kann. Über diese angenäherten Ansätze vgl. unten Nr. **15**.

Die Sätze von den *Differentialquotienten* der *Deformationsarbeit* folgert *A. Castigliano*[23]) vermöge seiner oben angeführten Auffassung von der Zusammensetzung des festen elastischen Körpers ohne weiteres aus den für das Fachwerk gegebenen Beweisen. Er verallgemeinert sie dann für den Fall, dass die äusseren Kräfte nicht in einzelnen Punkten als Einzelkräfte sondern über die Moleküle des Körpers oder die Elemente gewisser Flächen verteilt angreifen.

Ebenso einfach überträgt *Castigliano* den *Satz von der kleinsten Arbeit,* den er in folgender Fassung ausspricht: „Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers zwischen den Molekülpaaren auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man jene Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, dass zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht herrscht.“ Der Anwendung dieses Satzes erschliesst *Castigliano* ein weites Gebiet durch folgende Betrachtung, welche die Schwierigkeit, dass man die Bedingungsgleichungen für jedes Molekül praktisch gar nicht aufstellen kann, behebt. Die elastischen Kräfte in jedem Punkte bzw. die Spannungskomponenten für ein Flächenelement lassen sich praktisch mit mehr oder weniger guter Annäherung als lineare Funktionen der resultierenden Kraft- und Momentkomponenten darstellen, wie dies oben für das Problem des *St. Venant*schen Balken angegeben. Andererseits sind diese resultierenden Kraft- und Momentkomponenten statisch bestimmbar, wenn für gewisse Flächen im Körper die resultierenden Kraft- und Momentkomponenten sowie die Stützenreaktionen bekannt sind. Zuweilen bestehen zwischen diesen Grössen noch Bedingungsgleichungen, dann kann eine gleiche Anzahl derselben eliminiert werden. Die übrigbleibenden sind Unbekannte, welche als die statisch unbestimmten Grössen des gegebenen Falles eingeführt werden. Die Deformationsarbeit kann als Funktion dieser statisch unbestimmten Grössen dargestellt werden, durch die auch die elastischen Kräfte ausgedrückt erscheinen. Da nun in Rücksicht auf letztere die Deformationsarbeit ein Minimum ist, so folgt dies sofort auch in Rücksicht auf erstere. *Castigliano* spricht diesen Satz so aus:

„Welches auch die unbekannten Grössen sind, in deren Funktionen man die Deformationsarbeit eines Systems ausgedrückt hat, die Werte, welche diese nach der Deformation des Systems haben, sind derartige, dass sie unter Berücksichtigung der zwischen ihnen stattfindenden Bedingungsgleichungen diese Arbeit zu einem Minimum machen.“

23) *A. Castigliano,* ebd. p. 48ff

Die Ableitung dieser Sätze in der hier angedeuteten Form kann nicht als einwandfrei gelten. Die Zulässigkeit des Grenzüberganges vom Fachwerk mit einer sehr grossen aber endlichen Anzahl von Knotenpunkten und Stäben zu einem System unendlich vieler Punkte ist nicht dargetan. Ausserdem hat die Molekularhypothese, soweit sie nur Zentralkräfte annimmt, heute das Feld geräumt. Diese Hypothese ist auch gerade im Zusammenhang mit der Formänderungsarbeit, also dem elastischen Potentiale, wenig am Platz. Denn einer der Vorzüge der *Green*schen Methode des Potentiales ist es, dass sie zweifelhafter Hypothesen über die Konstitution der Materie entraten kann. Es ist natürlich nur eine Folge seiner Grundlage, wenn *Castigliano* im allgemeinen Falle der Anisotropie als charakteristisch für den festen elastischen Körper nur 15 elastische Konstante erhält gegenüber den 21 der Potentialtheorie.

10. Weitere Beweise und Beziehungen der Sätze Castiglianos zu anderen Sätzen. Unter diesen Umständen dürfte der Beweis, auf welchen *H. Müller-Breslau*[24]) die Sätze *Castiglianos* stützt, den Vorzug verdienen. *Müller-Breslau* geht von dem Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Form der Gleichung (7) aus und macht die auf dem Superpositionsgesetz begründete Annahme, dass es gelingt, die wirklichen Spannungen als lineare Funktionen der gegebenen Lasten und gewisser statisch unbestimmter Grössen darzustellen. Dann lassen sich die virtuellen Spannungen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ jeweils als die partiellen Differentialquotienten der wirklichen Spannungen nach den statisch unbestimmten Grössen bzw. den äusseren Kräften darstellen. Damit wird die rechte Seite der Gleichung (7) ein partieller Differentialquotient der Formänderungsarbeit nach einer statisch unbestimmten Grösse bzw. einer äusseren Kraft, während die linke Seite die entsprechende virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte darstellt. In der letzteren ist auch der Einfluss etwaiger Stützenverschiebungen berücksichtigt Finden keine Stützenverschiebungen statt, so ergeben sich Gleichungen, welche den zweiten oder dritten Satz *Castiglianos* aussprechen

C. Fränkel[25]) hat den Satz von der kleinsten Arbeit für das

---

24) *H. Müller-Breslau,* Über die Anwendung des Prinzips der Arbeit in der Festigkeitslehre, Wochenblatt für Architekten u. Ingenieure 5 (1883), S. 87; Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper, ebd. 6 (1884), S. 373; Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1886, 3. Aufl. ebd. 1904, S. 80ff; vgl. auch Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abt. 1, 4. Aufl. Stuttgart 1907, S. 48ff.

25) *C. Fränkel,* Das Prinzip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte ela-

Fachwerk und den festen isotropen Körper unabhängig von *Castigliano* gefunden und seine Anwendung gezeigt. Weitere Beweise des Satzes haben *A. E. H. Love*[26]), *J. Weingarten*[26]) und *A. Föppl*[27]) gegeben. Die beiden ersteren benutzen hierzu nicht die erste Variation der Formänderungsarbeit, sondern beweisen, dass die Formänderungsarbeit für das wirklich eintretende Gleichgewichtssystem einen kleineren Wert annimmt als für jedes andere. *Weingarten* betrachtet den Fall, in dem Verschiebungen der Stützpunkte stattfinden, als den allgemeinen und gewinnt den Satz von der kleinsten Arbeit als besonderen Fall.

A. Föppl[27a]) beleuchtet den Zusammenhang des Satzes von der kleinsten Arbeit mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen. Er bemerkt, dass die Gleichung *G. Kirchhoffs* (vgl. oben Gleichung (10)) in der für den Fall der Isotropie gültigen Form eine gewisse Verallgemeinerung des dritten Satzes *Castiglianos* darstelle. Man kann diese Aussage dahin erweitern, dass die auf den allgemeinen Fall eines anisotropen Körpers bezügliche Gleichung *Kirchhoffs* den allgemeinen analytischen Ausdruck der drei *Castiglianos*chen Sätze darstellt. Da der virtuelle Verschiebungszustand nur an die Bedingungen des Systems gebunden, im übrigen aber vollkommen willkürlich ist, kann man bestimmte Verschiebungszustände in geeigneter Weise näher kennzeichnen. Je nach der so gekennzeichneten Variation der Formänderungsarbeit drückt die Gleichung (10) unmittelbar einen der drei Sätze aus.

Die *Kirchhoff*sche Gleichung zeigt auch den Zusammenhang des Satzes von der kleinsten Arbeit mit dem Prinzip *Lagranges* vom *Minimum der potentiellen Energie.* Dies Prinzip ist identisch mit der Aussage der Gleichung (10), welche von *G. L. Dirichlet*[28]) und *Kirchhoff* mit Hilfe des Satzes von der Erhaltung der Kraft bestimmt ist. Haben nämlich die äusseren Kräfte ein Potential, welches nur eine Funktion der Koordinaten ist, dann ist die Stabilität einer Gleich-

stischer Systeme und seine Verwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben, Zeitschr. des Architekten- u. Ing.-Vereins zu Hannover 28 (1882), S. 63.

26) *A. E. H. Love,* A treatise on the mathematical theory of elasticity, 2 vols, Cambridge 1892, 1893; 2. ed. ebd. 1906, deutsch von *A. Timpe,* Leipzig 1907, S. 202. *J. Weingarten,* Über den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit, Archiv d. Math. u. Phys. (3) 2 (1902), S. 233.

27) *A. Föppl,* Vorlesungen über technische Mechanik. Bd 5: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie, Leipzig 1907, S. 282ff.

27a) *A. Föppl,* ebd., S. 268ff.

28) *P. G. Lejeune-Dirichlet,* Über die Stabilität des Gleichgewichts, J. f. Math. 32 (1846), p. 85 und *G. Kirchhoff,* Vorlesgn. über mathem. Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig 1876, S. 34 u. 393.

gewichtslage an die Bedingung

$$U - \int \varphi \, dv = \text{Maximum}$$

gebunden. Diese Bedingung aber ergiebt das Minimum der Formänderungsarbeit, sofern nur solche Variationen in Betracht gezogen werden, welche mit konstantem U verbunden sind.

11. Die Kritik der Sätze Castiglianos. Gegen die Sätze *Castiglianos* sind von *O. Mohr* und später von *J. Weingarten* eine Reihe von Einwänden erhoben worden, die weiterhin zu einem lebhaften Meinungsstreit geführt haben. Die Fassung der Sätze erscheint allerdings nicht ganz einwandfrei, jedenfalls ist ihr wohl ein Teil der geltend gemachten Bedenken zur Last zu legen. Die Sätze enthalten keine der einschränkenden Voraussetzungen, an welche ihre Gültigkeit gebunden ist. Sodann ist der Begriff der Deformationsarbeit nicht eindeutig gefasst. Im zweiten Satz wird diese als Funktion der äusseren Kräfte dargestellt, sie hat also für eine bestimmte Belastung auch einen bestimmten Wert. Diese Auffassung entspricht der vor *Castigliano* üblichen. Vgl. *G. Lames*[1]) und *Grashoffs*[12]) Definition. Abweichend hiervon definiert *Castigliano* im Satz von der kleinsten Arbeit die Deformationsarbeit als Funktion der durch $3k - 6$ Gleichungen untereinander verbundenen Spannkräfte. Damit stellt er sie als Funktion der äusseren Kräfte und der statisch unbestimmten Grössen dar und erhält für eine bestimmte Belastung eine Mannigfaltigkeit von Werten. Dieser zweiten Auffassung entspricht gemäss einer Bemerkung *A. Hertwigs*[29]) die Deformationsarbeit eines statisch bestimmten Hauptsystems, in welches das betrachtete System übergeht, wenn die überzähligen Stäbe durchnitten und auf beiden Ufern des Schnittes diejenigen statisch unbestimmten Grössen als äussere Kräfte angebracht werden, welche die Wirkung eines Ufers des Schnittes auf das andere ersetzen. *H. Müller-Breslau*[30]) zeigt, dass man dieselbe Auffassung der Deformationsarbeit zweckmässig auch im zweiten Satze zugrunde legt. Es wäre natürlich auch möglich, in beiden Sätzen der Formänderungsarbeit die früher gebräuchliche Bedeutung beizulegen und ihren analytischen Ansatz einer Variation zu unterwerfen, ohne Rücksicht darauf, ob diese mit den Bedingungen des Systems verträglich ist oder nicht.

---

29) *A. Hertwig,* Zu den Bemerkungen usw., Zeitschr. f. Architektur- u. Ingenieurwesen 53 (1907), S. 374.

30) *H. Müller-Breslau,* Zu dem Artikel: Über die Elastizität der Deformationsarbeit, Civilingenieur 32 (1886), S. 553 und Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, S. 54.

Indessen muss betont werden, dass durch diese Unstimmigkeiten des Ausdrucks der Inhalt der *Castigliano*schen Sätze in keiner Weise berührt wird. Den Sinn seiner Methode hat *A. Castigliano* in dem angeführten Werk klar und in jeder Hinsicht einwandfrei dargestellt und damit eine folgerichtige Weiterentwicklung der Lehre vom elastischen Potential gegeben. In praktischer Beziehung haben sich die Sätze in zahlreichen Fällen als wertvolles Rüstzeug erwiesen. *H. Müller-Breslau* bezeichnet sie mit Recht als Grundpfeiler der gegenwärtigen Theorie der statisch unbestimmten Systeme. Im übrigen sei in der Streitfrage für und wider *Castigliano* auf die in der Fussnote [31]) verzeichnete Literatur verwiesen.

12. Ergänzungen zu den Sätzen Castiglianos. *J. Melan* [32]) untersucht die Stellung des Prinzips der kleinsten Arbeit in dem Falle, dass die Stäbe eines *Fachwerks* eine Temperaturänderung um t^0 gegenüber der des spannungslosen Anfangszustandes erfahren. Er findet, wie auch schon *Castigliano* [33]) selbst, dass dann nicht die Formänderungsarbeit, sondern die Funktion

$$\frac{1}{2}\sum S^2\varrho + \sum S\varepsilon t s$$

31) *O. Mohr,* Über das sogenannte Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit, Wochenblatt f. Architekten u. Ingenieure 5 (1883), S. 171; *H. Müller-Breslau,* Noch ein Wort über das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit, ebd. 5 (1883), S. 275; *O. Mohr*, Über das Prinzip der kleinsten ideellen Deformationsarbeit, ebd. 5 (1883), S. 299; *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Civilingenieur 31 (1885), S. 289; *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, p. 188 (Anmerkung); *O. Mohr,* Über die Elastizität der Deformationsarbeit, Civilingenieur 32 (1886), S. 395; *H. Müller-Breslau,* Zu dem Artikel über die Elastizität der Deformationsarbeit, ebd. S. 553; Kritische Bemerkungen von *F. Kötter,* Jahrb. f. d. Fortschritte d. Mathematik 18 (1886), S. 952; *O. Mohr,* Abhandlgn. aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, S. 383; *J. Weingarten,* Rezension der Vorlesungen über technische Mechanik von *A. Föppl,* Archiv d. Math. u. Phys. (3) 1 (1901), S. 342; ders., Über den Satz vom Minimum der Deformationsarbeit, ebd. (3) 2 (1902), S. 233; *G. C. Mehrtens,* Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre, Leipzig 1903—1905; *A. Hertwig,* Die Entwickelung einiger Prinzipien in der Statik der Baukonstruktionen und die Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre von *G. C. Mehrtens,* Zeitschr. f. Architektur- u. Ingenieurwesen 52 (1906), S. 493; vgl. auch die Erwiderungen von *G. C. Mehrtens* und *J. Weingarten* auf die vorstehende Abhandlung, ebd. 53 (1907), S. 107, 367, 372, 374.

32) *J. Melan*, Beitrag zur Berechnung eiserner Hallengesperre, Wochenschrift d. österr. Ing. u. Arch.-Vereins 35 (1883), p. 149 u. 162. *J. Melan,* Über den Einfluß der Wärme auf elastische Systeme, ebd. 35 (1883), p. 183 u. 202.

33) *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, p. 304.

durch die wirklich eintretenden Spannkräfte zu einem Minimum gemacht wird. Zu diesem Ergebnis gelangt er, indem er an den Endpunkten jedes einer Temperaturänderung unterworfenen Stabes zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte gleicher Grösse anbringt, welche den Einfluss der Temperaturänderung ersetzen. Anstatt des Falles der Temperaturänderung bietet sich dann der Fall des durch äussere Kräfte belasteten Systems, welches im unbelasteten Zustand spannungslos ist, der Untersuchung dar.

H. Müller-Breslau[34]) führt für *elastische Körper isotroper Struktur*, deren Temperaturzustand in einem Punkte eine Änderung um t^0 gegenüber der Temperatur des spannungslosen Anfangszustandes erfährt, die Funktion

(25) $$A_i = A + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, \varepsilon t dv$$

ein und bezeichnet sie als *ideelle Formänderungsarbeit.* Im Falle des biegungsfesten Stabes ist mit $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$$\int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, \varepsilon t dv = \int N_x \varepsilon t ds,$$

sofern t innerhalb des Querschnittes konstant bleibt, und

(26) $$\int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\, \varepsilon t dv = \int N_x \varepsilon t_0 ds + \int \frac{M}{h} \varepsilon \Delta t ds,$$

sofern die Temperaturänderung dem Gesetz $t = t_0 + \Delta t \frac{z}{h}$ (siehe unten Nr. **15**) folgt. Für das *Fachwerk* setzt er

(27) $$A_i = A + \sum S \varepsilon t s,$$

also den Ausdruck *Melans*. Damit tritt also im Falle, dass die Deformation eines durch beliebige äussere Kräfte belasteten Systems unter Temperaturänderungen stattfindet, in den Sätzen *Castiglianos* die ideelle Formänderungsarbeit an die Stelle der Formänderungsarbeit.

Erfährt der Angriffspunkt eines *statisch unbestimmten Stützenwiderstandes* X die Verschiebung δ_x, wobei die Reaktionen X die virtuelle Arbeit

$$\sum X \delta_x = L$$

leisten, so ist die Funktion

(28) $$A_i - L$$

34) *H. Müller-Breslau*, Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper, Berechnung der Formänderungen, Wochenblatt f. Architekten u. Ingenieure 6 (1884), S. 373; der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit, Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 30 (1884), S. 211.

an Stelle der Formänderungsarbeit in die Sätze *Castiglianos* einzuführen.

Den Beweis beider Aussagen stützt *Müller-Breslau* auf das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

F. Engesser[35]) führt unter der Bezeichnung *erweiterte Formänderungsarbeit* einen Ansatz ein, welcher der Auffassung *Weingartens* von der Deformationsarbeit bei nicht-isothermer Deformation entspricht. Er erhält, indem er nach dem Vorgang *Melans* den Einfluss der Wärme auf die Längenänderungen durch fingierte äussere Kräfte ersetzt, für das Fachwerk

$$A_e = \sum \frac{(S + E\varepsilon t F)^2 s}{2EF}$$

und zeigt, dass die Beziehungen $\frac{\partial A_e}{\partial X} = 0$ bestehen. Die „erweiterte Formänderungsarbeit" unterscheidet sich von der „ideellen Formänderungsarbeit" nur durch ein konstantes Glied, welches zur Folge hat, dass erstere immer positiv ist, während letztere auch negative Werte annehmen kann. Bezeichnet e die gesamte Dehnung und V den Rauminhalt eines Stabes, so ist

$$D = A_e = \sum \frac{EVe^2}{2}.$$

Engesser nennt D die *Dehnungsfunktion* und spricht den Satz aus: „Für den wirklichen Gleichgewichtszustand ist die Summe der Dehnungsquadrate ein Kleinstwert."

13. Verallgemeinerungen der Sätze Castiglianos. *J. Weyrauch*[36]) vergleicht die Variation der wirklichen Formänderungsarbeit A, für welche er die Bezeichnung *Verschiebungsarbeit* vorschlägt, mit der Variation der virtuellen Formänderungsarbeit A_v, welche durch den Ansatz

$$A_v = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z)\, d\tau$$

definiert ist. Jede beliebige mit den Bedingungen des Systems verträgliche Variation der virtuellen Formänderungsarbeit ist gegeben durch die Gleichung

$$\delta A_v = \delta_v A_v + \delta_s A_v,$$

wo die Indizes v und s bei den δ andeuten sollen, dass die Variation bei konstanten Spannungen bzw. konstanten Verschiebungen zu bilden

35) *F. Engesser,* Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme, Zentralblatt der Bauverwaltung 1907, S. 606.

36) *J. Weyrauch,* Theorie elastischer Körper, Leipzig 1884, S. 108.

ist. Es ist also

$$\delta_v A_v = \int (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) dv.$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich δA (vgl. Gleichung (13)).

Andererseits ist

$$\delta_s A_v = \int (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_x \delta \tau_x + \gamma_y \delta \tau_y + \gamma_z \delta \tau_z) dv.$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (Gleichung (7)) ist dieser Ausdruck aber gleich $\delta_s U + \delta_s R$. U bezeichnet die Arbeit der statisch unbestimmten Reaktionen, R die Arbeit der Flächenkräfte auf die Umhüllungsflächen sämtlicher etwa vorhandener Unstetigkeitsschnitte für die Verrückungen, $\delta_s U$ und $\delta_s R$ die Variationen dieser Arbeiten, welche der Variation der Spannungen entsprechen.

Es ergeben sich somit die Gleichungen:

(29) $$\delta A_v = \delta A + \delta_s U + \delta_s R$$

für *feste elastische Körper*, und

(30) $$\delta A_v = \delta A + \delta_s U$$

für das *Fachwerk*, sofern man hier Unstetigkeiten ausschließt. Verschwinden die Variationen $\delta_s U$ und $\delta_s R$, so wird

(31) $$\delta A_v - \delta A = 0.$$

Über die Beziehungen zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten sind Voraussetzungen nicht getroffen; die Gleichungen gelten also ganz allgemein sowohl für Temperaturänderungen als für ein beliebiges Elastizitätsgesetz. Die Gleichungen (29) und (30) stellen daher den allgemeinsten analytischen Ausdruck des Prinzips der kleinsten Arbeit dar.

Als besondere Fälle entwickelt *Weyrauch*[37]) für verschiedene Systeme diejenigen Ausdrücke, welche durch die wirklich eintretenden Spannungen zu einem Minimum gemacht werden.

Im wesentlichen denselben Weg geht *F. Engesser*[38]). Er beweist zunächst, dass der Satz von der kleinsten Arbeit bei isothermer Deformation nur gilt, wenn das Elastizitätsgesetz durch die Beziehung

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{1}{C} \cdot \sigma^n$$

gegeben ist. Um zu einem allgemeinen Gesetz zu gelangen, führt

37) *J. Weyrauch*, Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme, Wochenblatt f. Architekten u. Ingenieure 6 (1884), S. 290.

38) *F. Engesser*, Über statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungsgesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit, Zeitschrift d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 35 (1889), p. 733.

Engesser die Differenz der virtuellen und der wirklichen Formänderungsarbeit ein und bezeichnet sie als *Ergänzungsarbeit B.* Es ist für das *Fachwerk:*

$$B = A_v - A = \sum S\Delta s - \sum \int_0^{\Delta s} S d\Delta s,$$

oder durch partielle Integration des zweiten Terms

$$(32) \qquad B = \sum \int_0^S \Delta s\, dS.$$

Erfahren die Angriffspunkte der statisch unbestimmten Stützenwiderstände keine Verschiebungen, so folgt aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen (vgl. Nr. **34**) die Gleichung

$$\sum \frac{\partial S}{\partial X} \Delta s = 0,$$

mithin gilt die Beziehung

$$(33) \qquad \frac{\partial B}{\partial X} = 0.$$

Engesser formuliert dies Gesetz so: „Die überzähligen Grössen X eines statisch unbestimmten Fachwerkes nehmen diejenigen Werte an, welche die Ergänzungsarbeit der gesamten Konstruktion zu einem Kleinstwerte machen."

Es ist ersichtlich, dass der Satz mit *Weyrauchs* Satz (Gleichung (31)) übereinstimmt.

In derselben Weise ergiebt sich der Satz von der Abgeleiteten der Ergänzungsarbeit:

$$(34) \qquad \frac{\partial B}{\partial Q_m} = \delta_m.$$

Für *feste elastische Körper* ist die Ergänzungsarbeit

$$(35) \quad B = \int dv \int_0^{\sigma_x \sigma_y \cdots} (\varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \varepsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z).$$

Für sie gelten dieselben Sätze wie für die Ergänzungsarbeit des Fachwerks.

Verrichten die statisch unbestimmten Reaktionen X die virtuelle Arbeit $X\delta_x$, so tritt die Funktion

$$B - \sum \int_0^X \delta_x dX$$

an die Stelle der Ergänzungsarbeit. Den Sätzen von der Ergänzungsarbeit kommt die gleiche allgemeine Gültigkeit zu wie den Gleichungen *Weyrauchs.*

II. Formulierung des Problems der Statik des Fachwerks und der vollwandigen Systeme und ein allgemeiner Ansatz zur Lösung des Spannungsproblems.

14. Die Grundgleichungen der Statik des Fachwerks. Wird der in Nr. 3 besprochene Zusammenhang zwischen dem Prinzip der virtuellen Verrückungen und den Gleichgewichtsbedingungen beachtet, so ist ersichtlich, dass immer die Forderung, dass in jedem Punkte eines Systems Gleichgewicht bestehe, als Ausgangspunkt der Behandlung statischer Probleme ohne Rücksicht auf andere Grundprinzipien gewählt werden kann.

Das *Problem der Fachwerktheorie* beruht dann auf zwei Gruppen von Gleichungen (siehe *M. Levy*[39]), *A. Castigliano*[40]) und *H. Müller-Breslau*[41]).

Dies sind erstens *die Gleichgewichtsbedingungen*:

$$
\begin{aligned}
Q_{xm} + \sum S \cos\alpha &= 0,\\
(36) \qquad Q_{ym} + \sum S \cos\beta &= 0,\\
Q_{zm} + \sum S \cos\gamma &= 0,
\end{aligned}
$$

deren drei bzw. in der Ebene zwei für jeden Knotenpunkt bestehen; zweitens *die geometrischen Bedingungen des Systems*, deren eine für jeden Stab gilt:

$$
(37) \qquad \Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i)\cos\alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i)\cos\beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i)\cos\gamma_{ik}.
$$

Von den Verschiebungskomponenten der Knotenpunkte sind diejenigen der Stützpunkte als gegeben anzunehmen, da sie meistens nur geschätzt oder durch Beobachtung bestimmt werden können. Sie werden *Auflagerbedingungen* genannt. Unter der Voraussetzung, dass keine Reibungswiderstände auftreten, ist die Anzahl der für einen Stützpunkt gegebenen Verschiebungskomponenten ebenso gross wie die Zahl der an ihm auftretenden unbekannten Reaktionen C. Entsprechend der Anzahl der Komponenten einer unendlich kleinen Bewegung eines starren Körpers sowie der für diesen bestehenden Gleichgewichtsbedingungen zwischen den angreifenden Kräften sind mindestens 6 bzw. 3 Auflagerbedingungen und ebensoviele Stützenreaktionen erforderlich.

---

39) *M. Levy,* La statique graphique et ses applications aux constructions, Paris 1874, p. 241 ff.

40) *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, p. 11.

41) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, Abt. 1, Leipzig 1892, p. 3.

Die Verbindung zwischen den beiden genannten Gruppen von Gleichungen stellt die auf experimenteller Grundlage beruhende Beziehung zwischen der Längenänderung und der Spannkraft sowie der Temperaturänderung des spannungslosen Anfangszustandes eines Stabes her. Im allgemeinen wird die *Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes* angenommen und gesetzt:

$$\Delta s_{ik} = S_{ik}\varrho + \varepsilon t s_{ik}. \tag{38}$$

Durch Einführung dieser Gleichung in die geometrischen Bedingungen erhält man dann die sogenannten *Elastizitätsbedingungen* des Fachwerkes.

Hat nun ein Fachwerk r Stäbe, k Knotenpunkte und a Auflagerbedingungen, so stehen $3k$ bzw. $2k$ Gleichgewichtsbedingungen, r Elastizitätsbedingungen, a Auflagerbedingungen zur Verfügung zur Berechnung der Unbekannten des Problems, nämlich der r Spannkräfte, a nach bestimmten Richtungen wirkenden Stützenwiderstände C, $3k$ bzw. $2k$ Verschiebungskomponenten der Knotenpunkte. Die Anzahl der Unbekannten ist also ebenso gross wie die Anzahl der Gleichungen. Letztere sind durchweg vom ersten Grade; sie lassen sich eindeutig auflösen, sobald ihre Nennerdeterminante einen von Null verschiedenen Wert besitzt, was im allgemeinen vorausgesetzt wird.

Daraus ergiebt sich *das Superpositionsgesetz,* welches in allgemeiner Weise *A. Castigliano*[42]), *O. Mohr*[43]) und *H. Müller-Breslau*[44]) gefolgert haben, nachdem es bereits von *J. Cl. Maxwell*[45]) angewendet worden ist: „Die Spannkräfte S, die Stützenwiderstände C und die Verschiebungskomponenten der Knotenpunkte Δx, Δy, Δz lassen sich als lineare Funktionen der Lasten, der Änderungen der anfänglichen Stabtemperaturen und der Verschiebungen der Stützpunkte darstellen."

Die Ableitung der Gleichung:

$$\sum Q_m \delta_m - \sum S \Delta s = 0$$

einmal aus den Gleichgewichtsbedingungen, ein zweites Mal aus den geometrischen Bedingungen zeigt, dass sie, rein mathematisch aufgefasst, den allgemeinen Ansatz zur Lösung beider Gruppen von Gleichungen

42) *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, p. 33.

43) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Civilingenieur 31 (1885), S. 289.

44) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, Abt. 1, Leipzig 1892, p. 5.

45) *J. Cl. Maxwell,* On the calculation of the equilibrium and stiffnes of frames, Phil. Mag. (4) 27 (1864), p. 294 = Scientific Papers 1, Cambridge 1890, p. 598.

darstellt. Das System der Eliminationsmultiplikatoren wird bei Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen durch ein Verschiebungssystem, bei Auflösung der geometrischen Bedingungen aber durch ein Belastungssystem geliefert. Darauf, dass diese Systeme meistens mit geringer Mühe aufgestellt werden können, beruht die Brauchbarkeit obiger Gleichung.

Besteht nun die Beziehung:

$$3k \text{ bzw. } 2k = r + a,$$

so bestimmen die Gleichgewichtsbedingungen allein eindeutig die Spannkräfte und Stützenwiderstände und ebenso die Elastizitätsbedingungen in Verbindung mit den Auflagerbedingungen die Verschiebungskomponenten der Knotenpunkte. Das Fachwerk ist also *statisch bestimmt* — *O. Mohr* bezeichnet es als *einfaches Fachwerk* — und *stabil.* Die Identität statisch und kinematisch bestimmter Fachwerke ist bereits in IV, 5 Nr. **31** und **40** (*L. Henneberg*) besprochen. Voraussetzung ist wieder, dass die Nennerdeterminante nicht verschwindet. Fälle einer verschwindenden Nennerdeterminante sind IV, 5 Nr. **39** und **44** angegeben. Anstatt der Ausrechnung der Nennerdeterminante werden zweckmässig besondere Methoden zur Untersuchung der Stabilität eines Fachwerkes verwendet. Besonders geeignet ist hierfür das kinematische Verfahren (siehe unten Nr. **22**).

Ist

$$3k \text{ bzw. } 2k > r + a,$$

dann ist Gleichgewicht im allgemeinen nicht möglich. Ferner ist eine oder mehrere der Verschiebungskomponenten willkürlich, das System besitzt eine oder mehrere *Bewegungsfreiheiten.* Für Bauwerke sind solche Systeme nicht geeignet, obwohl sie früher in einzelnen Fällen — unversteifte Hängebrücken — zur Ausführung gekommen sind. Immerhin haben diese Systeme infolge der kinematischen Methode noch theoretisches Interesse.

Ist drittens

$$3k \text{ bzw. } 2k < r + a,$$

so genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Spannkräfte und Stützenwiderstände nicht mehr. Andererseits sind in den Elastizitäts- und Auflagerbedingungen die Verschiebungskomponenten überbestimmt. Sie können also aus diesen eliminiert werden. Es ergeben sich so $r + a - 3k$ bzw. $r + a - 2k$ Gleichungen, welche als Unbekannte nur Stützenwiderstände und Spannkräfte enthalten und deren Berechnung in Verbindung mit den $3k$ bzw. $2k$ Gleichgewichtsbedingungen ermöglichen. Ein solches Fachwerk heisst *statisch unbestimmt, Mohr* bezeichnet es als *zusammengesetztes Fachwerk.* Es

enthält ein oder mehrere überzählige Konstruktionsteile, welche beseitigt werden können, ohne dass es die Stabilität verliert. Das nach Beseitigung der überzähligen Teile, welche auf verschiedene Weise erfolgen kann, verbleibende System hat gerade so viele Stäbe und Stützen als zur Sicherung der Stabilität erforderlich sind, es wird *statisch bestimmtes Hauptsystem* genannt. *Innerlich statisch unbestimmt* sind solche Systeme, welche überzählige Stäbe, aber keine überzähligen Stützen enthalten. Als *äusserlich statisch unbestimmt* werden im allgemeinen Systeme bezeichnet, welche überzählige Stützen haben. Doch ist der Begriff der äusseren statischen Unbestimmtheit nicht scharf umgrenzt, denn man kann immer statt einer Stütze auch einen Stab als überzählig ansehen.

15. Die Grundgleichungen der Statik fester elastischer Körper, insbesondere des einzelnen Stabes und der Stabwerke. Auch das Spannungs- und Verzerrungsproblem *fester elastischer Körper* ist auf der Grundlage zweier Gruppen von Gleichungen aufgebaut. Den Gleichgewichtsbedingungen des Fachwerks entsprechen die drei *durch die Oberflächenbedingungen ergänzten Spannungsgleichungen* (Gleichung (1) oben), den geometrischen Bedingungen folgende sechs Gleichungen:

$$(39)\quad \begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &&\varepsilon_y = \frac{dv}{\partial y}, &&\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, &&\gamma_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, &&\gamma_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

An Stelle der letzteren können auch die sechs *Kompatibilitätsbedingungen* — siehe Gleichung (13) in IV, 23 (*Müller-Timpe*) Nr. 3b — treten, welche die Bedingungen ausdrücken, denen die Verzerrungskomponenten genügen müssen, damit sie zu einem möglichen Verschiebungssystem gehören. Die Auflagerbedingungen und Stützenreaktionen unterliegen denselben Verhältnissen wie beim Fachwerk.

Die Verbindung der genannten Gleichungsgruppen wird wieder durch die auf experimenteller Grundlage beruhenden Beziehungen zwischen den Verzerrungs- und Spannungskomponenten sowie den Temperaturänderungen hergestellt. Bei *Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und isotroper Struktur* ist:

$$(40)\quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) + \varepsilon t, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right) + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) + \varepsilon t, \\ \gamma_x = \frac{1}{G}\tau_x, \quad &\gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y, \quad \gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z. \end{aligned}$$

G. Kirchhoff[46]) hat die Eindeutigkeit der Lösung des Problems aus den genannten Gleichungen unter Voraussetzung einfach zusammenhängender Körper für den Fall unendlich kleiner elastischer Verrückungen bewiesen. Danach ist der Spannungs- und Verschiebungszustand eines elastischen Körpers eindeutig festgelegt, wenn die Oberflächenspannungen gegeben und die Lage des Körpers durch sechs Auflagerbedingungen bestimmt ist. Die Annahme zweier möglicher Verschiebungssysteme hat nämlich eine dritte Möglichkeit in der Differenz der beiden ersten zur notwendigen Folge. Für die letztere aber ergiebt das Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichung:

$$\int \varphi\, dv = 0,$$

welche nur erfüllt werden kann, wenn alle Verzerrungskomponenten und somit bei Berücksichtigung der sechs Auflagerbedingungen auch die Verschiebungskomponenten verschwinden.

In der Statik der Baukonstruktionen hat die strenge Elastizitätstheorie kaum Anwendung gefunden. Vgl. indes oben Nr. **9** die Entwickelungen *A. Castigliano*s. Die Rücksicht auf die meist vorliegenden verwickelten Verhältnisse, welche der strengen Theorie für die Durchführung kaum zugänglich sind, hat zu geeigneten vereinfachenden Annahmen gezwungen. Eine Vereinfachung ergiebt sich ferner daraus, dass nur *Stäbe* vorkommen — wenigstens beschränkt sich die allgemeinen Theorie auf solche —, deren Querschnittsabmessungen sehr klein im Verhältnis zu ihrer Länge sind.

Für *gerade Stäbe* werden folgende Annahmen gemacht. Die Stabaxe falle mit der X-Axe zusammen, die Hauptträgheitsaxen der Querschnitte seien parallel zu der Y- und Z-Axe. Für jeden Punkt der Stabaxe sei die Resultierende aller auf einer Seite dieses Punktes an dem Stab angreifenden Kräfte durch ihre sechs Komponenten, nämlich die Längskraft N_x, die Querkräfte Q_y, Q_z, das Torsionsmoment M_x und die Biegungsmomente M_y, M_z bezogen auf die Stab- und die Hauptträgheitsaxen gegeben. Dann folgen aus der Forderung des Gleichgewichts sechs Gleichgewichtsbedingungen zwischen den genannten Komponenten und den Spannungskomponenten des zugehörigen Stabquerschnittes.

Für die *Spannungskomponenten* wird nun die *Navier*sche Annahme gemacht, nach welcher die Normalspannung σ_x in jedem Querschnitt

46) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 56 (1858), p. 291 = Ges. Abhandlungen, Leipzig 1882, p. 292 und Vorlesungen über mathematische Physik. 1. Mechanik, Leipzig 1876, 4. Aufl. 1897, p. 394.

eine lineare Funktion des Ortes ist, während σ_y, σ_z, τ_x verschwinden. Es wird also gesetzt:

$$\sigma_x = a + by + cz.$$

Diese Annahme stimmt mit den Ergebnissen der genauen Theorie im Falle der reinen Biegung (*St. Venant*[47]), *A. E. H. Love*[48])) überein. Mit ihrer Hilfe ergeben die genannten Gleichgewichtsbedingungen die *Normalspannung* σ_x als lineare Funktion der angreifenden Kräfte in der Gleichung:

$$(41) \qquad \sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y,$$

wo J_y und J_z die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts bezeichnen. Vgl. oben Nr. 9. Meist fallen die äusseren Kräfte in die Ebene einer Trägheitsaxe; wird diese als z-Axe gewählt, so wird

$$(42) \qquad \sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Das Torsionsmoment M_x verschwindet im allgemeinen, ferner werden die Schubspannungen in der allgemeinen Theorie meist vernachlässigt, da ihr Einfluss im Vergleich mit dem der Normalspannungen sehr klein ist. *A. Castigliano*[49]) weist das rechnerisch nach. Will man sie berücksichtigen, so muss man sich bei der Unsicherheit der Grundlage, welche die in der Praxis vorkommenden unstetigen Querschnittsformen der schärferen Theorie bieten, mit der Einführung mittlerer Werte begnügen.

Für die *mittlere Schubspannung* symmetrischer Querschnitte in der y-Axe findet *F. Grashof*[50]) den Wert:

$$(42\text{a}) \qquad \tau_y = \frac{Q_z}{J_y b_0} \int_0^{z \max} z \, dF,$$

wenn die Y- und Z-Axen mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen und b_0 die Breite des Querschnittes in der y-Axe ist (vgl. auch IV 27 *Th. v. Kármán* Nr. 2d, δ). *W. Ritter*[51]) leitet aus der Formänderungsarbeit eines Stabelementes, begrenzt von zwei benachbarten Quer-

47) *B. de Saint-Venant,* J. de math. (2) 1 (1856), p. 89.

48) *A. E. H. Love,* Lehrbuch der Elastizität, dtsch. von *A. Timpe,* Leipzig 1907, p. 153.

49) *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin 1879, p. 297.

50) *F. Grashof,* Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, p. 125 u. 214.

51) *W. Ritter,* Anwendungen der graphischen Statik, Teil 1, Zürich 1888, p. 146ff.

schnitten, die Schubspannung:

(42b) $$\tau_y = \frac{\varkappa Q_z}{F}$$

ab, welche als mittlerer Wert betrachtet die richtige Deformation der Stabaxe ergiebt. Hierin ist $\varkappa$ ein von der Querschnittsform abhängiger Koeffizient. Desselben Ansatzes bedienen sich nach ihm andere Autoren — *A. Zschetsche, W. Keck, R. Land, H. F. Müller-Breslau*[52]) —. Bei Doppel-T-Querschnitten wird nach *W. Ritters* Vorgang $\varkappa = \frac{F}{F_0}$ gesetzt, wenn F den ganzen Querschnitt, F_0 den des Steges bezeichnet.

Die *Formänderungskomponenten* sind durch das *Hooke*sche Gesetz gegeben:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon t, \quad \gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y, \quad \gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z.$$

Für die *Temperaturänderung* t wird die Annahme gemacht:

(42c) $$t = t_0 + \Delta t \frac{z}{h},$$

wo $\Delta t = t_1 - t_2$ den Unterschied der den äussersten Querschnittspunkten entsprechenden Temperaturänderungen und h die Höhe des Querschnitts bedeutet.

Gekrümmte Stäbe werden im allgemeinen in bezug auf die Spannungsverteilung und die Formänderung ebenso behandelt wie gerade, die Normalspannungen also nach Gleichung (41) oder (42) berechnet. Das rechtfertigt sich dadurch, dass der Krümmungshalbmesser meistens gross ist im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen. Eine Untersuchung *gekrümmter Stäbe* auf Grund der strengen Elastizitätstheorie ist von *G. Kirchhoff*[2]) und *A. Clebsch*[53]) durchgeführt. *In einer Ebene gekrümmte Stäbe* sind von *E. Winkler*[54]) und *H. Müller-Breslau*[55]) mit Hilfe der Annahme behandelt, dass die vor der Biegung ebenen Querschnitte auch nach der Biegung eben bleiben. *Winkler* findet

52) *A. Zschetsche,* Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung einfacher Vollwandträger, Zentralbl. d. Bauverwaltung 13 (1893), p. 386; *W. Keck,* Vorträge über Elastizitätslehre, Hannover 1893, p. 60; *R. Land,* Einfluß der Schubkräfte auf die Biegung statisch bestimmter und die Berechnung statisch unbestimmter gerader vollwandiger Träger, Zeitschr. f. Bauwesen 44 (1894), p. 611; *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, Abt. 2, Leipzig 1908, p. 10.

53) *A. Clebsch,* Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862, p. 229.

54) *E. Winkler,* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867, p. 268ff.

55) *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1986, 3. Aufl., ebd. 1904, p. 209.

die Normalspannung:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{Fr} + \frac{M_y r z}{W(r+z)}, \tag{43}$$

hierin ist r der Krümmungsradius und $W = \int \frac{r z^2}{r+z} dF$.

Die für jeden Punkt der Stabaxe bestehenden sechs Gleichgewichtsbedingungen sind vom ersten Grade. Das Gleiche gilt für die sechs Gleichungen (39) in bezug auf die Verschiebungskomponenten und Spannungskomponenten, sofern die Beziehungen zwischen den letzteren und den Verzerrungskomponenten linear sind. Unter dieser Voraussetzung gilt daher *das Superpositionsgesetz,* welches die lineare Abhängigkeit der Spannungs- und Verschiebungskomponenten sowie der Stützenreaktionen von den gegebenen Lasten, Temperaturänderungen und Stützenverschiebungen ausspricht, auch für *Stabwerke.*

Die *Kriterien der statischen Bestimmtheit und Stabilität* sind für das Stabwerk in derselben allgemeinen Weise wie für das Fachwerk nicht aufgestellt. Die Untersuchung der Frage wird in jedem Fall nach besonderen geeigneten Methoden durchgeführt. In bezug auf statisch unbestimmte Systeme gilt allgemein das Folgende. Träger einer statisch unbestimmten Grösse ist jeder überzählige Konstruktionsteil, durch dessen Beseitigung das System die Stabilität nicht verliert. Jeder überzählige Konstruktionsteil unterwirft das System einer Verschiebungsbedingung, welche der elastische Verschiebungszustand erfüllen muss. Letzterer ist durch die elastischen Formänderungen der Konstruktionsteile des statisch bestimmten Hauptsystems allein festgelegt, er ist also so vielfach überbestimmt, als statisch unbestimmte Grössen vorhanden sind. Mithin liefert er ebensoviele lineare Bedingungsgleichungen, welche in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen die Berechnung aller Spannungen und Stützenreaktionen ermöglichen.

16. Die Airysche Spannungsfunktion und Spannungsfläche ebener Kontinua. Einen besonders übersichtlichen Ansatz zur Lösung des *Spannungsproblems für ebene Kontinua* hat *G. B. Airy*[56]) durch die *Spannungsfunktion* gegeben. Die weitere Entwicklung des *Airy*schen Gedankens, seine Übertragung auf das ebene Fachwerk und schliesslich auch auf räumliche Systeme durch die Arbeiten von *J. Cl. Maxwell*[57]), sowie neuerdings *F. Klein* und *K. Wieghardt*[58]) hat der

56) *G. B. Airy,* On the strains in the interior of beams, Lond. Phil. Trans. 153 (1863), p. 49.

57) *J. Cl. Maxwell,* On the reciprocal figures and diagrams of forces, Phil.

Spannungsfunktion zu einer wichtigen Stellung in der Statik elastischer Systeme verholfen. Die folgende Darstellung des Gegenstandes ist nach der angeführten Veröffentlichung der letzteren gegeben.

Aus den beiden Spannungsgleichungen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

folgert *Airy* die Existenz einer Funktion F, welche durch die Gleichungen:

$$(44) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_z = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

gekennzeichnet ist. Sie kann in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen x, y-Ebene mit der Ebene des Kontinuums zusammenfällt, dargestellt werden durch die Fläche:

$$z = F(x, y).$$

Diese Fläche wird *Airy*sche *Spannungsfläche* genannt, sie ist unabhängig vom Koordinatensystem.

Als Randbedingungen für F ergeben sich aus den Gleichungen (1')

$$(44\text{a}) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{dx dy}\frac{dx}{ds} &= q_x \\ -\frac{\partial^2 F}{dx dy}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} &= q_y, \end{aligned}$$

wenn s die Bogenlänge auf dem Rande $x(s)$, $y(s)$ bedeutet und die Normale positiv nach außen gewählt wird. Diese Gleichungen lassen sich auch in der Form

$$(44\text{b}) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) &= q_x \\ -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) &= q_y \end{aligned}$$

anschreiben. Aus ihnen ergeben sich sofort für die *resultierenden Spannungen* T_x, T_y, M längs eines Bogenstückes ab des Kontinuums

---

Mag. (4) 27 (1864), p. 250 = Scientific Papers 1, Cambridge 1890, p. 574; On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress, Lond. Math. Soc. Proc. 2 (1868, ersch. 1869), p. 58 = Scientific Papers 2, Cambridge p. 102, On reciprocal figures, frames and diagrams of forces, Edinb. Roy. Soc. Trans. 26 (1872), p. 1 = Scientific Papers 2, Cambridge 1890, p. 161.

58) *F. Klein* u. *K. Wieghardt,* Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der *Maxwell*schen Arbeiten, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 8 (1904), p. 1 ff. u. 95 ff.

die Werte:

$$(45)\quad \begin{aligned} T_x &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_a, \\ T_y &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_a, \\ M &= \left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_b \\ &\quad - \left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} - F\right)_a. \end{aligned}$$

Hierbei sind also nach obiger Festlegung die Spannungen in ihrer Wirkung auf den Teil des Kontinuums, welcher links eines von a nach b Fortschreitenden liegt, dargestellt und positiv nach rechts gerechnet.

Eine ausgezeichnete Spannungsverteilung in einem Kontinuum ergiebt sich dann aus den Ansätzen (44b) bzw. (45), wenn die Spannungsfläche ein Teil einer abwickelbaren Fläche ist. In diesem Falle treten nur Längsspannungen auf, deren Richtung in die Projektion der Erzeugenden fällt, während die Schubspannungen verschwinden. Fasst man die Spannungsfläche als eine Streifenfolge auf, so ist längs des einzelnen Streifens die Grösse der Längsspannungen konstant, aber im allgemeinen natürlich von Streifen zu Streifen veränderlich.

Diese Eigenschaft ist z. B. von Bedeutung, wenn es sich darum handelt, die oben gegebenen Randbedingungen geometrisch zu deuten. Ist der Rand des Kontinuums — die Betrachtung ist aus Rücksicht auf die Klarheit der Darstellung auf einfach zusammenhängende Bereiche beschränkt — wieder dadurch gegeben, dass die Koordinaten seiner Punkte Funktionen der Bogenlänge sind, und wird die auf ein Element ds kommende äussere Kraft

$$q_x ds,\ q_y ds,\ m ds = (yq_x - xq_y)ds$$

durch die Funktionen

$$q_x = \varphi(s),\quad q_y = \psi(s),\quad m = \chi(s)$$

gegeben, so ist

$$(46)\qquad -\psi(s)x + \varphi(s)y - \chi(s) = 0$$

die Gleichung der Geraden, in welche die Kraftrichtung fällt. Der Einfachheit halber seien die Funktionen $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\chi(s)$ so gewählt, dass die Kraftrichtungen sich im äusseren Bereich nicht schneiden. Das System der äusseren Kräfte kann dann betrachtet werden als ein Spannungssystem in einem Kontinuum, welches sich im Anschluss an den Rand nach aussen erstreckt und nur Längsspannungen der durch Gleichung (46) bezeichneten Richtung aufweist. Dies Spannungs-

system wird durch eine abwickelbare Fläche dargestellt, für welche die Gleichungen

$$(47)\qquad \begin{aligned} z &= -\int_0^s \psi(s)ds\,x + \int_0^s \varphi(s)ds\,y - \int_0^s \chi(s)ds + ax + by + c \\ 0 &= -\psi(s)x + \varphi(s)y - \chi(s) \end{aligned}$$

gefunden werden. Die Fläche ist bis auf die willkürlich hinzugefügte Ebene

$$z = ax + by + c$$

eindeutig festgelegt. Sie ist in sich geschlossen, da für das Kraftsystem die Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \varphi(s)ds = 0, \quad \int \psi(s)ds = 0, \quad \int \chi(s)ds = 0$$

integriert über den ganzen Rand bestehen.

Dass die abwickelbare Fläche dem betrachteten Spannungssystem entspricht, wird sofort ersichtlich, wenn man mit Hilfe der Formeln (45) die für das beliebige Stück $s_0 - s_1$ durch die Fläche definierten resultierenden Spannungskomponenten ansetzt und die Übereinstimmung der Gleichung der zur x, y-Ebene senkrechten Ebene der Erzeugenden mit der Gleichung (46) beachtet.

Nun besagen die Randbedingungen (44b), dass die so konstruierte abwickelbare Fläche längs der Raumkurve, welche sie mit dem über dem Rande stehenden Vertikalzylinder gemeinsam hat, die Koordinaten und Tangentialebenen auch für denjenigen Teil der Spannungsfläche bestimmt, welcher die Spannungen für das Innere des Bereiches kennzeichnet. Im übrigen hängt der Verlauf der für das Innere des Bereiches geltenden Spannungsflächen von den besonderen Elastizitätsverhältnissen ab. Um hier die für die Funktion F geltende Bedingung, die *G. B. Airy* selbst übersehen hatte, zu gewinnen, kann man entweder die Kompatibilitätsbedingungen oder auch das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit heranziehen. Für die *homogene isotrope Platte* erhält man auf beiden Wegen die Differentialgleichung vierter Ordnung[59])

$$\nabla\nabla F = 0, \qquad \text{wo } \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ ist.}$$

F. Klein formuliert das Endresultat folgendermassen:

„Um die Spannungsverteilung zu finden, welche in einer einfach zusammenhängenden, homogenen elastisch-isotropen Platte durch ein

59) *É. Mathieu*, Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\nabla\nabla u = 0$ et sur l'équation d'élasticité d'un corps solide, J. de math. (2) 14 (1869), p. 378.

am Rande angreifendes Gleichgewichtssystem von Kräften erzeugt wird, konstruiere man zunächst diejenige, bis auf eine beliebig hinzuzufügende Ebene völlig bestimmte abwickelbare Fläche, welche Spannungsfläche der durch das Kraftsystem definierten Streifenfolge ist, und sodann diejenige Fläche, welche sich über dem Plattenrand überall ohne Knick an diese abwickelbare Fläche anschliesst und über dem Inneren der Platte überall die Differentialgleichung $\nabla\nabla z = 0$ befriedigt. Ist $z = F(x, y)$ diese Fläche, so sind die gesuchten Spannungen selbst durch die Gleichungen (44) gegeben."

Die Lösung der Aufgabe für mehrfach zusammenhängende Platten wird in der angezogenen Arbeit[58]) kurz erörtert.

Nach dieser Methode hat insbesondere *A. Timpe*[59a]) zahlreiche Beispiele durchgearbeitet.

17. Das Spannungspolyeder des ebenen Fachwerks. Für ein *ebenes Fachwerk* gewinnt die Spannungsfläche Bedeutung durch die Formeln (45) für die resultierenden Spannungen längs eines Bogenstückes. Die *Airy*sche Fläche verwandelt sich in das bekannte *Maxwell*sche *Polyeder* (vgl. IV 5, Nr. **12** *Henneberg*), und es ist eben dies der Weg, auf dem *Maxwell* sein Polyeder gefunden hat. *K. Wieghardt* hat zwischen diesem Polyeder und der Spannungsfläche eines Kontinuums die völlige Analogie herausgearbeitet. Er zeigt, dass das Bestehen der Gleichgewichtsbedingungen eines Fachwerks völlig gleichbedeutend ist mit dem Bestehen einer Spannungsfläche. Aus Rücksicht auf die Einfachheit der Darstellung werden nur solche Fachwerke behandelt, deren Elemente sich nirgends kreuzen oder überdecken. Die äusseren Kräfte mögen nur an den Knotenpunkten des Umrisspolygones angreifen. Von den beiden Halbstrahlen, in welche die Richtungslinie einer Kraft durch ihren Angriffspunkt zerlegt wird, soll der eine immer das Fachwerksgebiet durchsetzen, der andere nicht, und die Halbstrahlen der letzteren Art sollen sich gegenseitig nirgends schneiden.

Über einem ebenen Fachwerk lässt sich dann immer eine Facettenfläche konstruieren, welche aus lauter nebeneinanderliegenden ebenflächigen Polygonen so zusammengesetzt ist, dass die Projektion ihrer Kanten auf die Ebene des Fachwerks gerade dessen Stäbe ergiebt. An diese Facettenfläche lässt sich weiter eine in sich geschlossene Polyederzone dadurch anheften, dass durch jede Kante ihres Umrisspolygones eine Ebene gelegt wird, welche mit der Ebene des Fach-

---

59a) *A. Timpe*, Diss. Göttingen 1905 = Zeitschr. f. Math. u. Phys. 52 (1905), p. 348.

werks einen von 90^0 verschiedenen Winkel einschliesst. Die Kanten, in welchen sich zwei aufeinanderfolgende dieser Ebenen schneiden, sollen ferner projiziert auf die Fachwerksebene den oben für die Richtungslinien der äusseren Kräfte genannten Bedingungen genügen. So entsteht eine stetige, die Ebene einfach überwölbende Fläche. Ihre zweiten Differentialquotienten sind entweder Null (in den Facetten und Streifen) oder unendlich gross (in den Kanten), *Airys* Ansatz leistet hier also unmittelbar nichts. Dagegen sind die ersten Differentialquotienten überall endlich, sie sind gleich gross innerhalb ein und derselben Facettenfläche oder Streifens der Polyederzone und unstetig in den Kanten. Infolgedessen kennzeichnet die Fläche vermöge der Formeln (45) ein Spannungssystem, welches unter dem Einfluss bestimmter äusserer Kräfte in den projizierten Kanten wirksam ist und sich im Gleichgewicht befindet. Die Kanten, in welchen sich zwei aufeinanderfolgende Ebenen der Polyederzone schneiden, entsprechen den Kräften eines äusseren Gleichgewichtssystems, da die Polyederzone in sich geschlossen ist.

Umgekehrt werde nun von einem unter äusserem Kraftangriff im Gleichgewicht befindlichen Fachwerk ausgegangen, und ein Knotenpunkt betrachtet, indem er zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystemes gemacht wird. Sind X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3; ...; X_n, Y_n die Komponenten der Spannkräfte in den am Knotenpunkt zusammenstossenden Stäben, so kann über der x, y-Ebene um den Knotenpunkt herum eine aus ebenen Facetten bestehende Fläche konstruiert werden, welche durch folgende Gleichungen dargestellt wird:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad z = \alpha x + \beta y + \gamma,\\
&2)\quad z = -Y_2 x + X_2 y + \alpha x + \beta y + \gamma,\\
&3)\quad z = -(Y_2 + Y_3)x + (X_2 + X_3)y + \alpha x + \beta y + \gamma.\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(48)\quad &i)\quad z = -\Big(\sum_2^i Y_i\Big)x + \Big(\sum_2^i X_i\Big)y + \alpha x + \beta y + \gamma,\\
&n)\quad z = -\Big(\sum_2^n Y_i\Big)x + \Big(\sum_2^n X_i\Big)y + \alpha x + \beta y + \gamma =\\
&\qquad\qquad = + Y_1 x - X_1 y + \alpha x + \beta y + \gamma.
\end{aligned}
$$

Von diesen n Ebenen ist die erste willkürlich. Je zwei aufeinanderfolgende schneiden sich in einer Kante, deren Projektion mit dem entsprechenden Stab zusammenfällt, und definieren vermöge des *Maxwell*schen Ansatzes die Spannkraft dieses Stabes. Da Gleich-

gewicht an dem Knotenpunkt besteht, also $\sum_1^n X_i$ und $\sum_1^n Y_i$ verschwindet, stellen die Gleichungen eine zyklische Folge von n Facetten dar, welche in sich geschlossen ist.

So besteht für jeden Knotenpunkt des Fachwerks ein Stück Spannungsfläche mit einer willkürlichen Ebene. Durch geeignete Wahl der letzteren kann man von Knotenpunkt zu Knotenpunkt fortschreitend alle diese Stücke zu einer einheitlichen Fläche zusammenfügen, so dass man schliesslich eine die ganze Ebene einfach überwölbende einwertige Spannungsfläche erhält. *Wieghardt* formuliert das Ergebnis so: „Für ein ebenes Fachwerk, welches aus lauter glatt nebeneinander liegenden Polygonen zusammengesetzt ist, dessen Knotenpunkte reibungslos gelenkig sind und an welchen äussere Kräfte der beschriebenenen Art in den Knotenpunkten des Umrisspolygons wirken, ist das Bestehen der Gleichgewichtsbedingungen völlig äquivalent mit der Existenz einer stetigen und überall einwertigen Spannungsfläche der beschriebenen Art. Diese Spannungsfläche besteht aus einer Polyederzone, deren Kanten projiziert die Aktionslinien des Kräftesystems ergeben, und aus einer Facettenfläche, deren Kanten projiziert, die Stäbe des Fachwerks liefern." Man erkennt die volle Analogie, welche zwischen der Polyederzone bzw. Facettenfläche einerseits und der abwickelbaren Fläche bzw. Spannungsfläche eines Kontinuums andererseits besteht.

Die Anwendung auf ein Fachwerk, welches aus lauter Dreiecken so zusammengesetzt ist, dass es eine Reihe innerer Knotenpunkte aufweist, führt zu dem Resultat, dass man so viele Spannungsflächen konstruieren kann, als innere Knotenpunkte vorhanden sind. Ebenso gross ist also der Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems. Unter diesen unendlich vielen Spannungspolyedern ist ein bestimmtes durch die Elastizitätsverhältnisse der Stäbe gegeben.

Unter der Annahme der Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes sucht *K. Wieghardt*[60]) die statische Unbestimmtheit des Problems durch eine Differenzengleichung $\Omega = 0$ zu beheben, welche das Elastizitätsgesetz des betrachteten Fachwerks ausdrückt und somit ein Analogon zu der Differentialgleichung $\nabla\nabla z = 0$ der Spannungsfläche des homogenen elastisch-isotropen Kontinuums liefert. Er verfolgt dabei ins-

60) *K. Wieghardt,* Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen 85 (1906), p. 139.

besondere den Zweck, aus der Spannungsfläche einer elastisch-isotropen Platte auf die eines entsprechenden engmaschigen Fachwerks zu schliessen, in der Vermutung, dass bei immer weiter getriebener Engmaschigkeit die eine in die andere übergehe. Damit das der Fall ist, muss die Gleichung $\Omega = 0$ in der Grenze in die Gleichung $\nabla\nabla z = 0$ übergehen. *K. Wieghardt* untersucht verschiedene Anordnungen von Fachwerken in dieser Richtung und findet, dass der fragliche Grenzübergang nur bei regelmässigen Dreieckfachwerken, welche er elastisch-isotrope Dreieckfachwerke nennt, stattfindet. Darunter werden Fachwerke verstanden, welche aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt und von einem sich selbst nicht durchsetzenden, geschlossenen, aus lauter Dreieckseiten bestehenden Vieleck umgrenzt werden. Das Ergebnis ist eine Gleichung, welche die Beziehung des Ausdruckes Ω zu dem Ausdruck $\nabla\nabla z$ darstellt. Diese Gleichung beweist einerseits die Möglichkeit des fraglichen Grenzüberganges, sie giebt andererseits ein Mass für die Grösse der Abweichung bei endlicher Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke. Die Möglichkeit des Grenzüberganges ergiebt sich übrigens auch losgelöst vom Begriff der *Airy*schen Spannungsfunktion, wenn die Spannungen einer elastisch-isotropen Platte als Grenzwerte der Fachwerksspannungen aufgefasst werden.

In gewissen Fällen erweist es sich ferner als möglich, das Spannungspolyeder eines elastisch-isotropen Fachwerkes bei beliebig grosser Seitenlänge der Dreiecke aus der Spannungsfläche der elastisch-isotropen Platte zu gewinnen, indem durch die z-Koordinaten der letzteren in den Knotenpunkten die entsprechenden Koordinaten einer Facettenfläche bestimmt werden. Das ist dann der Fall, wenn die Spannungsfunktion der elastisch-isotropen Platte durch ein Polynom ersten bis fünften Grades in recht- oder schiefwinkligen Koordinaten gegeben ist. Denn dann wird die Gleichung $\Omega = 0$ durch die der Spannungsfläche einbeschriebene Facettenfläche bei beliebig grosser Seitenlänge der Dreiecke streng befriedigt. Mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse leitet *K. Wieghardt* aus der Spannungsverteilung, die man für einige wichtige Belastungsarten eines geraden kontinuierlichen Balkens kennt, die Spannungen des entsprechenden engmaschigen Fachwerkbalkens her.

Ein räumliches, aus ebenen Polygonen zusammengesetztes und in sich geschlossenes Polyeder kann immer als Spannungsfläche eines *Selbstspannungssystems* in demjenigen Fachwerk aufgefasst werden, welches als seine rechtwinklige Projektion erscheint. Man erhält für das betreffende Fachwerk insbesondere *alle* bei ihm möglichen Selbst-

spannungssysteme. Eine gewisse Schwierigkeit tritt ein, wenn das Ausgangspolyeder ein sogenanntes *einseitiges Polyeder* (*Möbius*) ist. Man vgl. hierzu die Ausführungen von *F. Klein*[59b]) und die daran anknüpfenden Entwicklungen von *F. Pfeiffer*[59b]).

18. Reziproke ebene Diagramme und ihre Beziehungen zur Spannungsfläche. Aus der Existenz der Spannungsfläche gewinnt *J. Cl. Maxwell* die Grundlage für die *Theorie der ebenen reziproken Diagramme* (vgl. IV 5, *L. Henneberg, Nr.* **12**), als deren speziellen Fall er den *Kräfteplan des Fachwerks* auffasst.

In einer x, y-Ebene nimmt er irgendein Kontinuum oder Diskontinuum an mit der Spannungsfläche $z = F(x, y)$. Diesem lässt er in einer ξ, η-Ebene ein durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}$$

definiertes Kontinuum oder Diskontinuum entsprechen, welchem die durch die Gleichung

$$F + \Phi = x\xi + y\eta$$

definierte Spannungsfläche $\zeta = \Phi(\xi, \eta)$ zugehört. Die beiden Spannungsflächen stehen in einem reziproken Verhältnis zueinander. Jede kann nämlich als das polare Abbild der anderen in bezug auf das Paraboloid $2z = x^2 + y^2$ aufgefasst werden. Auch die beiden ebenen Figuren, welche durch Projektion der Spannungflächen auf die x, y bzw. ξ, η-Ebene erhalten werden, sind reziprok, denn es gelten die Gleichungen

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Aus den Formeln (45) ergeben sich nun für die resultierende Spannung längs des Bogenstückes ab der x, y-Ebene die Werte

$$T_x = \eta_\beta - \eta_\alpha, \quad T_y = -(\xi_\beta - \xi_\alpha),$$

wenn ξ_α, η_α und ξ_β, η_β die Koordinaten der Endpunkte des Bogenstückes $\alpha\beta$ in der ξ, η-Ebene sind, welches dem Bogenstück a, b entspricht. Vermöge dieser Beziehung liefert die Verbindungsstrecke der Endpunkte α und β, als Vektor aufgefasst, die auf das entsprechende Bogenstück ab kommende resultierende Spannung nach Grösse, Richtung und Sinn. Der genannte Vektor steht senkrecht auf dem Vektor der resultierenden Spannung T_x, T_y. Man kann ihn daher als transversalen Vektor bezeichnen. Der transversale Vektor $\alpha\beta$ liefert die

59b) *F. Klein,* Math. Ann. 67 (1909), p. 433; *F. Pfeiffer,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 58 (1910), p. 262.

Wirkung der Spannung auf das Querschnittufer, welches an der linken Seite eines von a nach b fortschreitenden liegt, der transversale Vektor $\beta\alpha$ die Wirkung auf das rechte Ufer. *Maxwell* hat dies u. a. für die Spannungsverteilung bei einem gebogenen Balken ausgeführt.

Ist das x, y-Diagramm ein Fachwerk, so gilt dies auch für das ξ, η-Diagramm. Die Spannungsflächen sind aus ebenflächigen Polygonen zusammengesetze Raumpolyeder. Es entspricht wechselseitig jedem Polygon des einen Polyeders eine Ecke des anderen, jeder Ecke ein Polygon, jeder Kante eine Kante. Analoge Beziehungen bestehen zwischen den reziproken Diagrammen. Entsprechende Kanten stehen aufeinander senkrecht, und die Kanten des einen Diagrammes ergeben als transversale Vektoren aufgefasst in den Kanten des anderen Spannungen, welche sich im Gleichgewicht befinden.

Weitere Ausführungen über diese besonderen reziproken Figuren finden sich im Artikel IV 5, Nr. **12** und Nr. **33** bei *L. Henneberg.*

19. Räumliche Spannungssysteme und Spannungsfunktionen. Eine dem *Airy*schen Ansatz analoge, allgemeine Spannungsfunktion für ein *räumliches Kontinuum*, welche alle möglichen Spannungssysteme umfasst, lässt sich nach *Maxwells* Untersuchungen nicht aufstellen. Doch hat *Maxwell* den *Airy*schen Formeln zwei Ansätze nachgebildet, welche spezielle räumliche Spannungsverteilungen angeben. Sein *erster* Ansatz ist:

$$(49)\qquad \begin{aligned} \sigma_x &= \nabla F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \sigma_y &= \nabla F - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \sigma_z &= \nabla F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ \tau_x &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \tau_y &= -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}, & \tau_z &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Der *zweite* Ansatz lautet bei rein formaler Benutzung willkürlicher Grössen:

$$(50)\qquad \sigma_x\alpha^2 + \sigma_y\beta^2 + \sigma_z\gamma^2 + 2\tau_x\beta\gamma + 2\tau_y\gamma\alpha + 2\tau_z\alpha\beta = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \alpha \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \beta \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

Beide Ansätze sind als Verallgemeinerungen des für die Ebene geltenden *Airy*schen Ansatzes anzusehen. Sie erfüllen auch beide bei beliebigem F die für den Raum geltenden Spannungsgleichungen.

Im Sinne dieser Ansätze ordnet *Maxwell* reziproken räumlichen Diagrammen reziproke Spannungsfunktionen F und Φ zu.

Die Reziprozität ist definiert durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$F(x, y, z) + \Phi(\xi, \eta, \zeta) = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

aus denen

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad z = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$$

folgt.

Ist dann do ein Flächenelement im x, y, z-Raum mit der Normalen n, so liefert der erste *Maxwell*sche Ansatz auf do einmal eine Normalspannung vom Betrage ∇F pro Flächeneinheit, zweitens eine Tangentialspannung mit den Komponenten $\frac{\partial \xi}{\partial n}, \frac{\partial \eta}{\partial n}, \frac{\partial \zeta}{\partial n}$ pro Flächeneinheit. Der zweite Ansatz hingegen liefert in dem Flächenelement $d\omega$ des ξ, η, ζ Raumes, wenn man es als Plangrösse auffasst, die auf do kommende Spannung nach Grösse, Richtung und Sinn. Es ergeben sich also Beziehungen zwischen einer Spannungsfunktion $F(x, y, z)$, dem zugehörigen Spannungssystem und seinem reziproken Diagramme, welche den entsprechenden Beziehungen zweidimensionaler Systeme ganz analog sind. Man kann auch auf Diskontinuen übergehen, indem man F in verschiedenen Raumstücken durch verschiedene lineare Funktionen ersetzt. Der erste Ansatz *Maxwell*s giebt dann Spannungen in den *Wänden* eines räumlichen Diagrammes; der zweite Ansatz Spannungen in den *Kanten* eines solchen, die der Grösse nach durch die Flächeninhalte der entsprechenden Wände des reziproken Diagramms gegeben sind. Letzterer führt also zu Kräfteplänen räumlicher Fachwerke (vgl. IV 5, Nr. **41**, *Henneberg*).

III. Die Spannkraftermittelung in statisch bestimmten Systemen.

Die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen in der Form

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s$$

kann man als die allgemeinste Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen des Fachwerks ansehen. Sie umfaßt als solche alle besonderen Methoden, deren sich die Statik der Baukonstruktionen zur Berechnung der statisch bestimmbaren Grössen bedient. In der Tat sind diese Methoden im analytischen Sinne nichts anderes als Eliminationsverfahren, vermittelst deren aus gewissen Gruppen der Gleichgewichtsbedingungen die Unbekannten bis auf eine oder wenige ausgesondert werden. Es kommen insbesondere folgende Methoden in

Betracht: 1. *Polygonalmethoden*, 2. *Methoden der Stabvertauschung*, 3. *Schnittmethoden*, 4. *die kinematische Methode*.

Die beiden ersten Methoden bestimmen die Spannkräfte aller Stäbe eines Fachwerks, oder wenigstens eines Teiles desselben, nacheinander für ein und denselben Belastungsfall. Die beiden letzteren ermöglichen die Bestimmung der Spannkraft in einem einzelnen Stab gesondert von den Spannkräften der anderen Stäbe. Sie finden daher in den Fällen veränderlicher Belastung zweckmässig Verwendung.

Da über diesen Gegenstand bereits in dem Referate IV 5 (*Henneberg*) berichtet ist, so genügen hier einige Nachträge.

20. Polygonalmethode und Methoden der Stabvertauschung. Die *Polygonalmethode* ist eine schrittweise von Knotenpunkt zu Knotenpunkt vorgehende Lösung. Sie hat daher zur Voraussetzung, dass sich eine solche Aufeinanderfolge von Knotenpunkten finden lässt, welche *an jedem Knotenpunkt* nach Lösung der Aufgabe für die vorhergehenden nur *zwei* bzw. *drei unbekannte Stabkräfte* aufweist. Diese Voraussetzung ist bei den Fachwerken einfachster Art gegeben, welche ein Dreieck bzw. Tetraeder als zentrale Figur enthalten und um diese herum so angeordnet sind, dass jeder Knotenpunkt an zwei bzw. drei vorhergehende durch je einen Stab angeschlossen ist.

Die Lösung der Aufgabe auf graphischem Wege, welche in der Ebene fast ausschliesslich in Betracht kommt, führt zu ebenen bzw. räumlichen *Kräfteplänen*. Diese sind in IV 5, Nr. **32**, **33**, **43** ausführlich besprochen, wozu auch die Ausführungen oben in Nr. **18** u. **19** zu vergleichen sind. Bei räumlichen Systemen findet ausserdem auch der rechnerische Weg zur Auflösung der drei Gleichgewichtsbedingungen vielfach Anwendung. *O. Mohr*[61]) benutzt hierzu das Prinzip der virtuellen Verrückungen, indem er dem Knotenpunkt eine virtuelle Verrückung zuschreibt und die hierbei geleistete Arbeit gleich Null setzt. Er erhält dann für jede unbekannte Stabkraft eine Gleichung, indem er die Komponenten der virtuellen Verrückung jedesmal so bestimmt, dass abgesehen von den bekannten Kräften nur die gesuchte Stabkraft Arbeit leistet. Das Verfahren läuft auf die Auflösung der drei Gleichgewichtsbedingungen durch Elimination hinaus, wobei die Eliminationsmultiplikatoren als Komponenten einer virtuellen Verrückung gedeutet werden. Es führt daher nur auf einem Umweg zum Ziele.

Bei Fachwerken, welche dem obengenannten einfachen Bildungs-

---

61) *O. Mohr*, Beitrag zur Theorie des Raumfachwerks, Zentralblatt d. Bauverw. 1902, p. 205 u. 634 = Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906, p. 435.

gesetz nicht gehorchen, leistet *die Methode der Stabvertauschung* gute Dienste. Wie *L. Henneberg* diese verwendet, ist IV 5, Nr. **36** besprochen. Ebenda ist auch das Verfahren erwähnt, durch welches *H. Müller-Breslau*[62]) den Gedanken der Stabvertauschung einfacher und für die Anwendung zweckmässiger ausgestaltet hat. Es handelt sich darum, aus dem gegebenen Fachwerk durch Fortnahme von Stäben und Hinzufügung der gleichen Anzahl neuer Stäbe als Ersatzstäbe ein der Rechnung bequem zugängliches Fachwerk abzuleiten. Wenn hierbei *H. Müller-Breslau* keine allgemeine Regel zur Herstellung des abgeleiteten Fachwerks giebt, so erklärt sich dies am einfachsten daraus, dass sich jeder einzelne Schritt als ganz selbstverständlich ergiebt. Bei dem für räumliche Fachwerke gegebenen Beispiel[63]) schlägt er einen ganz allgemeinen Weg ein, der stets zum Ziele führt. Er beginnt mit einem Knotenpunkt, an dem möglichst wenig Stäbe angreifen, beseitigt alle bis auf drei nicht in einer Ebene liegende, ersetzt ihre Spannkräfte durch äussere Kräfte Z und bestimmt die drei übrigbleibenden Stabkräfte. Dies Verfahren wiederholt er von Knotenpunkt zu Knotenpunkt fortschreitend und fügt hierbei in den Knotenpunkten, welche weniger als drei unbekannte Stabkräfte aufweisen, die erforderliche Anzahl von Ersatzstäben hinzu. Werden die Auflager als Stützstäbe aufgefasst, so müssen sich ebensoviel Ersatzstäbe ergeben, als Stäbe beseitigt sind. Sämtliche Spannkräfte erscheinen dann in der (linearen) Form

$$S = S_0 + S_1 Z_1 + S_2 Z_2 + \cdots + S_n Z_n,$$

in welcher S_0 den Einfluss der Lasten P allein bei verschwindenden Z bedeutet. Gleichungen derselben Art bestehen für die Werte Y der Spannkräfte in den Ersatzstäben, die Bedingungen $Y = 0$ bestimmen eindeutig die Grössen Z, sofern die Determinante dieser Bedingungsgleichungen einen von Null verschiedenen Wert ergiebt. Damit sind dann auch alle Spannkräfte bestimmt. Verschwindet die Determinante, so ist das Fachwerk nicht stabil, sondern von unendlich kleiner Beweglichkeit.

Im wesentlichen denselben Weg beschreitet *O. Mohr*[61]), indem er Laststäbe an Stelle der Z-Stäbe *Müller-Breslaus* einführt und aus den drei Gleichgewichtsbedingungen für die Knotenpunkte, an welchen weniger als drei unbekannte Stabkräfte angreifen, Gleichungen zur Berechnung der Spannkräfte in den Laststäben gewinnt.

62) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 1, Leipzig 1887, p. 213, 4. Aufl., Stuttgart 1905, p. 443.

63) *H. Müller-Breslau,* Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892, p. 12.

21. Schnittmethoden. Die Schnittmethoden von *A. Ritter* und *C. Culmann* für *ebene Fachwerke* sind ausführlich im Artikel IV 5, Nr. **32** besprochen. Man kann dem noch das Verfahren von *H. Zimmermann* zufügen, welches eine Erweiterung des *Culmann*schen Verfahrens und nur anwendbar ist, wenn die äusseren Kräfte alle parallel zueinander sind. Bei allen diesen Schnittmethoden besteht der wesentlichste Teil der Aufgabe darin, die statischen Momente der angreifenden äusseren Kräfte für jeden Knotenpunkt bzw. gewisse Schnittpunkte zweier Stäbe, sowie die *Querkräfte* für jedes Feld zu bestimmen. Als *Feld* eines Trägers wird ein von zwei benachbarten Knotenpunkten begrenztes Trägerstück bezeichnet, *Feldweite* heisst die Projektion der durch zwei benachbarte Knotenpunkte begrenzten Strecke auf die Horizontale. Unter der *Querkraft* versteht man die Komponente der Resultierenden aller auf einer Seite eines Schnittes angreifenden äusseren Kräfte, im allgemeinen in senkrechter Richtung, in besonderen Fällen jedoch rechtwinklig zur Mittellinie eines Trägers. Dieselbe Aufgabe stellt die Behandlung *vollwandiger Systeme,* denn auch hier beruht die Ermittelung der inneren Kräfte auf einer Schnittmethode, wenn die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt bekannt ist.

Die Bestimmung der *Momente* erfolgt entweder durch das *Culmann*sche Seilpolygon (vgl. IV 5, Nr. **16**) oder durch Rechnung. Zweckmässig findet das erste Verfahren zur Ermittelung der Maximalwerte Verwendung. Die *Querkräfte* werden im allgemeinen berechnet, nur zur Bestimmung der grössten Werte leistet in vielen Fällen ebenfalls ein Seilpolygon, das sogenannte A-Polygon, gute Dienste. Die Berechnung der Querkräfte und Momente geschieht am einfachsten schrittweise mit Hilfe der Beziehungen:

$$Q_m = Q_{m-1} - P_m$$
$$M_m = M_{m-1} + Q_{m-1}\lambda_m.$$

Hierin bezeichnet P_m die Last im Knotenpunkt m, Q_{m-1} die Querkraft für das Feld $m-1, m$, Q_m die Querkraft für das Feld $m, m+1$, M_m das statische Moment für den Knotenpunkt m und λ_m die Feldweite $m-1, m$.

Die genannten Verfahren haben die vorhergehende oder gleichzeitige Bestimmung der *Stützkräfte* zur Voraussetzung. Diese erfolgt graphisch mit Hilfe des Seilpolygones oder analytisch aus den Gleichgewichtsbedingungen starrer Systeme. Die notwendigen Ergänzungen bei solchen statisch bestimmten Systemen, welche mehr als drei Auflagerbedingungen und dementsprechend mehr als drei Stützkräfte auf-

weisen, liefert die Bedingung, dass das Moment der äusseren Kräfte in bezug auf jeden Gelenkpunkt zwischen zwei in sich stabilen Trägerteilen, welche bei diesen Systemen immer vorhanden sind, zu Null werden muss.

Für *räumliche Fachwerke* ist eine der *Ritter*schen ähnliche Methode von *Th. Landsberg*[64]) ausgebildet worden, nachdem bereits *H. Müller-Breslau* und *H. Zimmermann*[65]) sich ihrer in besonderen Fällen bedient haben. *Th. Landsberg* legt Schnitte durch das Fachwerk und bestimmt Axen, welche alle von dem Schnitt getroffenen Stäbe schneiden, wenn es sich um die Bestimmung einer unbekannten Auflagerreaktion handelt, oder alle bis auf einen derselben, sofern die Spannkraft dieses letzteren ermittelt werden soll. Er bezeichnet sie als Gelenkaxen, weil die durch den Schnitt getrennten Teile eine gegenseitige Drehung um diese Axen ausführen können, sobald ein Stab beseitigt wird, welcher an einem der beiden Teile angreift und die Axe nicht trifft. Die Bedingung, dass die Momente der an den abgeschnittenen Teilen angreifenden Kräfte in bezug auf die Gelenkaxen zu Null werden müssen, ergiebt Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten statischen Grössen. Man kann mit *H. Müller-Breslau*[66]) auf diesem Wege die Spannkräfte dreier nicht in einer Ebene liegender Stäbe finden, welche in einem Knotenpunkt zusammenstossen. Man legt einen Schnitt durch die drei Stäbe und gewinnt die Spannkraft jedes aus der Momentengleichung in bezug auf die in der Schnittebene durch die beiden anderen Stäbe bestimmte Axe.

22. Die kinematische Methode. Das Anwendungsgebiet der Schnittmethoden ist durch die Bedingung begrenzt, daß die das Fachwerk durchsetzenden Schnitte nur 3 Stäbe treffen dürfen. Bei einem Fachwerk, dessen Bauart einen solchen Schnitt nicht zulässt, löst die kinematische Methode die Aufgabe der Spannkraftermittlung für einzelne Stäbe.

Der Grundgedanke dieser Methode ist folgender. Wird in einem Fachwerk ein Stab beseitigt, so geht es in eine zwangläufige kinematische Kette über, welche unter der jeweils gegebenen Belastung durch zwei in den Knotenpunkten des beseitigten Stabes angebrachte und in dessen Axe fallende Kräfte gleicher Grösse aber entgegenge-

---

64) *Th. Landsberg,* Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Zentralblatt d. Bauverw. 1903, p. 221 u. 361.

65) *H. Zimmermann,* Über Raumfachwerke, Berlin 1901.

66) *H. Müller-Breslau,* Über räumliche Fachwerke, Zentralblatt d. Bauverw. 1902, p. 62.

setzter Richtung im Gleichgewicht erhalten werden kann. Die Grösse dieser Kräfte ist wegen der Eindeutigkeit des Spannungsproblems gleich der Spannkraft, welche die gegebene Belastung in dem beseitigten Stab hervorruft; sie wird auf folgendem Wege bestimmt. Unterwirft man nämlich die zwangläufige kinematische Kette einer virtuellen Verrückung, so leisten ausser den gegebenen Lasten nur jene unbekannten fiktiven Kräfte Arbeit. Ihre Grösse ist also durch die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bestimmt, sobald die virtuellen Verrückungen der Knotenpunkte, in denen Kräfte wirken, in der Richtung dieser Kräfte gefunden sind. Damit ist die Ermittlung der Spannkraft auf eine kinematische Aufgabe zurückgeführt. Anstatt der Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen kann man mit *H. Müller-Breslau* auch eine Momentengleichung benutzen.

Des Hilfsmittels, das Fachwerk in eine kinematische Kette zu überführen, hat sich zuerst *O. Mohr*[67]) bedient, um die Formänderung zu ermitteln, welche das Fachwerk infolge der gegebenen Längenänderung eines Stabes erfährt. Seine Eignung zur Spannkraftermittlung hat zuerst *A. Föppl*[68]) ausgesprochen. Zu einer vollständigen Methode zur Berechnung statisch bestimmter Systeme, welche auch in verwickelten Fällen schnell zum Ziele führt, hat *H. Müller-Breslau*[69]) den oben angegebenen Gedanken ausgebaut. Die Auffassung der Auflager als Stützstäbe macht ihr auch die Ermittlung der Auflagerkräfte zugänglich Unmittelbar nach *H. Müller-Breslau* sind *R. Land*[74]), *M. Grübler*[75]) und *O. Mohr*[73]) mit ähnlichen Verfahren hervorgetreten.

Die Darstellung der virtuellen Verrückungen gewinnt man nach *L. Burmesters* Vorgang[70]) mit Hilfe des *Satzes vom augenblicklichen Drehpol*, nach welchem eine Bewegung einer starren Scheibe in jedem Augenblick als Drehbewegung um einen festen Punkt aufgefasst werden kann. Die endliche Geschwindigkeit jedes Punktes m der Scheibe sowie auch die verschwindend kleine Verschiebung ist proportional seinem Abstand von dem Drehpol, sie kann also durch den Vektor mm' dargestellt werden, wenn die Punkte m' eine der Scheibe

67) *O. Mohr*, Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 20 (1874), p. 223 und Beitrag zur Theorie des Fachwerks, ebd. 20 (1874), p. 509 u. 21 (1875), p. 17.

68) *A. Föppl*, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880.

69) *H. Müller-Breslau*, Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks, Schweizerische Bauzeitung 9 (1887), p. 121 u. ebd. 10 (1887), p. 129 und Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, Leipzig 1887, p. 201.

70) *L. Burmester*, Über die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten, Civilingenieur 26 (1880), p. 247.

ähnliche und in bezug auf den Pol als Ähnlichkeitspunkt ähnlich liegende Figur F' bilden. Die Figur F' wird *Geschwindigkeitsplan*, der Vektor mm' *lotrechte Geschwindigkeit* genannt. Die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Scheiben in dem gegenseitigen Drehpol müssen zusammenfallen, daraus folgt, dass die relativen Drehpole dreier Scheiben gegeneinander in einer Geraden liegen. Die rechtwinkligen Abstände der Punkte m' von den Kraftlinien der in den Punkten m angreifenden Kräfte liefern die virtuellen Verrückungen der Punkte m in der Kraftrichtung. Sie gehen auch in die von *H. Müller-Breslau* benutzte Momentengleichung ein, welche sich auf die Punkte m' oder die augenblicklichen Drehpole bezieht (vgl. IV 5, Nr. **37**).

Die *Zeichnung des Geschwindigkeitsplanes* gestaltet sich nun besonders einfach für solche zwangläufige kinematische Ketten, deren Bildungsgesetz sich eng an das Bildungsgesetz der *Fachwerke einfachster Art* anlehnt. An eine zwangläufige kinematische Kette K werden weitere Punkte so angeschlossen, dass jeder Knotenpunkt mit zwei vorhergehenden durch je einen Stab verbunden ist. Anstatt durch Stäbe kann der Anschluss durch starre Scheiben erfolgen, und ein zwei Scheiben verbindendes Gelenk ist gleichwertig mit einer Verbindung durch zwei Stäbe. Ist nun der Geschwindigkeitsplan der Ausgangskette K bekannt, dann ergiebt sich jeder Punkt der Figur F' für die angeschlossenen Knotenpunkte als Schnittpunkt zweier Parallelen zu den entsprechenden Stäben. Die einfachste zwangläufige kinematische Kette ist ein Gelenkviereck. Ist ein solches als Ausgangskette vorhanden, so kann man den Geschwindigkeitsplan zeichnen, indem man einen Stab des Gelenkvierecks festhält, über die freie Geschwindigkeit eines seiner beiden beweglichen Knotenpunkte durch eine Annahme verfügt und dann die den angeschlossenen Knotenpunkten entsprechenden Punkte des Geschwindigkeitsplanes auf dem vorstehend angegebenen Wege bestimmt. Im allgemeinen werden dann einer oder mehrere der Stützpunkte eine Verschiebung erfahren, die entsprechenden Stützkräfte müssen also aus anderen Beziehungen ermittelt werden. Soll das vermieden werden, so muss die Kette einer zweiten Bewegung unterworfen werden, welche die Auflagerbedingungen wiederherstellt.

Bei zwangläufigen kinematischen Ketten, deren *Bauart verwickelter* ist als die oben beschriebene, führt ein der *C. Saviotti*schen *Methode de la fausse position* (vgl. IV 5, Nr. **35**) ähnlicher Weg zum Ziele. Solche Ketten liegen dann vor, wenn entweder keine Ausgangskette mit nur einer Bewegungsfreiheit vorhanden ist oder aber an eine solche Ausgangskette die anderen Knotenpunkte nicht jedesmal

durch zwei Stäbe angeschlossen sind. In beiden Fällen sind einige der angeschlossenen Knotenpunkte gewissen „Starrheitsbedingungen" unterworfen, und zwar in solcher Zahl, daß für alle Teile der Kette nur eine Bewegungsfreiheit besteht. Werden nun zunächst die Starrheitsbedingungen nicht berücksichtigt, so kann über die zweite und etwaige weitere Bewegungsfreiheiten willkürlich verfügt werden. Durch mehrere Annahmen erhält man dann für jeden Knotenpunkt eine Gerade als geometrischen Ort des zugehörigen Punktes der Figur F', während ein zweiter geometrischer Ort aus den Starrheitsbedingungen für die ihnen unterworfenenen Knotenpunkte folgt.

In schwierigen Fällen dieser Art verwendet *H. Müller-Breslau*[71]) mit Vorteil das *Ersatzstabverfahren.* Die gegebene Kette K' wird durch Beseitigung von Stäben und Einfügung von ebensovielen *dehnbaren Ersatzstäben* in eine zwangläufige Kette K'' verwandelt, für welche der Geschwindigkeitsplan ohne weiteres gezeichnet werden kann, wenn man über die freie Geschwindigkeit und die Längenänderungen der Ersatzstäbe durch Annahmen verfügt. Dann kann man die Längenänderungen der beseitigten Stäbe als lineare Funktionen der freien Geschwindigkeit der Kette K'' und der Längenänderungen der Ersatzstäbe darstellen. Indem man diese Längenänderungen entsprechend den Starrheitsbedingungen gleich Null setzt, erhält man ein System linearer Gleichungen zur Berechnung der Längenänderungen der Ersatzstäbe, welche den Bedingungen der Kette K' entsprechen. Die Bildung der Kette K'' erfolgt zweckmässig auf dem entgegengesetzten Wege wie die in Nr. **20** beschriebene Bildung des Ersatzfachwerkes. Man geht also von festen bzw. festgehaltenen Punkten aus, fügt, wo erforderlich, Ersatzstäbe ein und beseitigt zum Schluss die störenden Stäbe.

M. Grüning[72]) führt statt der dehnbaren *starre Ersatzstäbe* ein, deren Richtung so bestimmt wird, dass die Richtungen der Geschwindigkeiten der Kette K'' mit denen der Kette K' in den gemeinschaftlichen Knotenpunkten zusammenfallen. Es wird das durch einfache Kräftepläne erreicht auf Grund des Satzes. dass die angestrebte Übereinstimmung dann stattfindet, wenn die Kette K'' für jede Belastung durch zwei äussere entgegengesetzt gleiche Kräfte, welche in der Richtung eines beseitigten Stabes an dessen Knotenpunkten angreifen, eine Gleichgewichtslage einnimmt. Die gesuchten virtuellen Ver-

71) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. 1, 4. Aufl., Stuttgart 1905, p. 471.

72) *M. Grüning,* Beitrag zur kinematischen Berechnung räumlicher Fachwerke, Zeitschr. f. Bauwesen 58 (1908), p. 303.

rückungen ergeben sich dann unmittelbar ohne vorherige Auflösung linearer Gleichungen.

Dieselben Dienste wie der Geschwindigkeitsplan F' leistet in vielen Fällen eine *Polkonfiguration*, welche die augenblicklichen Drehpole aller Glieder einer zwangläufigen kinematischen Kette darstellt. Sie kann bei einfachen kinematischen Ketten immer unmittelbar mit Hilfe des Satzes über die Lage der relativen Drehpole dreier Scheiben gezeichnet werden. Dieser Satz ist aber auch bei solchen Ketten anwendbar, welche aus Gebilden mit mehreren Bewegungsfreiheiten durch Hinzufügung einer Starrheitsbedingung gewonnen werden. Denn solange eine zweite Bewegungsfreiheit besteht, kann für jeden Pol mindestens ein geometrischer Ort angegeben werden.

O. Mohr[73]), der die Gleichung für die Spannkraft des beseitigten Stabes aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gewinnt, zeichnet den Geschwindigkeitsplan in etwas anderer Weise. Er zerlegt die Bewegung einer zwangläufigen kinematischen Kette in zwei Bewegungen und stellt die Geschwindigkeiten der ersten durch Polstrahlen Pm', die der zweiten durch Polstrahlen $m''P$ dar. Der Vektor $m''m'$ giebt also die totale Geschwindigkeit an. Die Darstellung der ersten Bewegung schliesst sich eng an das Verfahren *Williot*s zur Konstruktion des „Verschiebungsplanes" (vgl. unten Nr. **30**) an. Es wird ein Stab und ein Punkt als festliegend angenommen und über die freie Geschwindigkeit durch eine Annahme verfügt. Dann ergeben sich die Punkte m' als Schnittpunkte von Geraden, welche in dem Geschwindigkeitsplan rechtwinklig zu den Stäben gezogen werden, die den Punkt m ausschliessen. Die zweite Bewegung hebt die über die Lage der kinematischen Kette getroffenen Annahmen auf und stellt die gegebenen Bedingungen des Systems wieder her Sie besteht in einer Drehung der starren Kette um einen Punkt. Die Punkte m'' bilden dann nach dem Gesetz vom augenblicklichen Drehpol eine Figur, welche der betrachteten Kette ähnlich ist, aber nicht ähnlich liegt. Ihre Seiten schliessen mit den entsprechenden Stäben jeweils in dem gleichen Sinne zu nehmende rechte Winkel ein.

R. Land[74]) verwendet zur Darstellung der Geschwindigkeiten einer zwangläufigen kinematischen Kette ausser dem Geschwindigkeitsplan F' und der Polkonfiguration einen Geschwindigkeitsplan, welcher dem *Mohr*schen ähnlich ist. Er bedient sich des Verfahrens auch zur Be-

73) *O. Mohr*, Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne, Zivilingenieur 33 (1887), p. 631.

74) *R. Land*, Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger, Zeitschrift d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 40 (1888), p. 11 u. 162.

rechnung vollwandiger Träger, doch leistet das Verfahren hier nichts anderes als die Schnittmethode.

Zuweilen bildet die kinematische Methode ein wichtiges Hilfsmittel zur Beurteilung der Zweckmässigkeit einer Anordnung, da sie einen klaren Einblick in das Wesen der bei gewissen ausgezeichneten Lagen der Glieder eines Systems auftretenden Ausnahmefälle vermittelt. Man kann mit *M. Grübler*[75]) auch die Polkonfiguration einer zwangläufigen kinematischen Kette zur Untersuchung der Starrheit eines Fachwerks benutzen.

Zur Berechnung *räumlicher Fachwerke* hat zuerst *H. Müller-Breslau*[66]) die kinematische Methode verwendet. Die einfachste zwangläufige kinematische Kette des Raumes bildet ein Tetraeder, in welchem ein Stab fehlt. Werden nun weitere Knotenpunkte so angeschlossen, dass jeder mit drei vorhergehenden durch je einen Stab verbunden ist, so entsteht eine zwangläufige kinematische Kette, deren Geschwindigkeitsplan schrittweise dargestellt werden kann, wenn über die Lage der Ausgangsfigur und die freie Geschwindigkeit geeignete Annahmen getroffen sind. *H Müller-Breslau* bedient sich zu diesem Zweck des Verfahrens von *Williot* oder der Berechnung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Zwangläufige kinematische Ketten von anderer Erzeugungsweise als der vorstehend angegebenen werden nach der Methode der Ersatzstäbe behandelt. Das Verfahren ist dem der Ebene ganz analog. Auch das von *M. Grüning*[72]) angegebene Verfahren, die Ersatzstäbe so zu bestimmen, dass die Geschwindigkeiten der Ketten K' und K'' übereinstimmen, führt in verwickelten Fällen zum Ziele.

23. Einflusslinien. Zu den wichtigsten Aufgaben der Statik der Baukonstruktionen gehört die Ermittelung des *Einflusses beweglicher paralleler Lasten* sowie derjenigen Laststellung, welche den *grössten oder kleinsten Wert einer statischen Grösse*, die sogenannten *Grenzwerte*, zur Folge hat. Die Lösung dieser Aufgabe, welche die bisher genannten Methoden in vielen Fällen nur durch mehrfaches Probieren ermöglichen, erreicht man mit Hilfe der sogenannten *Einflusslinien*, deren Ermittlung letzten Endes allerdings auf einer dieser Methoden beruht. Es sei der Einfluß einer über den ganzen Träger wandernden Einzellast auf eine statische Grösse untersucht und zu der jeweiligen Laststellung als Abszisse von einer Geraden, der sogenannten *Nulllinie* aus, als Ordinate η in der Richtung der Last aufgetragen. Die

75) *M. Grübler*, Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerkes, Rigaische Industriezeitung 13 (1887), p. 37 u. 49.

Endpunkte der Ordinaten bestimmen die *Einflusslinie* der statischen Grösse, die von ihr und der Nulllinie begrenzte Fläche ist die *Einflussfläche.* Der Einfluss einer Einzellast kann für verschiedene Laststellungen entgegengesetzten Sinn, die Ordinate η dementsprechend entgegengesetztes Vorzeichen haben. In diesem Falle schneidet die Einflusslinie die Nulllinie in den sogenannten *Nullpunkten* oder *Belastungsscheiden.* Diese zerlegen die Abszissenachse in *positive* und *negative Beitragsstrecken.* Der durch irgendein Lastensystem erzeugte Wert der gesuchten statischen Grösse Z ergibt sich nach dem Superpositionsgesetz in der Form

$$Z = \Sigma Q_m \eta_m.$$

Die ausschliessliche Belastung der positiven oder negativen Beitragsstrecken liefert die Grenzwerte.

Eingeführt wurden die Einflusslinien von *E. Winkler*, welcher sie unter der Bezeichnung *Spannungskurven* 1867 zum ersten Male erwähnt. Nach ihm haben *O. Mohr*[76]), *J. Weyrauch*[77]), *C. Fränkel*[78]) und *H. Müller-Breslau*[79]), letzterer besonders ausgiebig in seiner „Graphischen Statik der Baukonstruktionen", Einflusslinien verschiedener Systeme dargestellt. Die Einflusslinien sind durch diese Arbeiten zu einem der wichtigsten Hilfsmittel für die statische Berechnung einiger statisch bestimmter sowie der statisch unbestimmten Systeme geworden.

Die *Ermittlung der Ordinaten* η beruht, wie schon oben gesagt, auf einem der in Nr. **20** bis **22** besprochenen Verfahren. Das erkennt man ohne weiteres, wenn man die Definitionsgleichung für Z

$$Z = \Sigma Q_m \eta_m.$$

aus der Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen in der Form

$$\Sigma Q_m \bar{\delta}_m = \Sigma S \overline{\Delta s}$$

ableitet, welche alle diese Verfahren umfasst. Da es in dieser Gleichung nur auf das gegenseitige Verhältnis der $\overline{\delta_m}$ bzw. Δs ankommt, so kann einer dieser Koeffizienten willkürlich gewählt werden. Der

---

76) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Zeitschrift d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 14 (1868), p. 19; vgl. auch die in Fussn. [5]) genannten Arbeiten.

77) *J. Weyrauch,* Allgemeine Theorie und Berechnung der kontinuierlichen und einfachen Träger, Leipzig 1873.

78) *C. Fränkel,* Über die ungünstigste Einstellung eines Systems von Einzellasten auf Fachwerkträgern mit Hilfe von Influenzkurven, Civilingenieur 22 (1876), p. 441.

79) *H. Müller-Breslau,* Des Ingenieurs Taschenbuch, die *Hütte,* 11. Aufl. Berlin 1877, und Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken, Berlin 1880.

zu Z gehörige Koeffizient sei mit η_z bezeichnet, wobei es gleichgültig ist, ob Z eine Auflagerreaktion oder eine Spannkraft ist, dann folgt aus der Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen sofort die Gleichung

$$Z = \frac{1}{\eta_z} \Sigma Q_m \eta_m.$$

Damit ergiebt sich folgendes: Es ist zur Darstellung der Einflusslinien nur erforderlich, das gegenseitige Verhältnis der Ordinaten η_m, also die Gestalt der Einflusslinie, zu ermitteln und sodann den sogenannten *Multiplikator* $\mu = \frac{1}{\eta_z}$ zu bestimmen. Hierbei gelten folgende allgemeine Regeln[80]:

1. Zu jedem starren Trägerstück gehört eine Gerade als Einflusslinie, deren Nullpunkt dem augenblicklichen Drehpole des starren Stückes entspricht.

2. Die Einflusslinien zweier gelenkartig verbundener Trägerteile schneiden sich in einem Punkte, welcher dem Gelenk entspricht.

3. Die beiden Teile einer Einflusslinie, welche zu gleitend verbundenen Trägerstücken gehören, sind einander parallel.

Die Gestalt der Einflusslinien der gebräuchlichen einfacheren statisch bestimmten Systeme (einfacher Balken, *Gerber*scher Träger, Dreigelenkbogen) ist danach durch wenige Gerade festgelegt, welche durch die Belastungsscheiden und Knickpunkte bestimmt sind. Diese Punkte ergeben sich entweder unmittelbar aus der Anordnung eines Systems oder mit Hilfe weniger gerader Linien. In verwickelteren Fällen leistet die kinematische Methode gute Dienste. *H. Müller-Breslau* trägt die Abstände der Punkte der Figur F' von den Lasten, welche an den zugehörigen Knotenpunkten angreifen, als Ordinaten der Einflusslinien auf, oder er bestimmt die Belastungsscheiden und Knickpunkte durch eine Polkonfiguration. Ist auf diese Weise die Gestalt einer Einflusslinie gefunden, so ist nur noch der Multiplikatur durch Ermittlung des Wertes Z für eine einzige Laststellung, die zu diesem Zweck besonders geeignet ist, zu bestimmen.

R. Land[74]) fasst die Einflusslinie für die Spannkraft S eines Stabes als *Biegungslinie* (siehe unten Nr. 27) der belasteten Gurtung auf, welche durch eine Längenänderung des Stabes $\Delta s = 1$ hervorgerufen wird. Er deutet diese Biegungslinie dann als *Seilpolygon* (vgl. unten Nr. 28), welches mit der Polweite 1 zu den der Lastrichtung parallelen Kräften ω_{mn} gezogen wird, wenn ω_{mn} den verschwindend kleinen

80) Vgl. *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, 4. Aufl., Stuttgart 1905, p. 480 und *R. Land,* Fussn. 74.

Verdrehungswinkel bzw. die endliche relative Geschwindigkeit der Scheiben m und n bezeichnet. Zwei aufeinanderfolgende Seiten der Biegungslinie schneiden daher auf einer Geraden, welche im Abstand 1 von ihrem Schnittpunkt parallel zur Lastrichtung gezogen wird, die Strecke ω_{mn} ab. Aus dieser Beziehung folgt eine einfache Bestimmung des Masstabes der durch eine Polkonfiguration gefundenen Einflusslinie. *R. Land* gewinnt diese Interpretation der Einflusslinie aus einem Reziprozitätssatz, auf den wir unten zurückkommen, und spricht sie in dem Satz aus: „Die Einflusslinie irgendeiner statischen Wirkung Wa bei einer bestimmten Stelle A eines statisch bestimmten Trägers für eine über denselben wandernde Einzellast $P = 1$ ist gleich der Biegungslinie des Trägers, welche entsteht, wenn man bei A eine der gesuchten statischen Wirkung Wa entsprechende Formänderung $w_a = 1$ annimmt."

Einflusslinien solcher statischen Grössen, welche unmittelbar durch eine Gleichgewichtsbedingung miteinander verbunden sind, werden zuweilen zweckmässig auseinander abgeleitet. So kann man die Einflusslinie einer statischen Grösse durch Superposition der Einflussflächen zweier anderer statischen Grössen gewinnen. *H. Müller-Breslau* und *R. Land*[81]) stellen derartige Fälle dar.

IV. Die Bestimmung der elastischen Formänderungen.

Die Formänderung eines Fachwerks ist nach den Ausführungen in Nr. **14** eindeutig festgelegt, wenn seine Lage durch die Auflagerbedingungen bestimmt und die Längenänderungen Δs seiner Stäbe bekannt sind. Voraussetzung ist dabei, dass die Nennerdeterminante der Elastizitätsbedingungen nicht zu Null wird; sie wird im allgemeinen als erfüllt betrachtet. In analoger Weise ist die Formänderung eines elastischen Kontinuums nach Nr. **15** eindeutig festgelegt, wenn die Auflagerbedingungen gegeben und die Verzerrungskomponenten ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z für alle Punkte bekannt sind. Im Falle des geraden oder gekrümmten steifen Stabes, welcher in der Statik der Baukonstruktionen allein unter den Kontinuen Gegenstand der theoretischen Untersuchung ist, ist also die Formänderung durch die Auflagerbedingungen, die Dehnungen ε_x und die Gleitungen γ_y, γ_z bestimmt.

Das *Formänderungsproblem* stellt nun die Aufgabe, die Verschiebungen Δx, Δy, Δz der Knotenpunkte eines Fachwerks bzw. die Änderungen u, v, w der Koordinaten x, y, z der Punkte der Axe eines

81) *R. Land,* Über die Ermittelung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflusslinien für Träger, Zeitschr. f. Bauwesen 40 (1890). p. 105.

steifen Stabes aus den Auflagerbedingungen und den Längenänderungen Δs bzw. den Dehnungen ε_x und den Gleitungen γ_y, γ_z zu ermitteln. Dabei ist es an sich gleichgültig, durch welche Ursachen die genannten Formänderungen hervorgerufen sind. Ganz besonders gilt das Interesse der Theorie indessen solchen Formänderungen, welche durch eine bestimmte, *wirkliche oder fiktive Belastung — elastische Formänderungen* — oder durch eine *Änderung der Temperaturen des spannungslosen Anfangszustandes* erzeugt sind. Um diese Formänderungen handelt es sich im folgenden Abschnitt.

Das setzt also voraus, dass die Spannkräfte bzw. die Spannungen zuvor ermittelt sind, so dass aus ihnen die elastischen Längenänderungen bzw. die Verzerrungskomponenten nach dem *Hooke*schen Gesetz bestimmt werden können. Diese Voraussetzung wird in Nr. **27** bis **31** des folgenden Abschnittes als erfüllt betrachtet, wobei es dahingestellt bleiben kann, auf welchem Wege sie erreicht ist, d. h. ob die Spannkräfte bzw. Spannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen allein oder aus diesen und den Elastizitätsbedingungen gefunden sind. Unter der genannten Voraussetzung können bei der Lösung des Formänderungsproblemes statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme nebeneinander behandelt werden.

In den meisten Fällen ist nicht die *vollkommene* Lösung des Formänderungsproblems erforderlich. Häufig handelt es sich nur um die Verschiebungen *einzelner* Punkte in *bestimmter Richtung*. Diese Aufgabe behandeln die Nrn. **24**, **25**, **26** im wesentlichen nach *Maxwells Mohrs* und *Castiglianos* Methoden. In anderen Fällen sind die Verschiebungen *aller* Knotenpunkte einer Fachwerkgurtung oder aller Punkte der Axe eines steifen Stabes in *einer bestimmten* Richtung zu finden. Dieser Teil des Problems wird mit Hilfe der *Biegungslinie* gelöst, welche in Nr. **27** bis **29** besprochen wird. Eine *vollkommene* Lösung des Formänderungsproblemes für das Fachwerk geben die in Nr. **30** und **31** dargestellten Verfahren von *Williot* und *Müller-Breslau*.

24. Maxwells und Mohrs Methoden. Die *erste Lösung* des Problems der *elastischen Formänderung ebener Fachwerke* hat *J. Cl. Maxwell*[45]) gegeben. Sein Verfahren ist ohne weiteres auch für räumliche Fachwerke gültig. *Maxwell* geht von einer kinematischen Überlegung aus, die er allerdings elastisch einkleidet. Er macht die Annahme, dass nur ein Stab — a — des Fachwerks elastisch, alle anderen aber starr seien, und sucht die Änderung δ_m der Entfernung der beiden Knotenpunkte m_1 und m_2, welche durch die Längenänderung Δs des Stabes a hervorgerufen wird. δ_m und Δs werden positiv als Verlängerungen gerechnet. *Maxwell* findet δ_m durch Heranziehung

des *Clapeyron*schen Theorems. Wird nämlich die Längenänderung Δs durch einen zwischen den Knotenpunkten m_1 und m_2 wirkenden Zug P_m erzeugt, welcher in dem Stab a die Spannkraft S zur Folge hat, dann ist die von P_m geleistete Formänderungsarbeit einmal durch $-\frac{1}{2}P_m\delta_m$, ferner auch durch $\frac{1}{2}S\Delta s$ ausgedrückt. Nach dem genannten Satz ist also

$$\tfrac{1}{2}P_m\delta_m + \tfrac{1}{2}S\Delta s = 0.$$

Bezeichnet nun S' die Spannkraft in dem Stab a, welche durch die Zugeinheit zwischen den Knotenpunkten m_1 und m_2 hervorgerufen wird, so folgt mit

$$S = P_m \cdot S'$$

die *Grundgleichung Maxwells*

(51) $$\delta_m = - S'\Delta s.$$

Da P_m aus der Gleichung verschwindet und die Formänderung eines Fachwerks durch die Längenänderung seiner Stäbe eindeutig bestimmt ist, nimmt Δs die Eigenschaft einer vollkommen willkürlichen Längenänderung an, deren Ursache die Gültigkeit der Gleichung (51) nicht beschränkt. Insbesondere kann also Δs die Folge jeder beliebigen Belastung und ebenso auch einer Temperaturänderung sein, obwohl das *Clapeyron*sche Theorem an die Voraussetzung isothermer Deformation gebunden ist. *Maxwell* folgert daher aus einer Grundgleichung den Satz: „Ist S' die Spannkraft im Stabe a infolge einer Zugeinheit zwischen den Punkten m_1 und m_2, so bringt eine Dehnung des Stabes a von der Grösse $\Delta s = 1$ die Punkte m_1 und m_2 einander näher um eine Strecke S'."

Aus der Grundgleichung *Maxwells* kann nunmehr durch Multiplikation mit einem willkürlichen P_m und Summation über alle Stäbe und alle beliebigen P_m die Gleichung[83a])

$$\Sigma P_m\delta_m = \Sigma S\Delta s$$

abgeleitet werden, welche von derselben allgemeinen Bedeutung ist, wie die Gleichung derselben Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

J. Cl. Maxwell benutzt seine Grundgleichung, um zunächst für ein *statisch bestimmtes Fachwerk* die *Änderung* δ_n der *Entfernung zweier Knotenpunkte* n_1, n_2 zu finden, wenn zwischen zwei anderen Knotenpunkten m_1, m_2 ein Zug P_m herrscht und alle Stäbe ausser einem Stabe a als starr angenommen werden. Bezeichnet S_m die Spannkraft, die in dem Stabe a durch eine Zugeinheit zwischen den Knotenpunkten m_1, m_2 hervorgerufen wird, so ist seine Verlängerung infolge

des Zuges P_m

$$\Delta s = P_m S_m \varrho. \qquad \left(\varrho = \frac{s}{EF}\right).$$

Bezeichnet nun weiter S_n die Spannkraft in dem Stabe a, welche durch eine Zugeinheit zwischen den Knotenpunkten n_1, n_2 hervorgerufen wird, so ist nach (51):

$$\delta_n = - S_n \Delta s.$$

Damit wird also

$$\delta_n = - P_m S_m S_n \varrho.$$

Sind alle Stäbe elastisch, so ergiebt sich durch Summation über alle Stäbe

(52) $$\delta_n = - P_m \sum S_m S_n \varrho.$$

Die *Verschiebung eines Knotenpunktes* fasst *J. Cl. Maxwell* als Längenänderung eines Stabes auf, welcher den Knotenpunkt mit irgendeinem festen Punkt ausserhalb des Fachwerks verbindet. Vermöge dieser Auffassung bezeichnet dann S_m bzw. S_n die Spannkraft eines Fachwerkstabes infolge der Belastung des Knotenpunktes m bzw. n durch die Krafteinheit, während δ_n die Verschiebung des Punktes n in der Kraftlinie der Krafteinheit am Punkte n, aber im entgegengesetzten Richtungssinne ist. Damit ist das Formänderungsproblem gelöst.

Dasselbe Problem der Bestimmung der gegenseitigen Verschiebung zweier Punkte eines Systems oder der Verschiebung eines Punktes gegen eines festen Punkt ausserhalb desselben infolge der durch die Längenänderungen Δs der Stäbe gekennzeichneten Formänderung behandelt, unabhängig von *Maxwell*, *O. Mohr.*[7]) Er gewinnt jedoch die Gleichung *Maxwells* in der Form

(52a) $$\delta_n = - \sum S_n \Delta s$$

unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Ähnlich verfährt *C. Fränkel*[82]), indem er von der Auffassung einer sehr kleinen Bewegung einer starren Scheibe als einer Drehung um einen Punkt ausgeht und der Reihe nach immer nur einen Stab elastisch annimmt.

Die *allgemeinste Lösung* des Formänderungsproblemes, welche in gleicher Weise statisch bestimmte wie unbestimmte Systeme umfasst, gibt *O. Mohr*[5]) durch die in Nr. 4 besprochene Verwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Er wählt den virtuellen Be-

82) *C. Fränkel*, Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken, Civilingenieur 21 (1875), p. 515.

lastungszustand so, dass die Arbeit der äusseren Kräfte durch das Glied $\overline{Q}_m \delta_m$ ausgedrückt wird, und erhält dann

$$\delta_m = \frac{1}{\overline{Q}_m} \sum \overline{S} \Delta s,$$

wenn δ_m jetzt positiv im Sinne der positiven Richtung von $\overline{Q}_m$ genommen wird, und $\overline{S}$ die durch $\overline{Q}_m$ hervorgerufenen Spannkräfte sind. Zweckmässig ist von anderen Autoren $\overline{Q}_m = 1$ gesetzt worden. Den Einfluss von Verschiebungen der Stützpunkte berücksichtigt *O. Mohr* durch Einführung von Stützstäben, deren elastische Längenänderungen gleich den Auflagerverschiebungen angenommen werden.

Für die wirklichen Formänderungen ergiebt sich mit $\overline{Q}_m = 1$ und $\Delta s = S\varrho + \varepsilon t s$ die Gleichung

$$(53) \qquad \delta_m = \sum S \overline{S} \varrho + \sum \varepsilon t \overline{S}.$$

H. Müller-Breslau[83]) bemerkt eine wichtige Eigenschaft, welche dem Belastungszustand $\overline{Q}_m$ für den Fall statisch unbestimmter Fachwerke zukommt. Da der virtuelle Belastungs- und Spannungszustand nämlich nur der Bedingung des Gleichgewichts unterworfen ist, so können alle statisch unbstimmten Grössen gleich Null gesetzt, die $\overline{S}$ also als Spannkräfte eines beliebigen statisch bestimmten durch $\overline{Q}_m$ belasteten Hauptsystems aufgefasst werden. Damit entfallen in der Gleichung (53) alle Glieder, die sich auf die überzähligen Konstruktionsteile beziehen. Dieselbe Schlussfolgerung zieht *O. Mohr*[84]) aus dem Umstand, dass die Formänderung eines zusammengesetzten Fachwerks durch die Längenänderung der notwendigen Stäbe bestimmt ist.

Die Bestimmung *elastischer Formänderungen des steifen Stabes* mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen scheint zuerst *M. Koenen*[85]) in einem Sonderfall durchgeführt zu haben, nachdem schon *E. Winkler*[86]) das Verfahren kurz angedeutet hat. Weitere

83) *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, p. 15.

83ᵃ) Dasselbe. 3. Aufl. Leipzig 1904, p. 335.

84) *O. Mohr,* Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, p. 370.

85) *M. Koenen,* Vereinfachung der Berechnung kontinuierlicher Balken mit Hilfe des Satzes von der Arbeit, Wochenblatt für Architekten u. Ingenieure 4 (1882), p. 402.

86) *E. Winkler,* Beitrag zur Theorie der Bogenträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 25 (1879), p. 199.

Sonderfälle behandelt *Müller-Breslau*[87]). Später[87a]) giebt er eine allgemeine und umfassende Darstellung des Gegenstandes.

Die Verschiebung δ_m des Punktes m der Oberfläche eines festen elastischen Körpers infolge des durch die Verzerrungskomponenten ε und γ sowie die Auflagerbedingungen gekennzeichneten Verschiebungszustandes liefert das Prinzip der virtuellen Verrückungen mit Hilfe der Gleichung (7). Wird der Belastungszustand $\overline{Q}_m$ so gewählt, dass $\sum \overline{Q}_m \delta_m = \delta_m + \sum \overline{C}\, \Delta c$, also $\overline{Q}_m = 1$ ist, so folgt:

$$(54)\quad \delta_m = \int (\overline{\sigma}_x \varepsilon_x + \overline{\sigma}_y \varepsilon_y + \overline{\sigma}_z \varepsilon_z + \overline{\tau}_x \gamma_x + \overline{\tau}_y \gamma_y + \overline{\tau}_z \gamma_z)\, dv - \sum \overline{C}\, \Delta c.$$

Hier bedeutet $\sum \overline{C}\, \Delta c$ die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Belastungszustand $\overline{Q}_m = 1$.

Im Falle des *geraden oder schwach gekrümmten Stabes*, dessen Belastungssystem in die Ebene der Stabaxe fällt, haben nur die Normalspannungen σ_x und die Temperaturänderungen wesentlichen Einfluss auf die Formänderungen. Mit $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon t$ ergiebt sich für die Verschiebung δ_m des Punktes m der Stabaxe nach irgendeiner in die Kräfteebene fallenden Richtung der Wert:

$$\delta_m = \int \overline{\sigma} \left(\frac{1}{E}\sigma + \varepsilon t\right) dv - \overline{L};$$

$\overline{L}$ bezeichnet jetzt kurz die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den durch $\overline{Q}_m = 1$ belasteten Stab.

Um die Drehung τ_m des Elementes der Stabaxe in dem Punkte m zu finden, wird als Belastung $\overline{Q}_m$ ein Kräftepaar eingeführt, welches auf die im Punkte m an die Stabaxe gelegte Tangente einwirkt, und so gewählt wird, dass $\sum \overline{Q}_m \delta_m = \tau_m + \overline{L}$, das Moment des Kräftepaares also gleich 1 wird. Dann folgt:

$$\tau_m = \int \overline{\sigma} \left(\frac{1}{E}\sigma + \varepsilon t\right) dv - \overline{L}.$$

Werden die Spannungen durch die äusseren Kräfte gemäss der Gleichungen (42) und (42c) ausgedrückt, so ergiebt sich der Ansatz

$$(55)\ \delta_m = \int \frac{N\overline{N}}{EF}\, dx + \int \frac{M\overline{M}}{EJ}\, dx + \int \varepsilon t_0 \overline{N}\, dx + \int \varepsilon \Delta t \frac{\overline{M}}{h}\, dx - \overline{L}.$$

---

87) *H. Müller-Breslau*, Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens, Civilingenieur 29 (1883), p. 13 und Über die Anwendung des Prinzips der Arbeit in der Festigkeitslehre, Wochenblatt f. Architekten u. Ingenieure 5 (1883), p. 87.

87a) *H. Müller-Breslau*, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, p. 172 u. 61.

Ein Ausdruck derselben Form stellt die Drehung τ_m dar. $\overline{N}$, $\overline{M}$, $\overline{L}$ sind die Längskräfte, Momente und die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte $\overline{C}$, welche durch den im gegebenen Falle geeigneten Belastungszustand $\overline{Q}_m$ hervorgerufen werden.

Im Falle statisch unbestimmter Systeme ist der Belastungszustand $\overline{Q}_m$ wiederum nur an die Bedingung des Gleichgewichts gebunden. Daher können alle statisch unbestimmten Grössen gleich Null gesetzt und die $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$, $\overline{N}$, $\overline{M}$, $\overline{L}$ auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen werden.

Ähnliche Formeln findet *H. Müller-Breslau* a. a. O. für den eineinfach gekrümmten Stab, dessen Krümmungsradius nicht sehr gross im Verhältnis zu seinen Querschnittsabmessungen ist.

25. Castiglianos Methode. Einen anderen allgemeinen Ansatz zur Lösung des Problems der elastischen Formänderungen giebt *A. Castigliano*[20]) in dem zweiten Teil seines Lehrsatzes von dem Differentialquotienten der Formänderungsarbeit. Sein Verfahren führt indessen schnell zu Gleichungen, welche mit den aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen abgeleiteten übereinstimmen. Aus (vgl. Gleichung 28):

$$\delta_m = \frac{\partial A_i}{\partial Q_m} - \frac{\partial L}{\partial Q_m}$$

folgt für *das Fachwerk*:

$$(56) \qquad \delta_m = \sum S \frac{\partial S}{\partial Q_m} \varrho + \sum \varepsilon t \frac{\partial S}{\partial Q_m} s - \frac{\partial L}{\partial Q_m}$$

und für den *festen elastischen Körper*:

$$(57) \qquad \delta_m = \int \left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial Q_m} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial Q_m} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial Q_m} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial Q_m} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial Q_m} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial Q_m} \right) dv - \frac{\partial L}{\partial Q_m},$$

worin nach dem verallgemeinerten *Hooke*schen Gesetz

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z) + \varepsilon t, \\ \gamma_i &= f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x; \tau_y, \tau_z) \end{aligned} \qquad (i = x, y, z)$$

zu setzen ist. Man erhält die Gleichung (57), wenn man für die Formänderungsarbeit A den Ausdruck *Grashofs* (Gleichung (13)) einführt und berücksichtigt, dass jede Spannungskomponente eine lineare Funktion der sechs Verzerrungskomponenten ist. Nun sind die Spannkräfte S, die Auflagerreaktionen C und die Spannungskomponenten σ, τ lineare Funktionen der äusseren Lasten und der Temperatur-

änderungen, infolgedessen ist:

$$\frac{\partial S}{\partial Q_m} = \bar{S}, \quad \frac{\partial L}{\partial Q_m} = \bar{L}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Q_m} = \bar{\sigma}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial Q_m} = \bar{\tau}.$$

Damit gehen die beiden Gleichungen (56) und (57) in die Gleichungen (53) und (54) über. Das Verfahren *Castigliano*s ist daher in der Anwendung von dem auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen beruhenden nicht wesentlich verschieden.

H. Müller-Breslau[30]) bemerkt, dass man im Falle statisch unbestimmter Systeme die statisch unbestimmten Grössen stets als Lasten auffassen kann, welche auf das Hauptnetz wirken. Sie können daher in dem Ausdruck der Formänderungsarbeit als unabhängige Veränderliche angesehen werden.

26. Die Sätze von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen. Ein wichtiges *Reziprozitätsgesetz über elastische Formveränderungen* folgert *J. Cl. Maxwell*[45]) aus seiner Gleichung:

$$\delta_n = - P_m \sum S_m S_n \varrho.$$

Es bezeichne δ_{nm} die Änderung der Entfernung zweier Knotenpunkte n_1, n_2 infolge des Zuges $P_m = 1$ zwischen den Knotenpunkten m_1, m_2 und δ_{mn} die Änderung der Entfernung der beiden Knotenpunkte m_1, m_2 infolge des Zuges $P_n = 1$ zwischen den Knotenpunkten n_1, n_2. Dann ist nach vorstehender Gleichung:

$$\delta_{mn} = - \sum S_m S_n \varrho,$$

und andererseits

$$\delta_{nm} = - \sum S_n S_m \varrho.$$

Es folgt also:

(58) $$\delta_{nm} = \delta_{mn},$$

Erweiterte Bedeutung erhält die Gleichung durch die *Maxwell*sche Auffassung der Verschiebungen von Knotenpunkten als Änderung der Entfernung der Knotenpunkte von festen Punkten ausserhalb des Fachwerks. Die Aussage der Gleichung (58) ist in der Statik der Baukonstruktionen unter dem Namen *Maxwellscher Satz von der Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* bekannt.

Ein allgemeineres Reziprozitätstheorem wird *E. Betti*[88]) verdankt. Ein fester elastischer Körper sei durch Oberflächenkräfte q_x, q_y, q_z und die Massenkräfte X, Y, Z belastet und im Gleichgewicht — *Betti* lässt die Beschleunigungen nicht verschwinden —, seine

88) *E. Betti*, Il nuovo cimento (2) 7 u. 8 (1872). Vgl. auch *A. Castigliano*, Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici, Torino, Atti della R. Accademia delle Scienze 17 (1882), p. 705.

Punkte erfahren die Verschiebungen u, v, w. Derselbe Körper werde einer zweiten Belastung durch die Oberflächenkräfte q_x', q_y', q_z' und die Massenkräfte X', Y', Z' unterworfen und erfahre die Verschiebungen u', v', w'. Dann sind die beiden jeweils aus den Kräften des einen Belastungssystems und den Verschiebungen des anderen gebildeten virtuellen Arbeiten einander gleich. Es besteht also die Gleichung:

$$(59)\quad \int m(Xu' + Yv' + Zw')\,dv + \int (q_x u' + q_y v' + q_z w')\,dw$$
$$= \int m(X'u + Y'v + Z'w)\,dv + \int (q_x' u + q_y' v + q_z' w)\,dw.$$

Zum Beweise setze man auf beiden Seiten der Gleichung nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die virtuelle Formänderungsarbeit in den Spannungs- und Verzerrungskomponenten ein. Es ergeben sich dann Ausdrücke, welche in den Verzerrungs- und Spannungskomponenten der beiden Belastungssysteme symmetrisch sind, sofern man berücksichtigt, dass die inneren Kräfte ein Potential haben, welches eine homogene quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten ist. Es folgt dann sofort die Identität der beiden Ausdrücke und damit die Gültigkeit der Gleichung (59). Vgl. hierzu IV 24, *O. Tedone*, Nr. **10**a.

In der Statik der Baukonstruktionen ist als analytische Fassung des *Bettischen Satzes* die Gleichung:

$$(60)\qquad \sum P_m(\delta_{mn}) = \sum P_n(\delta_{nm})$$

gebräuchlich, entsprechend der Voraussetzung, dass keine Massenkräfte auftreten und die Oberflächenkräfte durch eine Gruppe von Einzellasten P_m bzw. P_n gegeben sind. (δ_{mn}) und (δ_{nm}) sind die Wege der Belastung P_m bzw. P_n infolge der Belastung P_n bzw. P_m. Der *Betti*sche Satz in dieser Fassung schliesst natürlich den *Maxwell*schen Satz als Sonderfall ein, welcher damit auch auf feste elastische Körper ausgedehnt wird.

Unabhängig von *Maxwell* gewinnt *O. Mohr*[4]) den Satz von der Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen. Auch *R. Krohn*[89]) und *R. Land*[90]) behandeln den Gegenstand.

Eine Reihe wichtiger *Spezialfälle des Bettischen Satzes* gewinnt *H. Müller-Breslau*[91]) aus der Deutung der Belastungen P_m und P_n

89) *R. Krohn*, Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 30 (1884), p. 269.

90) *R. Land*, Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen, Wochenblatt f. Baukunde 1887, p. 14.

91) *H. Müller-Breslau*, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., Leipzig 1886, p. 115; ebd. 1904, p. 60.

als Gruppen von Einzellasten für stabile Stabwerke und Fachwerke unter der Voraussetzung, dass die Auflagerkräfte bei der Formänderung keine Arbeit leisten, die Temperatur des spannungslosen Anfangszustandes in keinem Punkte eine Änderung erfährt, und ein lineares Elastizitätsgesetz besteht. Bezüglich gekrümmter biegungsfester Stäbe wird die weitere Voraussetzung gemacht, dass alle betrachteten Verschiebungsrichtungen in die Ebene der Stabaxe fallen.

Bei der Einführung solcher Lastengruppen werden als Grundbegriffe die *Belastung eines Punktpaares*, die *Belastung einer Geraden* und die *Belastung eines Geradenpaares* benutzt. Unter der *Belastung eines Punktpaares* m_1, m_2 werden zwei gleich grosse entgegengesetzte Kräfte verstanden, welche in den Punkten m_1 und m_2 angreifen und in deren Verbindungslinie fallen. Der Weg dieser Belastung ist die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares, d. h. die Änderung, welche die Entfernung $m_1 m_2$ erfährt. Unter der *Belastung einer Geraden* werden zwei entgegengesetzte gleiche Kräfte verstanden, welche in zwei Punkten dieser Geraden angreifen, rechtwinklig zu ihr gerichtet sind und ein Kräftepaar von dem Moment $= P_m \cdot 1$ bilden. Der Weg der Belastung ist der im Bogenmass ausgedrückte Drehungswinkel der Geraden (m). Dementsprechend wird die *Belastung eines Geradenpaares* (m_1, m_2) gedeutet als die Belastung zweier Geraden m_1 und m_2 durch Kräftepaare, welche gleich grosse Momente von entgegengesetztem Drehungssinn ergeben. Der Weg der Belastung ist die gegenseitige Drehung der Geraden m_1 und m_2, d. h. die Änderung des von ihnen gebildeten Winkels. Für alle diese Belastungsfälle gilt die Beziehung $\delta_{nm} = \delta_{mn}$.

Ph. Forchheimer[92]) giebt einige Erläuterungen zu dem *Betti*schen Satz, indem er davon ausgeht, dass an einem elastischen System einer Kräftekugel um den Punkt A ein Verschiebungsellipsoid um den Punkt B entspricht und ebenso die umgekehrte Beziehung gilt. So folgert er drei Sätze für die Ebene und den Raum, welche in der für letzteren gültigen Fassung wie folgt lauten:

1) Die Verschiebungsellipsoide von A für Kräfte in B und von B für Kräfte in A sind kongruent,

2) Eine Kraft, welche in der grossen (mittleren, kleinen) Axe des einen Ellipsoides wirkt, erzeugt eine Verschiebung nach der grossen (mittleren, kleinen) Axe des andern Ellipsoides,

3) Die Verschiebungen längs der grossen (mittleren, kleinen) Axe beider Ellipsoide sind einander gleich.

---

92) *Ph. Forchheimer*, Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen, Zeitschr. des österr. Ing. u. Arch.-Vereins 38 (1886), p. 109.

Die entsprechenden Beziehungen für die Ebene gewinnt *W. Ritter*[93]) durch geometrische Überlegungen mit Hilfe der Polarentheorie.

27. Die Gleichung der Biegungslinie eines Stabes. Für die Bestimmung der elastischen Formänderung der Axe eines *geraden biegungsfesten Stabes* ist in der Statik der Baukonstruktionen heute noch die Grundlage massgebend, die von *Jacob Bernoulli*[94]) 1705 und *L. Euler*[16]) geschaffen ist und auf der Proportionalität der Krümmung und des Biegungsmomentes beruht. Die Behandlung des Problems nach den Methoden der Elastizitätstheorie durch *B. de St. Venant*[47]) und *G. Kirchhoff*[2]) hat im wesentlichen diese Annahme als zulässig erwiesen (vgl. IV 25, Nr. **13**, *Tedone-Timpe*). Aus der erwähnten Proportionalität:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ}$$

folgt:

$$\frac{\pm \frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{JE}.$$

Da die Formänderungen sehr kleine Grössen sind, kann, falls die X-Axe in der ursprünglichen Stabaxe oder parallel zu ihr angenommen wird, $\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 1$ gesetzt werden. Es ergiebt sich dann die *Differentialgleichung der Biegungungslinie* (*elastische Linie*) in der in der Technik allgemein gebräuchlichen Form:

(61) $$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}.$$

E. Clapeyron[95]), *O. Mohr*[96]), *C. Culmann*[97]) haben sie in ihren grundlegenden Arbeiten angewendet. Die zweimalige Integration giebt die Gleichung der Biegungslinie, die beiden auftretenden Integrationskonstanten sind durch die Auflagerbedingungen bestimmt. Aus derselben Grundlage gewinnt *O. Mohr*[98]) den Teil der elastischen Längenänderung einer Bogensehne, welcher von der Biegung herrührt.

93) *W. Ritter,* Anwendungen der graphischen Statik, Teil I, Zürich 1888, p. 158 ff.

94) *Jac. Bernoulli,* Véritable hypothèse de la résistance des solides avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort, Opera 2, Genevae 1744.

95) *E. Clapeyron,* Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés, Paris C. R. 45 (1857), p. 1076.

96) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 14 (1868), p. 19.

97) *C. Culmann,* Die graphische Statik, Zürich 1866, p. 289.

98) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 16 (1870), p. 389.

In anderer Form stellt *E. Winkler*[99]) die elastische Formänderung der Axe eines *einfach gekrümmten Stabes* dar. Kann der Krümmungsradius nicht als sehr gross angesehen werden, so ist der Einfluss der Längenänderung der Stabaxe nicht immer verschwindend klein. Durch Variation der Differentialrelationen $dx = ds \cos\varphi$ und $dy = ds \sin\varphi$ und nachherige Integration gewinnt *E. Winkler* die Gleichungen:

$$(62)\qquad \begin{aligned} \Delta x &= -y\Delta\varphi + \int y\,d\Delta\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds}\,dx, \\ \Delta y &= +x\Delta\varphi - \int x\,d\Delta\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds}\,dy. \end{aligned}$$

In diesen ist gemäss den Annahmen über die Spannungsverteilung im Querschnitt eines einfach gekrümmten Stabes (vgl. Nr. **15**)

$$d\Delta\varphi = \frac{M}{EW}ds - \frac{\Delta ds}{ds}\cdot\frac{ds}{r},$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{1}{EF}\left(N + \frac{1}{r}M\right).$$

Dieselben Gleichungen benutzen *J. Weyrauch*[100]) und *H. Müller-Breslau*[101]). Letzterer stellt als Differentialgleichung der Biegungslinie den Ausdruck[102]):

$$(63)\qquad -\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{d\Delta\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\cdot \operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}$$

auf, wobei er nur die Differentialrelation $dy = ds\sin\varphi$ variiert, und nimmt hierin für $d\Delta\varphi$ und $\frac{\Delta ds}{ds}$ die obenstehenden Werte.

28. Darstellung der Biegungslinie als Seilkurve bzw. als Seilpolygon der elastischen Gewichte. *O. Mohr*[96]) folgert aus der übereinstimmenden Form, welche die Gleichung der elastischen Linie (61) und die Gleichung einer Seilkurve (vgl. IV 5, *L. Henneberg*, Nr. **10** und IV 6, *P. Stäckel*, Nr. **23**)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k}{H}$$

aufweisen, dass man die *elastische Linie als Seilkurve* auffassen kann, welche zu der Belastung $k = \frac{M}{J}$ pro Längeneinheit der Projektion

99) *E. Winkler,* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867, p. 275.

100) *J. Weyrauch,* Theorie der elastischen Bogenträger, Zeitschr. f. Baukunde 1 (1878), p. 31 ff.

101) *H. Müller-Breslau,* Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken Berlin 1880, p. 12 ff.

102) *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, p. 105 u. 155.

auf die X-Axe mit der Polweite $H = E$ gezogen ist. Die zugehörige Schlusslinie ergiebt sich aus den Auflagerbedingungen. Ferner stimmen die Ordinaten der elastischen Linie zwischen zwei ihrer Punkte A und B gemessen in der Verschiebungsrichtung von der Sehne AB aus mit den Ordinaten der Momentenkurve eines in A und B gestützten Balkens überein, welcher durch

$$p_x = \frac{M_x}{EJ}$$

pro Längeneinheit belastet ist. Daraus folgt die Auffassung der *elastischen Linie als einer Momentenkurve.* Sie ergiebt sich auch unmittelbar aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -p_x,$$

welche zwischen dem Moment und der Belastung p_x besteht. Alle für die Seilkurve und die Momentenkurve bestehenden Sätze können daher für die elastische Linie nutzbar gemacht werden.

Als *Biegungslinie* der *Gurtung* eines *Fachwerks* für eine bestimmte Verschiebungsrichtung — meist die vertikale — bezeichnet man das Polygon, dessen Eckpunkte durch die Verschiebungen der Knotenpunkte der fraglichen Gurtung festgelegt sind. Analog der oben dargestellten Auffassung der Biegungslinie eines Balkens deutet *O. Mohr*[5]) die *Biegungslinie* einer Fachwerkgurtung als Seil- bzw. Momentenpolygon zu gewissen Gewichten $w_m = \frac{\Delta s_m}{h_m}$, die in den Knotenpunkten der betrachteten Gurtung parallel zur Verschiebungsrichtung wirken. Jedem Stab entspricht ein solches Gewicht. Sein Angriffspunkt ist zunächst der dem Stab als Drehpol zugehörige Knoten- bzw. Schnittpunkt, dessen rechtwinkliger Abstand vom Stab mit h_m bezeichnet ist. Doch werden die Gewichte w_m, welche nicht auf die Knotenpunkte der untersuchten Gurtung entfallen, auf diese nach statischen Regeln verteilt. Man nennt diese fiktiven Gewichte *elastische Gewichte.*

Den Nachweis stützt *O. Mohr* auf das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Bezeichnet Δy_i die Ordinate der Biegungslinie für den Knotenpunkt i und $\Delta y_i'$ die Ordinate der Biegungslinie desselben Knotenpunktes unter der Annahme, dass nur der Stab m elastisch, alle anderen starr seien, so ergiebt sich durch Superposition:

$$\Delta y_i = \sum \Delta y_i'.$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen aber folgt:

$$\Delta y_i' = \overline{S}_m \Delta s_m,$$

wenn $\overline{S}_m$ die Spannkraft des Stabes m bezeichnet, welche durch die

der Verschiebungsrichtung parallele, im Knotenpunkt i angreifende Lasteinheit erzeugt wird. Die Werte $\bar{S}_m$ für die verschiedenen Knotenpunkte i werden also durch die Ordinaten einer Einflusslinie dargestellt, welche als Seillinie zu dem Gewicht $w_m = \frac{1}{h_m}$ gezeichnet werden kann. Mithin ergiebt die zu dem Gewicht $w_m = \frac{\Delta s_m}{h_m}$ gezeichnete Seillinie die Werte $\Delta y_i'$, und die zu *allen* elastischen Gewichten gezeichnete Seillinie die Werte Δy_i, also die gesuchte Biegungslinie. Eine spezielle Anwendung zeigt *F. Steiner*.[103])

Eine *allgemeine Behandlung* des Gegenstandes giebt *H. Müller-Breslau*.[104]) Er entwickelt für die Biegungslinie eines Stabzuges, — d. h. einer Reihe von Stäben des Fachwerks, von denen jeder folgende nur mit dem vorhergehenden verbunden ist, — sowie der Gurtung eines Fachwerks die Beziehung

$$(64) \qquad \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = w_m;$$

hier sind λ_m und λ_{m+1} die Projektionen der Strecken $m-1, m$ und $m, m+1$ auf die X-Axe und w_m eine Funktion der die Formänderung des Fachwerks kennzeichnenden Grössen, deren Bestimmung unten gegeben ist. Der Ansatz stimmt in der Form überein mit der Beziehung, die zwischen drei aufeinanderfolgenden Momenten eines durch parallele Kräfte P_m belasteten Balkens besteht.

$$\frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda_{m+1}} = P_m.$$

Daraus ergiebt sich, dass man das Biegungspolygon auffassen darf als das Momentenpolygon eines Balkens, welcher durch Lasten w_m beansprucht wird. Diese Lasten sind wieder die oben eingeführten elastischen Gewichte. Die Bestimmung der Nullaxe des Biegungspolygons aus den Auflagerbedingungen zeigt *H. Müller-Breslau* für verschiedene Systeme (Balken mit überragenden Enden, *Gerber*scher Träger, Dreigelenkbogen).

Die *Bestimmung* der *elastischen Gewichte* für ein Fachwerk erreicht *H. Müller-Breslau* durch die mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitete Beziehung

$$(64a) \qquad w_m = \sum \bar{S} \Delta s.$$

103) *F. Steiner*, Studien über Fachwerke, Technische Blätter (1880), p. 134.

104) *H. Müller-Breslau*, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 31 (1885), p. 418, und Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2 Abt. 1, Leipzig 1892, p. 100 ff.

In dieser sind $\bar{S}$ die Spannkräfte, welche in den Stäben des Fachwerkes durch den angenommenen Belastungszustand $M_m = 1$, gekennzeichnet durch drei in den Knotenpunkten $m-1$, m, $m+1$ angreifende und zur Verschiebungsrichtung parallele Kräfte hervorgerufen werden. Δs sind die Längenänderungen, welche die Stäbe bei der untersuchten Formänderung erfahren. Jedes w_m enthält immer nur wenige Stäbe. Die Formeln sind a. a. O. für die gebräuchlichen Stabanordnungen entwickelt.

Die *Formänderung* eines *Stabzuges* ist bestimmt durch die Auflagerbedingungen, die Längenänderungen seiner Stäbe und die Änderungen der von den Stäben eingeschlossenen Winkel. Dementsprechend wird das elastische Gewicht in einem Stabzugknoten dargestellt durch die von *H. Müller-Breslau* entwickelte Formel:

$$(64b) \qquad w_m = \frac{\sigma_m}{E} \operatorname{tg} \gamma_m - \frac{\sigma_{m+1}}{E} \operatorname{tg} \gamma_{m+1} - \Delta \vartheta_m .$$

Hierin sind σ_m und σ_{m+1} die Spannungen in zwei in dem Knotenpunkt m zusammenstossenden Stäben, γ_m und γ_{m+1} die von der Wagerechten durch das linke Stabende aus nach unten positiv gezählten Neigungswinkel dieser Stäbe, und $\Delta \vartheta_m$ die Änderung des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Als *Stabzug* mit *gelenkartigen* Knotenpunkten kann man nun jeden Linienzug auffassen, der aus Fachwerkstäben zusammengesetzt ist und ein Fachwerk durchläuft, also z. B. jede Fachwerkgurtung. Bei dieser Auffassung sind die Spannungen σ durch die Spannkräfte in den Stäben, die Winkeländerungen $\Delta \vartheta$ aber durch die Änderungen von Dreieckswinkeln α_1, α_2, α_3 bestimmt. Letztere sind gegeben durch Gleichungen von der Form

$$(65) \qquad E \Delta \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{cotg} \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{cotg} \alpha_2 .$$

Für einen *biegungsfesten Stabzug* werden die Spannungen σ aus den Längskräften gefunden. Die Winkeländerung $\Delta \vartheta_m$ ergiebt sich aus den Momenten M_{m-1}, M_m, M_{m+1} mit Hilfe der Beziehung[105]:

$$(66) \qquad \Delta \vartheta_m = \frac{s_m}{6 E J_m} (M_{m-1} + 2 M_m) + \frac{s_{m+1}}{6 E J_{m+1}} (2 M_m + M_{m+1}) .$$

Für einfach gekrümmte biegungsfeste Stäbe entwickelt *H. Müller-Breslau* aus der Differentialgleichung der Biegungslinie (Gleichung (63)) das elastische Gewicht für die Längeneinheit der Projektion auf

105) *H Müller-Breslau,* Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger, Zeitschr. des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 34 (1888), p. 605 und Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abt. 2, Leipzig 1908, p. 479.

die X-Axe unter Berücksichtigung einer Temperaturänderung nach Gleichung (42c):

$$(67)\qquad z = \left(\frac{M}{EJ} + \varepsilon\frac{\Delta t}{h}\right)\sec\varphi + \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{N}{EF} + \varepsilon t_0\right)\operatorname{tg}\varphi\right].$$

An Stelle der verteilten Belastung z werden oft zweckmässiger Einzellasten eingeführt, welche in den Punkten angreifen, deren Durchbiegung gesucht wird. Es ergiebt sich dann das der Biegungslinie einbeschriebene Polygon, dessen Ecken auf Parallelen zu der Verschiebungsrichtung durch die genannten Punkte liegen.

R. Land[106]) führt die *Biegungslinie der Gurtung* eines Fachwerks auf die *Verschiebung einer Gliederkette aus starren Scheiben* zurück, welche mit den Knotenpunkten der Gurtung verbunden ein gedachtes Fachwerk bildet. Die Änderungen der Stablängen und der Randwinkel der Gurtung seien bekannt. Dann wird die Form des gedachten Fachwerks so bestimmt, dass die Längenänderungen der Gurtungsstäbe allein in ihm Änderungen der Randwinkel hervorrufen, welche gerade die vorgegebenen Werte annehmen. Die Biegungslinie wird dann als Seillinie zu elastischen Gewichten gewonnen, welche in den Gelenken der Gliederkette angreifen und durch Winkeländerungen allein bestimmt sind. Dasselbe Ergebnis, nämlich eine Formel für das elastische Gewicht, welche von den Längenänderungen der Stäbe, also auch vom Koordinatensystem unabhängig ist, erreicht *H. Müller-Breslau* durch Einführung *stellvertretender starrer Stabzüge.* Sein Verfahren unterscheidet sich von dem *Land*s dadurch, dass der Stabzug seine Gestalt in allen Belastungsfällen beibehält, während die Gliederkette diese mit wechselnder Belastung ändert.

29. Die Biegungslinie als Einflusslinie einer elastischen Formänderung. Die *senkrechte elastische Verschiebung* eines Balkens auf zwei Stützen in dem Punkte m infolge veränderlicher Belastung gewinnt *O. Mohr*[5]) auf folgendem Wege. Bezeichnet δ_{mi} die senkrechte elastische Verschiebung des Punktes m, welche durch die Last P_i im Punkte i hervorgerufen wird, dann ist nach dem Superpositionsgesetz die durch die Einzellasten $P_1, P_2 \ldots P_n$ erzeugte senkrechte Verschiebung des Punktes m:

$$\delta_m = \sum_1^n{}_i\, \delta_{mi}.$$

Bezeichnet ferner δ_{im} die senkrechte elastische Verschiebung des

106) *R. Land,* Anhang zu: Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger, Zeitschr. des österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 40 (1888), p. 162.

Punktes i, welche durch die Einzellast Q_m im Punkte m hervorgerufen wird, so ist nach dem *Betti*schen Theorem

$$Q_m \delta_{mi} = P_i \delta_{im}.$$

Mithin folgt die Gleichung:

$$\delta_m = \frac{1}{Q_m} [P_1 \delta_{1m} + P_2 \delta_{2m} + \cdots + P_n \delta_{nm}]. \tag{68}$$

Auf Grund dieser Gleichung deutet *O. Mohr* die Biegungslinie der belasteten Gurtung bzw. der Axe eines Balkens auf zwei Stützen für den Belastungszustand Q_m als Einflusslinie für die Durchbiegung im Punkte m. Dieser Deutung kommt allgemeinere Geltung zu. Ein Beispiel dessen hat *O. Mohr*[98]) schon früher in dem Verfahren gegeben, welches er zur Bestimmung der Längenänderung der Bogensehne infolge senkrechter Einzellasten, und zwar des durch die Biegungsmomente allein erzeugten Teiles angewendet hat. Er gewinnt den Einfluss einer Einzellast auf die gesuchte Längenänderung als Ordinate der zu der Belastung $z = \frac{y\,ds}{r^2}$ (r ist der Trägheitsradius des Querschnitts, y die Ordinate des Bogens, bezogen auf die durch die Kämpfer bestimmte Sehne) mit der Polweite 1 gezeichneten Seilkurve. *O. Mohr* kommt allerdings auf anderem Wege zu diesem Verfahren, deutet auch die Seilkurve nicht als Biegungslinie.

30. Vollständige Darstellung der Formänderung eines Fachwerks durch den Verschiebungsplan Williots. Eine *vollkommene Lösung* des *Formänderungsproblems* kann man mit den bisher behandelten Verfahren nur dadurch erreichen, dass man die totalen Verschiebungen der Knotenpunkte eines Fachwerks aus ihren Komponenten in zwei Richtungen bei ebenen und in drei Richtungen bei räumlichen Systemen zusammensetzt. Dieser Weg ist auch nicht unzweckmässig, wenn es sich um die totalen Verschiebungen *einzelner* Knotenpunkte handelt. Eine *unmittelbare* Darstellung der Gesamtverschiebungen *aller* Knotenpunkte eines Fachwerks gewinnt man durch Zeichnung eines *Verschiebungsplanes.* Im übrigen ist der Verschiebungsplan zuweilen auch dann mit Vorteil zu verwenden, wenn nur einzelne Verschiebungen zu ermitteln sind.

Der Verschiebungsplan eines Fachwerks wird immer in zwei Schritten gezeichnet. Der *erste Schritt* beruht auf der Grundlage, welche von *Williot*[107]) durch Lösung folgender Aufgabe gegeben ist: „Die Verschiebung eines Punktes c zu bestimmen, welcher mit den Punkten

107) *Williot,* Notations pratiques sur la statique graphique, Publications scientifiques industrielles 1877.

a und *b* durch je einen Stab verbunden ist, wenn die Verschiebungen der Punkte *a* und *b* sowie die Längenänderungen der Stäbe *ac* und *bc* gegeben sind.“ Von einem Punkte O aus seien die Strecken Oa' und Ob' aufgetragen, welche nach Grösse, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Punkte *a* und *b* darstellen, dann werden in a' und b' die Längenänderungen der Stäbe *ac* und *bc* unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen durch die Richtung angefügt, und in den Endpunkten Lote errichtet, welche sich im Punkte c' schneiden. Der Polstrahl Oc' giebt dann die Verschiebung des Punktes C nach Grösse, Richtung und Sinn an. Die Konstruktion setzt verschwindend kleine Verschiebungen voraus. Durch Wiederholung dieses Verfahrens stellt *Williot* die Verschiebungen der Knotenpunkte eines ebenen Fachwerks einfachster Art dar, indem er einen Knotenpunkt und die Richtung eines der beiden anstossenden Stäbe des Ausgangsdreiecks als festliegend annimmt. Die so entstandene Figur heisst der Verschiebungsplan des Fachwerks.

Die entsprechende Aufgabe für den Raum: „Die Verschiebung eines Punktes *d* zu bestimmen, welcher an die Punkte *a*, *b*, *c* durch drei Stäbe angeschlossen ist, wenn die Verschiebungen dieser Punkte und die Längenänderungen der Stäbe *ad*, *bd*, *cd* gegeben sind, löst *H. Müller-Breslau*[67]) in Anlehnung an das Verfahren *Williots*. Die Projektionen der Verschiebungen der drei Punkte *a*, *b*, *d* auf eine durch sie gelegte Grundrissebene sind, da sie verschwindend kleine Grössen sind, unabhängig von den Verschiebungen rechtwinklig zur Grundrissebene. Sie können daher nach dem Verfahren *Williots* dargestellt werden. Es ergiebt sich in $O'd'$ die Projektion der Verschiebung des Punktes *d*. Durch den Stab *cd* wird nun rechtwinklig zur Grundrissebene eine Aufrissebene gelegt, in ihr vom Pole O'' aus die Projektion der gegebenen Verschiebung des Punktes *c* durch den Strahl $O''c''$ dargestellt, in c'' die Längenänderunng des Stabes *cd* angefügt und im Endpunkt das Lot errichtet, welches in Verbindung mit der in die Aufrissebene übertragenen Projektion $O'd'$ den Punkt d'' bestimmt. $O''d''$ giebt die Projektion der gesuchten Verschiebung des Punktes *d* auf die Aufrissebene an. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man den *Verschiebungsplan eines räumlichen Fachwerks* einfachster Art ausgehend von einer Figur, deren Lage durch Annahmen bestimmt ist, oder von drei festen Punkten zeichnen.

H. Müller-Breslau[108]) erweitert für ebene Systeme das Anwendungs-

108) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abt. 1, Leipzig 1892, p. 68 ff.

gebiet des *Williot*schen Verfahrens, indem er zeigt, wie in dem häufig vorkommenden Falle von *Scheibengebilden* zu verfahren ist, welche insofern eine ähnliche Gliederung aufweisen, wie die Fachwerke einfachster Art, als man sie in derselben Weise aus Scheiben zusammensetzen kann, wie jene aus Stäben. Die einzelnen Scheiben gehorchen dem Bildungsgesetz des einfachen Fachwerks. Man kann sie ersetzen durch eine stabile Anordnung fingierter Stäbe zwischen den Punkten, in welchen die Scheiben untereinander verbunden sind, und erhält dann statt des Scheibengebildes ein fingiertes Fachwerk einfachster Art. Es ist also nur erforderlich, durch einen besonderen Verschiebungsplan für jede Scheibe die Längenänderungen der Sehnen zu bestimmen, in welche die fingierten Stäbe eingefügt sind.

Ein nach dem bisher beschriebenen Verfahren gezeichneter Verschiebungsplan wird nun im allgemeinen infolge der über die Lage des Fachwerks getroffenen drei Voraussetzungen die gegebenen Auflagerbedingungen nicht oder nur zum Teil erfüllen. Der *zweite Schritt* bei Zeichnung eines Verschiebungsplanes besteht dann darin, diese Bedingungen zu erfüllen. Man lässt die Voraussetzungen, welche den Auflagerbedingungen nicht entsprechen, wieder fallen. Damit geht das System in eine kinematische Kette mit einer, zwei oder drei Bewegungsfreiheiten über. Es kann durch eine zwangläufige Bewegung in die durch die Auflagerbedingungen gegebene Lage zurückgeführt werden. Den Verschiebungsplan dieser Bewegung des nunmehr starren Systems, deren Wesen bereits von *Skibinsky*[109]) besprochen ist, hat zuerst *O. Mohr*[73]) gezeichnet. Er stellt die Verschiebungen durch Polstrahlen $m''P$ gemäss des in Nr. 22 besprochenen Verfahrens dar. Es bilden dann nach dem dort Gesagten die Punkte m'' jeder starren Scheibe eine der Scheibe ähnliche, um 90^0 gedrehte Figur. Der zweite Verschiebungsplan ist also durch drei Verschiebungskomponenten bestimmt, er kann gezeichnet werden, sobald ausser dem Pol ein Punkt und eine Gerade als geometrischer Ort eines zweiten Punktes der ähnlichen Figur gefunden sind. Die durch die Auflagerbedingungen und die Längenänderungen der Stäbe bestimmten totalen Verschiebungen der Knotenpunkte sind durch die Vektoren $m''m'$ nach Grösse, Richtung und Sinn gegeben.

O. Mohr[73]) behandelt so den *Balken auf zwei Stützen* und den *Dreigelenkbogen.* Bei ersterem wird in beiden Verschiebungsplänen das feste

---

109) *Skibinsky,* Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke, Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 35 (1883), p. 23.

Auflager festgehalten. Aus dem ersten Verschiebungsplan ergiebt sich für das bewegliche Auflager eine gewisse Verschiebung Ob'. Die Bahn des beweglichen Auflagers bestimmt die Richtung $b''b'$ und damit den zweiten Verschiebungsplan. Bei dem Dreigelenkbogen wird die Verbindung im Mittelgelenk c gelöst und für jede Scheibe ein besonderer erster Verschiebungsplan gezeichnet. Durch den zweiten Verschiebungsplan wird die Verbindung im Mittelgelenk wieder hergestellt. Dieser stellt also eine Drehung jeder Scheibe um das Kämpfergelenk dar und ist durch die Bedingung bestimmt, dass die Punkte c jeder Scheibe gleiche totale Verschiebungen erfahren müssen.

H. Müller-Breslau[108]) stellt die Verschiebungspläne einiger aus *Scheiben und Stäben zusammengesetzter, mehrfach gestützter Systeme* von statisch bestimmter Anordnung dar. Der erste Plan wird auf gewöhnliche Weise gezeichnet. Zur Gewinnung des zweiten Planes bedient er sich der kinematischen Methoden der Polbestimmung oder des Geschwindigkeitsplanes F'. Diese Methoden liefern die Verschiebungsrichtungen eines oder mehrerer Punkte, während aus dem ersten Verschiebungsplan und den Auflagerbedingungen eine Gerade als geometrischer Ort für einen der Punkte m'' gefunden wird. Dasselbe Verfahren verwendet *H. Müller-Breslau* bei solchen Fachwerken, welche dem Bildungsgesetz der Fachwerke einfachster Art nicht entsprechen. Er beseitigt einen oder mehrere Stäbe, zeichnet einen Plan nach *Williot*, indem er die hierzu erforderlichen Annahmen macht, und erfüllt die den beseitigten Stäben entsprechenden Bedingungen durch eine zwangläufige Bewegung der kinematischen Kette, in welche das Fachwerk nach Wegfall der zum Ersatz der beseitigten Stäbe getroffenen Annahmen übergeht. Einen immer, auch in den schwierigsten Fällen zum Ziele führenden Weg bietet das *Ersatzstabverfahren*. Besonders geeignet ist es bei räumlichen Fachwerken der genannten Art.[66]) Es wird in analoger Weise durchgeführt, wie in den in Nr. **22** besprochenen Fällen zur Darstellung des Geschwindigkeitsplanes einer kinematischen Kette. Nur tritt an Stelle der freien Geschwindigkeit der letzteren noch ein Ersatzstab.

31. Darstellung der Formänderungen nach dem Stabzugverfahren. Eine vollständige Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte eines Stabzuges gewinnt *H. Müller-Breslau*[105]) unter der Voraussetzung, dass alle Kräfte P in den Knotenpunkten angreifen, auf folgendem Wege. Er nimmt die Richtung und einen Punkt einer Stabaxe als festliegend an — und zwar aus Gründen der Zweckmässigkeit meist einen Auflagerpunkt und die Richtung des anstossenden Stabes — dann drehen sich alle anderen Stäbe um Winkel ψ, für

welche die Beziehung gilt:

$$\psi_m = \psi_{m-1} + \Delta\vartheta_{m-1};$$

ϑ_{m-1} ist der Winkel zwischen den Stäben $m-1$ und m. Wird nun die Verschiebung des Punktes $m-1$ in einem Verschiebungsplan durch den Polstrahl $Pm-1'$ nach Grösse, Richtung und Sinn dargestellt, so wird die Längenänderung Δs_m des Stabes m im Punkte $m-1'$ unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens durch die Richtung angefügt, im Endpunkt ein Lot errichtet und auf diesem durch Abtragen der Strecke

$$\varrho_m = s_m \psi_m$$

der Punkt m' bestimmt. Der Strahl Pm' stellt die Verschiebung des Punktes m nach Grösse, Richtung und Sinn dar. Die Wiederholung dieses Verfahrens führt schrittweise zur Lösung der Aufgabe, die Knotenpunktverschiebungen des ganzen Stabzuges zu finden. Ebenso verfährt *R. Land*[74]).

Wird der Stabzug in Wirklichkeit in anderer Weise gestützt, als bei Zeichnung des Verschiebungsplanes angenommen ist, so ist noch eine Drehung des starren Stabzuges erforderlich, um die Auflagerbedingungen wiederherzustellen. Diese Bewegung wird in der von *O. Mohr* (vgl. Nr. **30**) angegebenen Weise dargestellt.

Die Anwendung des Stabzugverfahrens setzt ausser den Längenänderungen Δs der Stäbe die Kenntnis der Winkeländerungen $\Delta\vartheta_m$ voraus. Für einen *Stabzug mit gelenkartigen Knoten* sind diese aus den Änderungen der Dreieckswinkel des Fachwerks mit Hilfe der Gleichungen (65) zu berechnen. Die Werte ϱ können dann auf graphischem Wege ermittelt werden, indem man nach den Knotenpunktverschiebungen des Stabzuges unter der Annahme fragt, dass die Längenänderungen der Stäbe verschwinden. Der Verschiebungsplan besteht dann aus einem Linienzug, dessen Seiten mit den entsprechenden Seiten des Stabzuges rechte Winkel einschliessen und dessen Eckpunkte auf Parallelen liegen, die durch die Knickpunkte eines zu den Gewichten $\Delta\vartheta$ mit der Polweite 1 gezogenenen Seilpolygones bestimmt sind. Die Winkeländerung eines *biegungsfesten Stabzuges* wird nach Gleichung (66) berechnet. Die Ermittelung der Werte ϱ kann ebenfalls durch ein graphisches Verfahren erfolgen, welches sich des Seilpolygones der als Belastungsflächen aufgefassten Momentenflächen für den gestreckten Stabzug bedient und die ϱ als Differenzen zweier aufeinanderfolgender Ordinaten dieses Seilpolygons liefert.

Das Stabzugverfahren leistet für das Fachwerk im wesentlichen

dasselbe, wie der Verschiebungsplan *Williots*. Es giebt übersichtlichere Figuren und verdient namentlich dann den Vorzug, wenn sich die den Punkt m' nach *Williot* bestimmenden Lote unter spitzem Winkel schneiden. Das Stabzugverfahren wird ferner mit Vorteil verwendet, wenn aus einer gegebenen Biegungslinie und der bekannten Verschiebung irgendeines Knotenpunktes die totalen Verschiebungen der Knotenpunkte zu bestimmen sind. Man kann dann ausgehend von diesem Knotenpunkt einen Verschiebungsplan zeichnen, dessen Punkte m' auf einer durch die Biegungslinie bestimmten Schar von Parallelen liegt. Hierzu sind nur die Längenänderungen Δs erforderlich. Besonders übersichtlich wird diese Darstellung der totalen Verschiebungen, wenn alle Δs verschwinden, weil dann der Verschiebungsplan aus einem Linienzug besteht, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges gerichtet sind. Das kann durch einen stellvertretenden Stabzug starrer Stäbe der in Nr. 28 besprochenen Art erreicht werden.

Die *Längenänderung der Sehne* zwischen zwei beliebigen Knotenpunkten eines *Stabzuges* ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta \vartheta_m + \sum_1^{n} \Delta s_m \cos \varphi_m,$$

in welcher y_m den Abstand des Knotenspunktes m von der Sehne und φ_m den Neigungswinkel des Stabes m gegen diese bezeichnen.

32. Lösung des Formänderungsproblems mit Hilfe der Elastizitätsellipse. Eine Lösung des Formänderungsproblems, welche von allen bisher besprochenen Methoden grundsätzlich abweicht, gewinnt *W. Ritter*[110]) aus der *Culmann*schen Theorie der Zentralellipse. Während nämlich bei jenen Methoden die Lösung des Spannungsproblems vorausgesetzt werden muss, bestimmt *W. Ritter* die elastischen Formänderungen unmittelbar aus den Stabquerschnitten und den äusseren Kräften. Sein Verfahren ist daher besonders geeignet, den Einfluss veränderlicher Belastung auf die elastischen Verschiebungen einzelner Punkte darzustellen.

Zur Entwicklung des Verfahrens für den *steifen Stab* betrachtet *W. Ritter* ein von zwei benachbarten Querschnitten begrenztes Element von der Länge ds, auf welches eine Normalkraft P und eine Querkraft Q wirken. Beide Kräfte liegen in der durch die Stabaxe und eine Hauptaxe der Zentralellipse des Querschnitts bestimmten Ebene, ihre Resultante sei R. Nach der Theorie *Culmanns* dreht dann die Kraft P den einen

110) *W. Ritter*, Der elastische Bogen, Zürich 1886, und Anwendungen der graphischen Statik, T. 1 und 2, Zürich 1888/1890.

Querschnitt des Balkenelementes gegen den anderen um die Antipolare ihres Angriffspunktes A in bezug auf die Zentralellipse. Die Querkraft Q verschiebt die Querschnitte parallel gegeneinander. Mithin ergiebt sich als *Gesamtverschiebung* eine Drehung des einen Querschnitts gegen den anderen um eine ausserhalb des Querschnitts liegende und zu der genannten Antipolaren parallele Axe. Ihr Schnittpunkt mit der Ebene der Kraftlinie und Stabaxe ist der Antipol der Resultante R in bezug auf eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Schwerpunkt des Balkenelementes liegt, deren kleine Axe mit der in die Kraftebene fallenden Axe der Zentralellipse identisch ist, und deren grosse Axe sich zur kleinen verhält wie $\sqrt{\varkappa E} : \sqrt{G}$ ($\varkappa$ ist der Koeffizient der Schubspannung gemäss Gleichung (42b). Diese Ellipse wird *Elastizitätsellipse des Stabelementes* genannt.

Von der elastischen Formänderung des einzelnen Stabelementes geht *W. Ritter* zu derjenigen des ganzen Stabes über, indem er zunächst die Annahme macht, dass nur ein Stabelement elastisch sei. Dann gilt die oben entwickelte Beziehung offenbar auch für die gegenseitige Verschiebung der beiden Stabteile, welche durch das elastische Stabelement getrennt werden. Ein Stabteil dreht sich also gegen den andern um den Antipol der Resultierenden R in bezug auf die Elastizitätsellipse. Die Grösse des Drehungswinkels ist nach dem *Euler*schen Ansatz gegeben durch

$$\delta \varphi = R \cdot r \cdot \frac{ds}{EJ},$$

wenn r den Abstand des Schwerpunktes des Stabelementes von der Resultierenden R bezeichnet. Hieraus folgt für die relative Verschiebung eines Punktes A des einen Stabteiles in der Richtung einer beliebigen Axe X gegenüber dem anderen Stabteil der Wert

$$\delta x = Rr \cdot d \cdot \frac{ds}{EJ},$$

wo d der Abstand des Antipoles der Resultante R in bezug auf die Elastizitätsellipse von der durch den Punkt A gehenden Parallelen zur Axe X ist. Man kann nun den Ausdruck $\frac{ds}{EJ}$ als Inhalt einer Figur deuten, deren Zentralellipse mit der Elastizitätsellipse identisch ist. Dann ist $r \cdot d \cdot \frac{ds}{EJ}$ das Zentrifugalmoment dieser Figur in bezug auf die Richtungslinie von R und die Parallele zur Axe X durch den Punkt A. *W. Ritter* bezeichnet den Wert $\frac{ds}{E \cdot J}$ kurz als das „Gewicht" des Stabelementes. Für ein *endliches elastisches Stück* AB eines Stabes erhält man somit die gegenseitige Drehung der Querschnitte A und B

und der jenseits dieser liegenden nicht deformierten Stabenden sowie die relative Verschiebung eines Punktes auf einer Seite des Stückes AB gegen den auf der anderen Seite liegenden Stabteil durch Summierung der einem Stabelement entsprechenden Winkel $\delta\varphi$ und Verschiebungen δx über das Stück AB. Diese Summierung erfolgt durch Vereinigung aller „Gewichte" mit ihren Zentralellipsen zu einem „Gesamtgewicht" mit der zugehörigen Ellipse nach den Gesetzen der Theorie der Trägheitsellipse. Die so gewonnene Ellipse ist die *Elastizitätsellipse des Stabstückes AB. W. Ritter* formuliert das Resultat in dem Satz: „Belastet man die Schwerpunkte der Stabelemente mit den Gewichten $\frac{ds}{EJ}$, weist ihnen ihre Elastizitätsellipsen als Zentralellipsen zu und vereinigt sämtliche Ellipsen zu einer Gesamtellipse, so vollzieht das eine Stabende gegenüber dem anderen eine Drehung um den Antipol der äusseren Kraft hinsichtlich der Gesamtellipse. Der Drehungswinkel ist gleich der Kraft mal dem auf die Kraftrichtung bezogenen statischen Moment des Gesamtgewichtes, und die Verschiebung des einen Stabendes längs einer beliebigen Axe ist gleich der Kraft mal dem auf die Kraftrichtung und diese Axe bezogenen Zentrifugalmomente des Gesamtgewichtes."

Aus diesem Satz folgen einige besondere Beziehungen:

„Steht ein Stab unter dem Einfluss eines Kräftepaares, so dreht sich ein Stabende gegen das andere um den Mittelpunkt der Elastizitätsellipse."

„Geht die Resultante R durch den Mittelpunkt der Ellipse, so vollzieht ein Stabende gegen das andere eine Parallelbewegung senkrecht zu dem der Kraftlinie konjugierten Durchmesser."

„Dreht sich die Kraft R um ihren Angriffspunkt, so ist die relative Bahn des Endpunktes A des belasteten Stabteiles sowie aller mit A starr verbundenen Punkte gegenüber dem Stabteil jenseits B eine Ellipse. Die beiden Kraftrichtungen, welche die grösste und kleinste Verschiebung hervorrufen, stehen senkrecht aufeinander."

Analoge Überlegungen, wie für den steifen Stab, führen auch für das *Fachwerk* zur Einführung einer Elastizitätsellipse. Verändert in einem Fachwerk nur *ein* Stab seine Länge, so vollziehen die beiden durch den Stab getrennten Fachwerkteile eine gegenseitige Drehung, deren Winkel $\delta\varphi = Rr\frac{\varrho}{h^2}$ ist, und deren Mittelpunkt im Drehpunkt des Stabes liegt. Hier bezeichnet h den Abstand des Stabes von seinem Drehpunkt. Die Grösse $\frac{\varrho}{h^2}$ nennt *W. Ritter* wieder das „Gewicht" des Stabes. Die relative Verschiebung irgendeines Punktes des einen

Fachwerkteiles gegen den anderen in der Richtung einer Axe X ist gleich der äusseren Kraft mal dem Zentrifugalmoment des im Drehpunkt konzentrierten Gewichtes $\frac{\varrho}{h^2}$, bezogen auf die Richtungslinie der Kraft und die Verschiebungsaxe. Erleiden *mehrere oder alle* Stäbe eine elastische Formänderung, so kann man die in den Drehpunkten der elastischen Stäbe angreifend gedachten Gewichte $\frac{\varrho}{h^2}$ zu einem Gesamtgewicht mit der zugehörigen Zentralellipse vereinigen. Man erhält in ihr die *Elastizitätsellipse* des fraglichen Fachwerkteiles und damit die Grundlage für die Übertragung des obigen Satzes von *W. Ritter* auf das Fachwerk.

33. Der Einfluss der Schubspannung auf die Durchbiegung des steifen Stabes. Die angreifenden Kräfte mögen in der X, Z-Ebene liegen, welche eine Symmetrieebene des Stabes sei. *F. Grashof*[111]) giebt für die Durchbiegung den Wert:

$$\delta_x' = \frac{1}{G}\int_0^x \tau_y \, dx,$$

wenn τ_y durch die Gleichung (42a) bestimmt ist.

W. Ritter[110]) berücksichtigt die Schubspannung, indem er bei der Darstellung der elastischen Linie mit Hilfe eines Seilpolygons nach *O. Mohr* das elastische Gewicht jedes Balkenelementes nicht im Schwerpunkt, sondern im Antipol der angreifenden Kraft in bezug auf die Elastizitätsellipse angreifen lässt. *A. Castigliano* tut dies durch einen entsprechenden Zusatz zur Formänderungsarbeit (vgl. Gleichung (24)). *A. Zschetsche*[112]) findet unter der Annahme einer mittleren Schubspannung nach Gleichung (42b) den Wert:

$$\delta_x' = \frac{\varkappa M_x}{FG}.$$

Die durch die Schubkräfte erzeugte Biegungslinie ist also affin mit der Momentenlinie. Aus diesem Verhältnis folgert *R. Land*[113]) die Darstellung der Biegungslinie infolge der Schubspannungen durch eine Seillinie, welche zur gegebenen Belastung mit der Polweite $H = \frac{1}{\varkappa} FG$ gezogen wird. *H. Müller-Breslau*[114]) berücksichtigt den

111) *F. Grashof,* Theorie der Elastizität u. Festigkeit, Berlin 1878, p. 214.

112) *A. Zschetsche,* Einfluss der Schubkräfte auf die Biegung einfacher Vollwandträger, Zentralblatt der Bauverw. 1893, p. 386.

113) *R. Land,* Einfluss der Schubkräfte auf die Biegung statisch bestimmter und die Berechnung statisch unbestimmter gerader vollwandiger Träger, Zeitschr. f. Bauwesen 44 (1894), p. 611.

114) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abt. 2, Leipzig 1908, p. 16 u. 479.

Einfluss der Schubspannungen durch das zusätzliche elastische Gewicht

$$w'_m = \frac{EJ_c}{G}\left[\frac{\varkappa_{m+1}Q_{m+1}}{F_{m+1}} - \frac{\varkappa_m Q_m}{F_m}\right].$$

Hierbei ist die Polweite $H = EJ_c$ angenommen. Ferner giebt er Formeln, welche die Werte ϱ des Stabzugverfahrens infolge der Schubspannungen ausdrücken.

V. Theorie der statisch unbestimmten Systeme.

34. Allgemeiner Gang der Untersuchung. Die *Ermittelung des Spannungszustandes* statisch unbestimmter Systeme erfordert nach den Ausführungen in Nr. **14** die gleichzeitige Benutzung der Gleichungen des Gleichgewichts sowie der Elastizitäts- und Auflagerbedingungen. Aus diesen beiden Gruppen sind eine Reihe von *Bedingungsgleichungen* zu gewinnen, welche nur die statisch unbestimmten Grössen als Unbekannte enthalten und deren Berechnung ermöglichen. Ist dies geschehen, dann können alle statischen Aufgaben mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein gelöst werden, die weitere Behandlung deckt sich also mit der statisch bestimmter Systeme.

Die *Bedingungsgleichungen* für die *statisch unbestimmten Grössen* erhält man aus folgender Erwägung: Jedes statisch bestimmte Hauptsystem, welches man aus dem vorliegenden statisch unbestimmten System durch Beseitigung der überzähligen Konstruktionsteile bilden kann, muss unter dem Einfluss der äusseren Kräfte und der statisch unbestimmten Grössen eine solche Formänderung erfahren, dass die Wege der statisch unbestimmten Grössen mit der Formänderung übereinstimmen, welche die überzähligen Konstruktionsteile unter dem Einfluss der in ihnen wirkenden statisch unbestimmten Grössen erleiden. Demgemäss werden zuerst die *Gleichgewichtsbedingungen* aufgelöst, indem die Spannungsgrössen der überzähligen Konstruktionsteile als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden. Dann erhält man die *Spannungen* eines statisch bestimmten Hauptsystems als lineare Funktionen der gegebenen Lasten und der statisch unbestimmten Grössen, und weiterhin aus den *Elastizitäts- und Auflagerbedingungen* die *Formänderungen* als lineare Funktionen derselben Grössen sowie der Temperaturänderungen. Andererseits ergeben sich aus den *Elastizitätsbedingungen* die *Formänderungen* der überzähligen Konstruktionsteile als lineare Funktionen der in ihnen wirkenden statisch unbestimmten Grössen und der Temperaturänderungen. Durch Vergleich dieser Formänderungen mit den entsprechenden des betrachteten statisch bestimmten Hauptsystems erhält man schliesslich

ebenso viele lineare Bedingungsgleichungen, als statisch unbestimmte Grössen vorhanden sind. Den beschriebenen Weg haben *J. Cl. Maxwell* und *A. Castigliano*, letzterer bei Anwendung seines zweiten Lehrsatzes, eingeschlagen.

Man kann beim Fachwerk aber auch von einer allgemeineren Erwägung ausgehen, analog derjenigen, welche zur Aufstellung der Kompatibilitätsbedingungen für das Kontinuum führt, indem man nach den Bedingungen fragt, welche die *Längenänderungen* der Stäbe bzw. die mit ihnen durch das *Hooke*sche Gesetz verbundenen *Spannkräfte* erfüllen müssen, damit der Zusammenhang des Systems bei der Formänderung gewahrt bleibt. Diese Bedingungen hat *O. Mohr* aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen, *F. Menabrea* und *A. Castigliano* mit Hilfe des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit gewonnen. Sie ergeben sich auch unmittelbar aus den geometrischen bzw. den Elastizitätsbedingungen und den Auflagerbedingungen durch Elimination der Verschiebungskomponenten. Letzten Endes laufen alle drei Ableitungen auf denselben Rechnungsgang hinaus. In diesen Bedingungen hat man nun ebenso viele lineare Gleichungen zwischen den Längenänderungen der Stäbe bzw. den Spannkräften, als statisch unbestimmte Grössen vorhanden sind. Sie gehen unmittelbar in die gesuchten Bedingungsgleichungen über, wenn man in ihnen alle Spannkräfte eliminiert, deren Elimination die Gleichgewichtsbedingungen ermöglichen, das sind die Spannkräfte eines statisch bestimmten Hauptsystems.

Indessen, welchen Ausgangspunkt man auch wählen mag, der Rechnungsgang, welcher zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen führt, ist im wesentlichen immer derselbe. Die verschiedenen Methoden zur Gewinnung der gesuchten Gleichungen sind deshalb in folgendem nach den prinzipiellen Hilfsmitteln geordnet, deren sie sich bedienen.

35. Herleitung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen mit Hilfe von Arbeitsgleichungen. Auf diesem Wege gab die erste Theorie zunächst des statisch unbestimmten ebenen *Fachwerks J. Cl. Maxwell*[115]), sie umfasst aber ohne weiteres auch räumliche Systeme. Nachdem $r + a - 3k$ unbekannte Spannkräfte $X_a, X_b, X_c, \ldots$ geeignet ausgewählt sind, d. h. so, dass die übrigen $3k - a$-Stäbe ein statisch bestimmtes Hauptsystem bilden,

115) *J. Cl. Maxwell,* On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, Philos. Mag. (4) 27 (1864), p. 294 = Scientific Papers 1, Cambridge 1890, p. 598.

gewinnt er die Spannkräfte der letzteren aus den Gleichgewichtsbedingungen in der linearen Form:

$$S = S_0 + X_a S_a + X_b S_b + X_c S_c + \cdots \tag{69}$$

Hierin bedeutet S_0 die Spannkraft, welche in einem Stab des statisch bestimmten Hauptsystems durch die äusseren Kräfte P hervorgerufen wird, wenn alle statisch unbestimmten Grössen X verschwinden. Die Koeffizienten S_a, S_b ... können als Spannkräfte gedeutet werden, welche entstehen, wenn nacheinander $X_a = 1$, $X_b = 1$ ... als Last wirkt, während alle anderen X und ebenso die äusseren Kräfte P verschwinden. *Maxwell* berechnet nun aus seiner Grundgleichung (51) die gegenseitigen Verschiebungen δ_a. δ_b ... derjenigen Knotenpunkte des statisch bestimmten Hauptsystems, in welchen die überzähligen Stäbe a, b ... angreifen. Er erhält so, indem er $\Delta s = S\varrho$ setzt und den Wert für S aus Gleichung (69) einführt:

$$\delta_a = -\sum S_a \Delta s, \quad \delta_b = -\sum S_b \Delta s, \quad \ldots$$

Nun müssen die gegenseitigen Verschiebungen δ_a, δ_b ... gleich den Längenänderungen der Stäbe a, b ... infolge der Spannkräfte X_a, X_b ... sein, also:

$$\delta_a = X_a \varrho, \quad \delta_b = X_b \varrho, \quad \ldots$$

Damit ergeben sich nach Ausführung der obengenannten Substitution für die *statisch unbestimmten Grössen* die $m + a - 3k$ *Bedingungsgleichungen*:

$$\begin{array}{l} -\sum S_0 S_a \varrho - X_a \sum S_a^2 \varrho - X_b \sum S_a S_b \varrho - X_c \sum S_a S_c \varrho \cdots = X_a \varrho, \\ -\sum S_0 S_b \varrho - X_a \sum S_a S_b \varrho - X_b \sum S_b^2 \varrho - X_c \sum S_b S_c \varrho \cdots = X_b \varrho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{70}$$

Die Summen erstrecken sich über alle Stäbe des gewählten statisch bestimmten Hauptsystems. An Stelle überzähliger Auflager werden fingierte Auflagerstäbe eingeführt und ihre Längenänderungen den Auflagerverschiebungen gleichgesetzt.

O. Mohr[116]) geht von der Gleichung (5) in der Form

$$\sum \bar{S} \Delta s = 0$$

aus, welche er aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ableitet, indem er die äusseren Kräfte des gedachten Belastungszustandes ver-

---

116) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger, Zeitschr. des Ing.- u. Arch.-Vereins zu Hannover 20 (1874), p. 223 und Beitrag zur Theorie des Fachwerks, ebd. 20 (1874), p. 509, u. 21 (1875) p. 17, sowie Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Civilingenieur 31 (1885), p. 289, und Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906, p. 381.

schwinden lässt. Die Gleichung besteht dann für zunächst noch willkürliche Längenänderungen Δs und für jedes Gleichgewichtssystem der $\overline{S}$, welches ohne Belastung durch äussere Kräfte möglich ist, d. h. für jedes mögliche Selbstspannungssystem. Die Summation erstreckt sich über *alle* Fachwerkstäbe einschliesslich der Stützenstäbe, welche den Betrag Null ergeben, wenn die Stützenlage sich nicht ändert, oder dem Gleichgewichtssystem $\overline{S}$ in den Stützenstäben keine Spannkräfte entsprechen. Man erhält alle möglichen voneinander unabhängigen Selbstspannungssysteme, indem man nacheinander einer jeden statisch unbestimmten Grösse den Wert 1, allen anderen den Wert Null beilegt. Daher ist die Anzahl der voneinander unabhängigen Gleichungen für jedes Formänderungssystem ebenso gross wie die Zahl der statisch unbestimmten Grössen. *O. Mohr* führt nun die wirklichen Längenänderungen $\Delta s = S\varrho$ ein, eliminiert die Spannkräfte der Stäbe eines statisch bestimmten Hauptsystems vermittelst Gleichungen von der Form der Gleichung (69) und erhält so die Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen in einer Form, die sich von den Gleichungen (70) *Maxwells* nur dadurch unterscheidet, dass das Glied $X_a\varrho$, $X_b\varrho$ ... in dem Summenausdruck $X_a\sum S_a^2\varrho$, $X_b\sum S_b^2\varrho$ ... mit enthalten ist. Den Einfluss der Änderung der *Stabtemperaturen* des spannungslosen Anfangszustandes berücksichtigt *O. Mohr*, indem er $\Delta s = S\varrho + \varepsilon t s$ setzt. Die *Bedingungsgleichungen* für die *statisch unbestimmten Grössen* lauten dann:

$$(71)\quad \begin{cases} 0 = \sum S_0 S_a \varrho + \sum S_a \varepsilon t s + X_a \sum S_a^2 \varrho + X_b \sum S_a S_b \varrho + X_c \sum S_a S_c \varrho + \cdots \\ 0 = \sum S_0 S_b \varrho + \sum S_b \varepsilon t s + X_a \sum S_a S_b \varrho + X_b \sum S_b^2 \varrho + X_c \sum S_b S_c \varrho + \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

J. Cl. Maxwell hat Temperaturänderungen nicht berücksichtigt. Seine Grundgleichung ermöglicht jedoch die Berechnung ihres Einflusses auf demselben Wege, den *Mohr* eingeschlagen hat.

Den gleichen Dienst wie die Arbeitsgleichung leistet in manchen Fällen das Verfahren *C. Fränkels*[117]) (vgl. Nr. **24**).

Eine Erweiterung erfahren die Bedingungsgleichungen *Maxwells* durch *H. Müller-Breslau.*[118]) Dieser bemerkt, dass es zuweilen zweck-

---

117) *C. Fränkel*, Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken, Civilingenieur 21 (1875), p. 515, und *R. Krohn*, Berechnung kontinuierlicher Fachwerkträger auf Grund der Deformation der einzelnen Fachwerkstäbe, Civilingenieur 26 (1880), p. 583.

118) *H. Müller-Breslau*, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abs. 2, Leipzig 1892, p. 25 ff.

mässig ist, die überzähligen Stabkräfte und Auflagerreaktionen als lineare Funktionen anderer Werte einzuführen, welche dann ebenfalls statisch unbestimmte Grössen X', X'', X''', ... darstellen. Alle Spannkräfte S und Auflagerreaktionen C lassen sich dann infolge des Superpositionsgesetzes auf die Form bringen

$$(72)\qquad \begin{aligned} S &= S_0 - S'X' - S''X'' - S'''X''' - \cdots, \\ C &= C_0 - C'X' - C''X'' - C'''X''' - \cdots, \end{aligned}$$

S_0 und C_0 bedeuten die Spannkräfte und Auflagerreaktionen des statisch bestimmten Hauptsystems, in welches das Fachwerk übergeht, sobald sämtliche Grössen X verschwinden. Ferner sind S', S'', S''', ... und C', C'', C''', ... diejenigen Werte, welche in dem statisch unbestimmten System jeweils den Spannungszuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$, ... entsprechen, für welche alle anderen X und die Lasten P verschwinden. Die Arbeitsgleichungen für die Zustände $X' = -1$, $X'' = -1$, ... ergeben *die Bedingungsgleichungen:*

$$(73)\qquad \begin{aligned} L' - \Sigma S'\varepsilon ts &= \Sigma S_0 S'\varrho - X'\Sigma S'^2\varrho - X''\Sigma S'S''\varrho \\ &\quad - X'''\Sigma S'S'''\varrho - \cdots, \\ L'' - \Sigma S''\varepsilon ts &= \Sigma S_0 S''\varrho - X'\Sigma S'S''\varrho - X''\Sigma S''^2\varrho \\ &\quad - X'''\Sigma S''S'''\varrho - \cdots, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

L', L'', ... bezeichnen die von den Auflagerkräften C', C'', ... verrichteten virtuellen Arbeiten. Die Summenausdrücke umfassen alle Stäbe des Fachwerks.

Alle S_0 nicht enthaltenden Glieder der Gleichungen (73) sind unabhängig von den Lasten und brauchen in jedem Falle nur einmal berechnet zu werden. Dagegen sind die Werte der S_0 enthaltenden Summenausdrücke durch die Grösse und Stellung der Lasten bedingt. Für ihre Bestimmung empfiehlt *H. Müller-Breslau*[119]) folgendes Verfahren als das in den meisten Fällen veränderlicher Belastung zweckmässigste. Er gewinnt es durch Heranziehung der Arbeitsgleichung für den Belastungszustand $X = 0$ — d. h. für die Belastung des statisch bestimmten Hauptsystems durch die gegebenen Lasten — und für Verschiebungszustände, die den jeweiligen Belastungszuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, ... entsprechen. Sind δ_m', δ_m'', ... die Verschiebungen, welche der Angriffspunkt m der Last P_m in der Rich-

119) *H. Müller-Breslau,* Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 35 (1889), p. 418, und Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, p. 34; vgl. auch Fussnote 118.

tung von P_m erfährt, sobald auf das statisch bestimmte Hauptsystem nur die Ursachen $X' = -1, X'' = -1, \ldots$ wirken, so ist:

$$(74) \qquad \begin{array}{c} \sum S_0 S' \varrho = \sum P_m \delta'_m, \\ \sum S_0 S'' \varrho = \sum P_m \delta''_m. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Somit lassen sich die fraglichen Summengrössen leicht aus Verschiebungsplänen für die genannten Ursachen ermitteln. Haben insbesondere alle Lasten ein und dieselbe Richtung, so ist das Biegungspolygon der Gurtung, in deren Knotenpunkten die Lasten angreifen, in dieser Richtung und infolge der Ursachen $X' = -1$, $X'' = -1, \ldots$ die Einflusslinie für die jeweiligen Summengrössen. Das Verfahren vereinfacht die Untersuchung ganz wesentlich in den Fällen veränderlicher Belastung, insonderheit lässt es schnell die ungünstigsten Laststellungen erkennen. Auch alle anderen Summenausdrücke der Gleichungen (73) können als Verschiebungen gedeutet werden, doch ist im allgemeinen ein Vorteil damit nicht verbunden.

O. Mohr[116]) bemerkt vermöge seiner in Nr. **4** erwähnten Auffassung von der Struktur elastischer Körper, dass man das Prinzip der virtuellen Verrückungen auch zur Untersuchung statisch unbestimmter *biegungsfester Stäbe* verwenden kann. Er zeigt dies in einer Anmerkung an dem Beispiel des kontinuierlichen Balkens, indem er die Gleichungen *Clapeyrons* (vgl. Nr. **42**) aus den Bedingungsgleichungen herleitet, welche die statisch unbestimmten Grössen eines kontinuierlichen Fachwerkbalkens ergeben. Einen ähnlichen Hinweis giebt *E. Winkler*[120]) für vollwandige Bögen. Die erste Anwendung hat *M. Koenen*[121]) gegeben, welcher aus dem Prinzip Bedingungsgleichungen zur Berechnung der Reaktionen der Mittelstützen kontinuierlicher Balken und der Einspannungsmomente eingespannter Balken herleitet. Weitere Anwendungen finden sich in verschiedenen Arbeiten von *H. Müller-Breslau.*[87])

Die allgemeine Darstellung der Theorie *statisch unbestimmter elastisch isotroper Körper*, in Sonderheit des biegungsfesten elastischen Stabes auf der Grundlage des Prinzips der virtuellen Verrückungen hat *H. Müller-Breslau*[122]) gegeben. Er nimmt an, dass es gelingt, die

120) *E. Winkler,* Beitrag zur Theorie der Bogenträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 25 (1879), p. 199.

121) *M. Koenen,* Vereinfachung der Berechnung kontinuierlicher Balken mit Hilfe des Satzes von der Arbeit, Wochenblatt für Arch. u. Ing. 3 (1882), p. 402.

122) *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig

Auflagerkräfte C sowie die Spannungskomponenten σ und τ als lineare Funktionen gegebener Lasten P und der statisch unbestimmten Grössen X in der Form:

$$
(75)\qquad
\begin{aligned}
C &= C_0 + C'X' + C''X'' + C'''X''' + \cdots, \\
\sigma &= \sigma_0 + \sigma'X' + \sigma''X'' + \sigma'''X''' + \cdots, \\
\tau &= \tau_0 + \tau'X' + \tau''X'' + \tau'''X''' + \cdots.
\end{aligned}
$$

darzustellen. Hierin sind $\sigma_0, \sigma', \sigma'', \ldots; \tau_0, \tau', \tau'', \ldots; C_0, C', C'', \ldots$ Spannungen und Auflagerkräfte, welche den Belastungszuständen $X = 0$, $X' = 1$, $X'' = 1, \ldots$ entsprechen. Sodann werden die Arbeitsgleichungen der Reihe nach für die Belastungszustände $X' = 1$, $X'' = 1, \ldots$ und den wirklichen Verschiebungszustand angeschrieben:

$$
(76)\qquad
\begin{aligned}
\sum C'\,\Delta c &= \int (\sigma_x'\,\varepsilon_x + \sigma_y'\,\varepsilon_y + \sigma_z'\,\varepsilon_z + \tau_x'\,\gamma_x + \tau_y'\,\gamma_y + \tau_z'\,\gamma_z)\,dv, \\
\sum C''\,\Delta c &= \int (\sigma_x''\,\varepsilon_x + \sigma_y''\,\varepsilon_y + \sigma_z''\,\varepsilon_z + \tau_x''\,\gamma_x + \tau_y''\,\gamma_y + \tau_z''\,\gamma_z)\,dv, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Werden in diesen die Verzerrungskomponenten durch die Spannungskomponenten und Temperaturänderungen nach den Gleichungen (40) ausgedrückt und für die Spannungskomponenten die oben aufgestellten Werte eingeführt, so ergeben sich die *Bedingungsgleichungen* zur Berechnung der statisch unbestimmten Grössen in der erforderlichen Anzahl.

Im Falle des *statisch unbestimmten biegungsfesten Stabes*, in welchem im allgemeinen nur die Normalspannungen σ_x berücksichtigt werden, ergeben sich durch Einführung der Werte für σ aus den Gleichungen (75) die Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen in der Form

$$
(77)\qquad
\begin{aligned}
L' - \int \sigma'\,\varepsilon t\,dv &= \int \frac{\sigma_0\sigma'}{E}\,dv + X'\int \frac{\sigma'^2}{E}\,dv + X''\int \frac{\sigma'\sigma''}{E}\,dv + \cdots, \\
L'' - \int \sigma''\,\varepsilon t\,dv &= \int \frac{\sigma_0\sigma''}{E}\,dv + X'\int \frac{\sigma'\sigma''}{E}\,dv + X''\int \frac{\sigma''^2}{E}\,dv + \cdots. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Werden die Spannungen σ durch die Komponenten der angreifenden Kräfte nach Gleichung (42) ausgedrückt, die Temperaturänderungen nach Gleichung (42c) angenommen, so lauten die *Arbeitsgleichungen*

1886, p 169 ff., 57 ff., 69 ff., und Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2, Abt. 1, Leipzig 1892, p. 45.

für die Zustände $X = 1$

$$
(78)\quad \begin{aligned}
L' &= \int \frac{N' N}{EF} dx + \int \frac{M' M}{EJ} dx + \int N' \varepsilon t_0 dx + \int M' \varepsilon \frac{\Delta t}{h} dx, \\
L'' &= \int \frac{N'' N}{EF} dx + \int \frac{M'' M}{EJ} dx + \int N'' \varepsilon t_0 dx + \int M'' \varepsilon \frac{\Delta t}{h} dx, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

welche mit

$$
(79)\quad \begin{aligned}
N &= N_0 + N' X' + N'' X'' + N''' X''' + \cdots, \\
M &= M_0 + M' X' + M'' X'' + M''' X''' + \cdots
\end{aligned}
$$

die *Bedingungsgleichungen* für die statisch unbestimmten Grössen ergeben.

Die Arbeitsgleichung für den Belastungszustand $X = 0$, also die Belastung des statisch bestimmten Hauptsystems durch die gegebenen Lasten P_m und die Verschiebungszustände, welche den Belastungszuständen $X' = 1, X'' = 1, \dots$ entsprechen, führt zu den Beziehungen

$$
(80)\quad \begin{aligned}
\int \frac{\sigma_0 \sigma'}{E} dv &= \sum P_m \delta_m', \quad \dots\dots \\
\int \frac{\sigma_0 \sigma''}{E} dv &= \sum P_m \delta_m''.
\end{aligned}
$$

Mithin kann die Berechnung der von den Lasten abhängigen Glieder wie auch beim Fachwerk aus Verschiebungsplänen, gegebenen Falles aus Biegungslinien für die Ursachen $X' = 1$, $X'' = 1, \dots$ erfolgen.

36. Herleitung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen mit Hilfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen. Ein zweites sehr übersichtliches Verfahren zur Gewinnung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen ist auf dem Satze *Maxwells* von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen begründet und zuerst von *O. Mohr*[116]) angegeben. Es ist in gleicher Weise für das Fachwerk wie für das Stabwerk geeignet.

O. Mohr verwendet das Verfahren zur Berechnung der Stützenreaktionen der Mittelstützen eines kontinuierlichen Fachwerkbalkens. Die Mittelstützen werden beseitigt gedacht und ihre Reaktionen als unabhängige Kräfte $C_1, C_2, \dots$ positiv im Sinne der Lasten P_m gerechnet, aufgefasst. Es mögen (δ_{mn}), (δ_{1n}), $\delta_{2n})\dots$ die senkrechten Verschiebungen des statisch bestimmten Balkens in den Punkten $m, 1, 2 \dots$ infolge einer fiktiven Belastung durch Q_n im Punkte n einer Mittelstütze bezeichnen. Dann ist nach Gleichung (68) die senkrechte Verschiebung δ_n, welche der statisch bestimmte Balken im

Punkte n infolge der Lasten P_m und der Stützenreaktionen $C_1, C_2, \ldots$ erfährt,

$$\delta_n = \frac{1}{Q_n}\left(\sum P_m(\delta_{mn}) + C_1(\delta_{1n}) + C_2(\delta_{2n}) + \cdots\right).$$

Jetzt werden die δ_n den wirklichen Auflagerverschiebungen gleich gesetzt und ergeben ebensoviele Bedingungsgleichungen zur Berechnung der Reaktionen der Mittelstützen, als deren Anzahl beträgt.

R. Krohn[123]) zeigt die Anwendung des *Maxwell*schen Satzes auf die Ermittlung der Einflusslinie für den Horizontalschub eines Zweigelenkbogens.

In allgemeingültiger Weise entwickelt *H. Müller-Breslau*[124]) das Verfahren, ausgehend vom Superpositionsgesetz. Er fasst zunächst die statisch unbestimmten Grössen $X_a, X_b, X_c, \ldots$ als unabhängige Kräfte auf, welche auf das statisch bestimmte Hauptsystem wirken, und stellt ihre Wege $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \ldots$ als lineare Funktionen der Lasten P_m, der statisch unbestimmten Grössen $X_a, X_b, X_c, \ldots$, des Einflusses der Temperaturänderungen $\delta_{at}, \delta_{bt}, \delta_{ct}, \ldots$ und der Verschiebungen der Stützpunkte des Hauptsystems $\delta_{aw}, \delta_{bw}, \delta_{cw}, \ldots$ dar:

$$\delta_a = \sum P_m \delta_{am} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ab} X_b - \delta_{ac} X_c - \cdots + \delta_{at} + \delta_{aw},$$
$$\delta_b = \sum P_m \delta_{bm} - \delta_{ba} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{bc} X_c - \cdots + \delta_{bt} + \delta_{bw},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hierin sind $\delta_a, \delta_b, \ldots$ positiv im Sinne der negativen Richtungen der $X_a, X_b, \ldots$, und es bezeichnen:

$\delta_{am}, \delta_{bm}, \ldots$ den Einfluss der Ursache $P_m = +1$ auf $\delta_a, \delta_b, \ldots$,
$\delta_{aa}, \delta_{ba}, \ldots$ „ „ „ „ $X_a = -1$ „ $\delta_a, \delta_b, \ldots$,
$\delta_{ab}, \delta_{bb}, \ldots$ „ „ „ „ $X_b = -1$ „ $\delta_a, \delta_b, \ldots$,
$\delta_{ac}, \delta_{bc}, \ldots$ „ „ „ „ $X_c = -1$ „ $\delta_a, \delta_b, \ldots$,
. . . .

Die Wege $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \ldots$ müssen die Bedingungen des vorliegenden statisch unbestimmten Systems erfüllen. Sie sind also entweder den Auflagerverschiebungen gleichzusetzen, wenn es sich um äussere statisch unbestimmte Grössen handelt, oder im Falle innerer statisch unbestimmter Grössen als Funktionen derselben gemäss den elastischen

123) *R. Krohn,* Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 30 (1884), p. 269.

124) *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, p. 139, 4. Aufl. Leipzig 1904, p. 203, und Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. 2 Abt. 1, Leipzig 1892, p. 35.

Eigenschaften der überzähligen Konstruktionsteile sowie der etwaigen Temperaturänderungen darzustellen. Für δ_{aw}, δ_{bw}, δ_{cw} ... ergeben sich aus den Arbeitsgleichungen für die Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ ... und den Verschiebungszustand des starren Systems, d. h. $\Delta s = 0$, die Werte

$$\delta_{aw} = -L_a, \quad \delta_{bw} = -L_b, \quad \delta_{ac} = -L_c, \quad \ldots,$$

wo L_a, L_b, L_c, ... die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte bezeichnen, welche infolge der genannten Zustände an dem statisch bestimmten Hauptsystem angreifen.

Damit wären die *Bedingungsgleichungen* für die *statisch unbestimmten Grössen* in der erforderlichen Anzahl gewonnen. Ihre Form ist jedoch für die Anwendung unbequem, weil die Koeffizienten δ_{ik} jeder Gleichung verschiedenen Verschiebungszuständen entsprechen. Hier ermöglicht nun der *Maxwell-Betti*sche Satz eine sehr zweckmässige Umformung. Nach diesem können die Buchstaben eines Doppelzeigers miteinander vertauscht werden, also kann $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ gesetzt werden. Damit erhält man die *Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen* in der Form

$$\begin{aligned} L_a - \delta_{at} + \delta_a &= \sum P_m \delta_{ma} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ba} X_b - \delta_{ca} X_c - \cdots, \\ L_b - \delta_{bt} + \delta_b &= \sum P_m \delta_{mb} - \delta_{ab} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{bc} X_c - \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{81}$$

Die Koeffizienten jeder Gleichung gehören alle ein und demselben Verschiebungszustand an. Zur Berechnung der statisch unbestimmten Grössen ist es also nur erforderlich, die den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, ... entsprechenden Formänderungen des statisch bestimmten Hauptsystems darzustellen. Im Falle eines einfach statisch unbestimmten Systems, welches von lauter parallelen Lasten angegriffen wird, ergiebt sich so in der Biegungslinie für den Zustand $X = -1$ die Einflusslinie für X.

Die Beziehung zwischen den Gleichungen (81) und (73) wird durch die oben erwähnte Deutung der Werte $\sum S'^2 \varrho$, $\sum S'S'' \varrho$, ..., $\sum S' \varepsilon t s$, ... als Verschiebungen hergestellt. Mit Hilfe der Arbeitsgleichungen für geeignete Belastungs- und Verschiebungszustände findet man, wenn $X' = X_a$, $X'' = X_b$, $X''' = X_c$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \sum S' S'' \varrho &= \delta_{ab} = \delta_{ba}, \\ \sum S'' S''' \varrho &= \delta_{bc} = \delta_{cb}, \\ \sum S' S''' \varrho &= \delta_{ac} = \delta_{ca}, \\ \sum S' \varepsilon t s = \delta_{at}, &\quad \sum S'' \varepsilon t s = \delta_{bt}. \end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich, falls X' eine äussere statisch unbestimmte Grösse ist,

$$\sum S'^2 \varrho = \delta_{aa} \quad \text{und} \quad L' = L_a + \delta_a,$$

dagegen

$$\sum S''^2 \varrho = \delta_{bb} + \frac{1}{X_b} \delta_b \quad \text{und} \quad L'' = L_b,$$

wenn X'' eine innere statisch unbestimmte Grösse ist.

Analoge Beziehungen gelten für die entsprechenden Glieder der Gleichungen (77).

37. Herleitung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen nach dem Verfahren Menabreas und Castiglianos. Das erste allgemeine Verfahren zur Berechnung des statisch unbestimmten *Fachwerks* hat *F. Menabrea*[125]), wenn auch nur in allgemeinen Umrissen gegeben. In der von ihm sogenannten „Elastizitätsgleichung" (vgl. Nr. 7)

$$\sum S \varrho \, \delta S = 0$$

sind die Variationen δS an die Nebenbedingungen gebunden, welche durch Variation der $3k - 6$ unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen erhalten werden. Werden nun mit Hilfe der Nebenbedingungen $3k - 6$ Variationen δS aus der Elastizitätsgleichung eliminiert, so sind die übrigen $r + 6 - 3k$ voneinander unabhängig, mithin müssen ihre Koeffizienten einzeln verschwinden. Es ergeben sich damit $r + 6 - 3k$ Gleichungen, welche in Verbindung mit den $3k - 6$ unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der unbekannten Spannkräfte des Fachwerks ausreichen.

In dieser Weise hat *F. Menabrea* die allgemeine Lösung der Aufgabe dargestellt. Führt man die Rechnung durch, so ergiebt sich folgendes: Die Nebenbedingungen haben die Form der Gleichgewichtsbedingungen für ein Selbstspannungssystem des Fachwerks. Werden die durch sie nicht bestimmbaren $r + 6 - 3k$ Variationen mit δX bezeichnet, so lassen sich die übrigen $3k - 6$ Variationen ausdrücken durch Gleichungen von der Form

$$\delta S = S' \delta X' + S'' \delta X'' + \cdots,$$

oder der Form

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial X'} \delta X' + \frac{\partial S}{\partial X''} \delta X'' + \cdots.$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke in die Elastizitätsgleichung geht

125) *F. Menabrea,* Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques, Paris C. R. 46 (1858), p. 1056.

diese über in

$$\sum S\varrho S'\delta X' + \sum S\varrho S''\delta X'' + \cdots = 0,$$

oder

$$\sum S\varrho \frac{\partial S}{\partial X'}\delta X' + \sum S\varrho \frac{\partial S}{\partial X''}\delta X'' + \cdots = 0.$$

Aus der ersteren folgen $r + 6 - 3k$ Gleichungen

$$\sum S\varrho \bar{S} = 0,$$

aus der zweiten ebensoviele

$$\sum S\varrho \frac{\partial S}{\partial X} = 0.$$

Jene decken sich mit den Gleichungen, aus denen *J. Cl. Maxwell* und *O. Mohr* die Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen hergeleitet haben, diese mit den Gleichungen *A. Castiglianos*. Auf diese im wesentlichen bestehende Identität der Verfahren weist *F. Menabrea*[126]) in einer späteren Arbeit hin. Zu demselben Schluss führt auch der oben (Nr. 8) an zweiter Stelle genannte Beweis, den *A. Castigliano* für den Satz von der kleinsten Arbeit gibt. Denn wie dort der Rechnungsgang, welcher das Minimum der Funktion $\frac{1}{2}\sum S^2\varrho$ ergiebt, identisch ist mit der Auflösung der Elastizitäts- und Auflagerbedingungen, ebenso trifft dies auch für das Verfahren *Maxwells* und *Mohrs* zu.

Infolge der Beziehungen

$$\frac{\partial S}{\partial X'} = S', \quad \frac{\partial S}{\partial X''} = S'', \quad \ldots$$

führt die Methode *Menabreas* und *A. Castiglianos* immer schnell zu den unter (73) wiedergegebenen Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen. Das gilt im Falle von Temperaturänderungen auch von dem Verfahren, welches *H. Müller-Breslau* auf der „ideellen Formänderungsarbeit" begründet hat.

Der Behandlung des Problems der statischen Unbestimmtheit *fester elastischer Körper*, in Sonderheit des *steifen elastischen Stabes* und Stabwerkes hat *A. Castigliano*[127]) neue erfolgreiche Wege eröffnet. Vor ihm ist die Untersuchung nur mit Hilfe der elastischen Linie durchgeführt worden, die Verwendung des Prinzips der virtuellen Ver-

---

126) *F. Menabrea,* Sur la concordance de quelques méthodes générales pour déterminer les tensions dans un système de points réunis par des liens élastiques, Paris C. R. 98 (1884), p. 714.

127) *A. Castigliano,* Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, Turin 1879.

rückungen ist von *O. Mohr* zwar angedeutet, aber nicht weiter verfolgt worden.

A. Castigliano gewinnt die Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen teils mit Hilfe seines zweiten Lehrsatzes, teils mit Hilfe des Satzes von der kleinsten Arbeit. Den letzteren hat er in allgemeiner Weise nur für innerlich statisch unbestimmte Systeme bewiesen. Daher macht er im Falle äußerer statisch unbestimmter Grössen von dem ersteren Gebrauch. Im einzelnen verfährt er folgendermassen:

Nach Bildung eines statisch bestimmten Hauptsystems, an welchem die statisch unbestimmten Grössen als äussere Kräfte betrachtet werden, werden die Komponenten der angreifenden Kräfte für jeden Punkt der Stabaxe, nämlich die Momente, Längs- und Querkräfte, und weiter die Formänderungsarbeit nach Gleichung (23) bzw. (24) als Funktion der gegebenen Lasten sowie der statisch unbestimmten Grössen dargestellt. Der Differentialquotient $\frac{\partial A}{\partial X}$ liefert dann im Falle einer äusseren statisch unbestimmten Grösse deren Weg, also entweder die Verschiebung des Angriffspunktes der Stützkraft X oder die Drehung der Tangente im Angriffspunkt des Einspannungsmomentes X. Durch Gleichsetzung dieser Wege mit den gegebenen Auflagerbedingungen ergeben sich die für X linearen Bedingungsgleichungen. Erfahren die Stützpunkte keine Verschiebungen oder Drehungen der Stabaxe, so folgt

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0.$$

Das Ergebnis benutzt *A. Castigliano* in einigen Fällen — Bogen mit und ohne Kämpfergelenke —, um eine Erweiterung des Satzes von der kleinsten Arbeit auszusprechen, welcher dadurch für alle äusserlich statisch unbestimmten Systeme Gültigkeit erhält, sofern die Voraussetzung verschwindender Auflagerverschiebungen zutrifft.

Im Falle innerlich statisch unbestimmter Systeme gewinnt *A. Castigliano* die Bedingungsgleichungen aus der Beziehung

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0.$$

Er hat das Verfahren an einer Reihe von Beispielen entwickelt, die Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen in allgemeiner Form aber nicht gegeben. Infolge der Beziehungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = \sigma', \quad \frac{\partial \tau}{\partial X} = \tau', \quad \frac{\partial L}{\partial X} = L', \quad \frac{\partial N}{\partial X} = N', \quad \frac{\partial M}{\partial X} = M'$$

ergeben sich nach seinem Verfahren Gleichungen, welche mit denen übereinstimmen, welche das Prinzip der virtuellen Verrückungen liefert.

Auch der Einfluss einer Änderung der Temperatur des spannungslosen Anfangszustandes wird an der Hand eines Beispieles untersucht, und das Ergebnis in einem Lehrsatze ausgesprochen. Der Inhalt desselben deckt sich sachlich mit dem von *H. Müller-Breslau* durch die ideelle Formänderungsarbeit gegebenen Verfahren. Dieses bringt aber den Gegenstand in kürzere und schärfer gefasste Form, indem es lehrt, die Formänderungsarbeit in *Castiglianos* Verfahren im Falle von Temperaturänderungen durch die ideelle Formänderungsarbeit zu ersetzen.

Unabhängig von *A. Castigliano* hat *C. Fränkel*[25]) den Satz von der kleinsten Arbeit zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme benutzt. Eine Reihe wichtiger Anwendungen bringen *J. Melan*[32]) und *H. Müller-Breslau*[128]). In derselben Weise wie die Sätze *Castiglianos* kann man die Sätze *J. Weyrauchs* und *F. Engessers* zur Lösung des Problems der statisch unbestimmten Systeme verwenden.

38. Allgemeine Auflösung der Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen. Die statisch unbestimmten Grössen eines n-fach statisch unbestimmten Systems ergeben sich aus den n linearen Bedingungsgleichungen mit Hilfe von Determinanten in der Form

$$X_k = \pm \frac{D_k}{D}. \tag{82}$$

Mit Rücksicht auf die allein (mit der Belastung) veränderlichen Absolutglieder c_k der Bedingungsgleichungen wird die Zählerdeterminante zweckmässig in Unterdeterminanten aufgelöst:

$$X_k = \pm \frac{1}{D}\left[c_1\Delta_{1k} + c_2\Delta_{2k} + \cdots + c_n\Delta_{nk}\right]. \tag{82a}$$

Die Unterdeterminanten Δ entstehen aus D, wenn die durch Indizes bezeichneten Reihen und Spalten weggelassen werden; sie haben ebenso wie die Determinante D für jedes System feste Werte, brauchen also nur einmal berechnet zu werden.

Der Einfluss der Belastung wird wegen Geltung des Superpositionsgesetzes durch gesonderte Betrachtung jeder Einzellast untersucht. Ist diese von der Grösse 1, dann sind die $c_1, \ldots, c_n$ die Wege der betrachteten Einzellast — oder können als solche gedeutet werden — infolge der Belastungszustände $X_1 = -1$, $X_2 = -1$, ..., $X_n = -1$ des statisch bestimmten Hauptsystems. Zur Ermittlung der statisch

128) *H. Müller-Breslau,* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1886, 3. Aufl., ebd. 1904, p. 72ff.

unbestimmten Grössen sind also die den genannten Belastungszuständen entsprechenden Verschiebungszustände nach Multiplikation mit festen Koeffizienten Δ zu superponieren. Nach dem Superpositionsgesetz wird aber dasselbe Ergebnis auch durch den Verschiebungszustand für eine kombinierte Belastung des statisch bestimmten Hauptsystems erreicht, welche aus den Einzelkräften $X_1 = -\Delta_{1k}$, $X_2 = -\Delta_{2k}, \ldots, X_n = -\Delta_{nk}$ besteht. Dabei erhält man beide Male X_k durch Multiplikation des Ergebnisses mit $\frac{1}{D}$. In dem speziellen Falle senkrechter Lasten ergiebt sich daher die Einflusslinie einer statischen Grösse entweder als Summe der mit Hilfe der Δ reduzierten Biegungslinien für n-einfache Belastungszustände $X_r = -1$ oder als Biegungslinie für den aus n Einzellasten $X_r = -\Delta_{rk}$ zusammengesetzten Belastungszustand.[129]) Der Multiplikator der Einflusslinie ist wieder $\mu = \frac{1}{D}$.

39. Aufstellung von Bedingungsgleichungen mit einer Unbekannten: Graphisches Verfahren. Die Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme nach dem allgemeinen Verfahren der vorigen Nummer ist umständlich und erfordert genaue Zahlenrechnungen[130]), da die Genauigkeit der Determinanten schon durch kleine Ungenauigkeiten ihrer Elemente beeinflusst werden kann. Die Verwendung graphischer Verfahren ist daher meist nicht angängig. Der Gedanke lag nahe, die Bedingungsgleichungen durch geeignete Wahl der statisch unbestimmten Grössen so umzuformen, dass jede nur *eine* Unbekannte enthält. Den ersten Schritt in dieser Richtung hat *R. Krohn*[131]) getan, indem er durch geeignete Bestimmung des Koordinatensystems drei Koeffizienten der allgemeinen Bedingungsgleichungen von der Form $\int xy\,ds$, $\int x\,ds$ und $\int y\,ds$ zum Verschwinden bringt. *O. Mohr*[132]) bemerkt bei Berechnung des symmetrischen Fachwerkbogens mit eingespannten Kämpfern, daß die Summen

$$\sum S_a S_b \varrho\,, \quad \sum S_a S_c \varrho\,, \quad \sum S_b S_c \varrho$$

129) *H. Müller-Breslau,* Über die Berechnung statisch bestimmter Auslegerbrücken, Zentralblatt der Bauverw. 1897, p. 501 und 513.

130) *J. Pirlet,* Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statischer unbestimmter Systeme, Diss. techn. Hochschule Aachen 1909; *A. Cyran,* Die Hellinganlagen, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 54 (1910), p. 438.

131) *R. Krohn,* Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger, Zeitschr. f. Baukunde 3 (1880), p. 219.

132) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 27 (1881), p. 243.

bei passender, durch fingierte starre Stäbe ermöglichter Auswahl der überzähligen Konstruktionsteile zu Null werden. Für dasselbe System beliebiger geometrischer Anordnung und beliebiger konstruktiver Durchbildung löst *H. Müller-Breslau*[133]) die Aufgabe in allgemeiner Weise, indem er Bedingungsgleichungen für die Lage und Richtung der statisch unbestimmten Grössen aufstellt. Werden als solche zwei Einzelkräfte in einem Punkt und ein Moment gewählt, so ist der Angriffspunkt der ersteren der Schwerpunkt des mit dem elastischen Gewicht

$$w_m' = \frac{s_m}{h_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$$

in jedem Knotenpunkt bzw. $w_m' = \frac{J_c}{J_m}$ für die Längeneinheit der Bogenaxe belasteten Systems, und die Kraftrichtungen fallen in die Hauptträgheitsaxen. F_c und J_c sind willkürlich gewählte konstante Werte, h_m siehe Nr. 28. Eine andere Lösung desselben Problems findet *H. Müller-Breslau*[134]) durch Verschiebungspläne für die Zustände $X_c = -1$, $X_b = -1$, $X_a = -1$, indem er den Angriffspunkt und die Richtungen der X_b und X_a so bestimmt, dass von den Koeffizienten der Elastizitätsgleichungen (81) $\delta_{ac} = \delta_{bc} = \delta_{ab} = 0$ werden. Den letzten Weg baut er später[135]) zu einem *allgemeinen* Verfahren für *statisch unbestimmte Systeme beliebig hohen Grades* aus. Als statisch unbestimmte Grössen werden solche X_r eingeführt, dass in den allgemeinen Bedingungsgleichungen von der Form (81) alle δ mit verschiedenen Indizes verschwinden. Jede Gleichung enthält dann also nur eine Unbekannte, deren Wert durch

$$X_r = \sum P_m \frac{\delta_{mr}}{\delta_{rr}} + \frac{\delta_{rt} + \delta_{rw}}{\delta_{rr}} \tag{83}$$

ausgedrückt ist. Im Falle senkrechter Lasten ist die Biegungslinie für den Zustand $X_r = -1$ Einflusslinie für X_r.

Die einzuführenden statisch unbestimmten Grössen findet *H. Müller-Breslau* mit Hilfe kinematischer Erwägungen. Er gliedert an das statisch bestimmte Hauptsystem ein Getriebe fingierter starrer Stäbe und Scheiben an, und belastet diese mit Kräften bzw. Momenten X_a, X_b, ..., X_n so, dass ihre Wirkung auf das statisch bestimmte Hauptsystem, welches durch Durchschneiden der überzähligen Konstruktionsteile und Beseitigen der überzähligen Auflager entsteht, gerade die-

133) *H. Müller-Breslau,* Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 30 (1884), p. 575.

134) *H. Müller-Breslau,* Beitrag zur Theorie der ebenen elastischen Träger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 34 (1888), p. 605.

135) *H. Müller-Breslau,* Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger, Zentralblatt der Bauverw. 1889, p. 475, 499.

selbe ist, wie die der statischen Grössen, welche den beseitigten Konstruktionsteilen bzw. Auflagern entsprechen. Die wirklichen Wege der X_a, X_b, ..., X_n werden so bestimmt, dass sie die geometrischen und die Auflagerbedingungen des gegebenen Systems erfüllen. Die Wahl der Getriebe ist durch die erstrebte Bedingung nicht vollständig festgelegt. Im einzelnen verfährt *Müller-Breslau* folgendermassen:

Für ein *zweifach statisch unbestimmtes System* lassen sich stets zwei Einzelkräfte X_a und X_b einführen, welche in einem meist mit Hilfe weniger starrer Stäbe angeschlossenen Punkte angreifen. X_a wird willkürlich gewählt, die Verschiebung seines Angriffspunktes infolge des Belastungszustandes $X_a = -1$ ermittelt, und die Richtung von X_b rechtwinklig zur Richtung dieser Verschiebung angenommen. Dann ergiebt sich $\delta_{ba} = 0$ und damit auch $\delta_{ab} = 0$.

Bei dem *dreifach statisch unbestimmten System* wird eine starre Scheibe entweder unmittelbar oder mit Hilfe einiger starrer Stäbe angegliedert und durch ein Moment X_a und die Einzelkräfte X_b und X_c belastet. Der Pol, um den sich die Scheibe infolge des Belastungszustandes $X_a = -1$ dreht, wird als Angriffspunkt der Kräfte X_b und X_c gewählt, womit $\delta_{ba} = 0$ und $\delta_{ca} = 0$ wird. Die Richtung dieser Kräfte wird bestimmt wie beim zweifach statisch unbestimmten System. Damit ist $\delta_{cb} = 0$. Also ist auch $\delta_{ab} = \delta_{ac} = \delta_{bc} = 0$.

Bei dem *vierfach statisch unbestimmten System* wird eine kinematische Kette angegliedert, welche aus zwei in einem Punkte gelenkartig verbundenen Scheiben *I* und *II* sowie zwei mit diesen Scheiben ein Gelenkviereck bildenden Stäben *I'* und *II'* besteht. Die Lage der Scheibe *I* und des mit ihr verbundenen Stabes *I'* ist nur von den geometrischen Bedingungen des Systems abhängig und innerhalb dieser Grenzen willkürlich. Die Scheibe *I* wird mit den Einzelkräften X_a und X_b oder dem Moment X_a und der Einzelkraft X_b belastet. X_a ist willkürlich, X_b muss durch den Pol gehen, um den sich die Scheibe *I* infolge des Belastungszustandes $X_a = -1$ dreht. Dann ist $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$. Die Lage der Scheibe *II*, insonderheit der Gelenkpunkt zwischen *I* und *II*, wird dann auf kinematischem Wege so bestimmt, dass die Pole II_a und II_b, um welche sich die Scheibe infolge der Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, in einem Punkte *L* zusammenfallen. Dieser Punkt wird als Angriffspunkt der Einzelkräfte X_c und X_d gewählt, dann ist $\delta_{ca} = \delta_{cb} = \delta_{da} = \delta_{db} = 0$ und ebenso $\delta_{ac} = \delta_{bc} = \delta_{ad} = \delta_{bd} = 0$. Schliesslich werden die Richtungen X_c und X_d wie oben angegeben bestimmt, so dass $\delta_{dc} = \delta_{cd} = 0$ wird.

Das Verfahren führt auch bei *Systemen höheren Grades statischer Unbestimmtheit* zum Ziele, wird dann allerdings ziemlich verwickelt und dürfte nicht mehr die erforderliche Genauigkeit verbürgen. Werden an die Scheibe I und das betrachtete System weitere Scheiben III, IV, ... in derselben Weise angeschlossen wie die Scheibe II mit den Punkten M, N, ..., in welchen die Pole III_a und III_b, IV_a und IV_b, ... zusammenfallen, so können an die Punkte L, M, N, ... Scheiben angegliedert werden, welche bei den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$ keine elastischen Verschiebungen erfahren. Die Lage dieser Scheiben lässt sich dann auf kinematischem Wege so bestimmen, dass die Pole jeder einzelnen infolge der Belastungszustände $X_c = -1$, $X_d = -1$ in einem Punkte zusammenfallen. Damit ist die Möglichkeit der planmässigen Weiterentwicklung gegeben.

40. Aufstellung von Bedingungsgleichungen mit einer Unbekannten: Analytische Verfahren. Das in Nr. **39** dargestellte Verfahren von *H. Müller-Breslau* bietet bei der Anwendung auf statisch unbestimmte Systeme höheren Grades die Schwierigkeit, dass die Angliederung recht verwickelter kinematischer Ketten erforderlich wird, deren zweckmässigste Anordnung zudem nicht durch feste Regeln bestimmt ist. Diese Schwierigkeit behebt *S. Müller*[136]), indem er die Aufgabe, solche statisch unbestimmte Grössen einzuführen, dass jede Bedingungsgleichung nur eine derselben enthält, auf analytischem Wege löst. Zu diesem Zweck führt er „Kraftgruppen“ X_a, X_b, ..., X_n ein und stellt die statisch unbestimmten Grössen Y, welche in den überzähligen Konstruktionsteilen wirken und *„statisch unbestimmte Einzelwirkungen“* genannt werden, als Funktionen der X dar:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -X_a Y_{1a} - X_b Y_{1b} - \cdots - X_n Y_{1n}, \\ Y_2 &= -X_a Y_{2a} - X_b Y_{2b} - \cdots - X_n Y_{2n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{\bar n} &= -X_a Y_{\bar n a} - X_b Y_{\bar n b} - \cdots - X_n Y_{\bar n n}. \end{aligned}$$

Im Zustand $X_r = -1$ wirken auf das statisch bestimmte Hauptsystem $\bar n$ Einzelwirkungen von der Grösse Y_{1r}, Y_{2r}, ..., $Y_{\bar n r}$, welche die *Gruppenlasten* des X_r-Zustandes genannt werden. Die Wege der Belastungen X_a, X_b, ..., X_n infolge der Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, ..., $X_n = -1$ sind gegeben durch die Gleichungen

136) *S. Müller,* Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke, Zentralblatt der Bauverw. 1907, p. 23.

$$
(84)\qquad
\begin{aligned}
\delta_{aa} &= Y_{1a}\delta_{1a} + Y_{2a}\delta_{2a} + \cdots + Y_{\bar{n}a}\delta_{\bar{n}a},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_{km} &= Y_{1k}\delta_{1m} + Y_{2k}\delta_{2m} + \cdots + Y_{\bar{n}k}\delta_{\bar{n}m},\\
&\quad k = a, b \cdots n;\; m = a, b \cdots n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_{nn} &= Y_{1n}\delta_{1n} + Y_{2n}\delta_{2n} + \cdots + Y_{\bar{n}n}\delta_{\bar{n}n}.
\end{aligned}
$$

Sind die Einzelwirkungen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ so gewählt, dass ihre wirklichen Wege zu Null werden, so gelten für die $X_a, X_b, \ldots, X_n$ die Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum P_m\,\delta_{ma} - X_a\,\delta_{aa} - X_b\,\delta_{ba} - \cdots - X_n\,\delta_{na},\\
0 &= \sum P_m\,\delta_{mb} - X_a\,\delta_{ab} - X_b\,\delta_{bb} - \cdots - X_n\,\delta_{nb},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= \sum P_m\,\delta_{mn} - X_a\,\delta_{an} - X_b\,\delta_{bn} - \cdots - X_n\,\delta_{nn}.
\end{aligned}
$$

In jeder dieser Gleichungen verschwinden alle X bis auf eines, wenn die $Y_{1a}, Y_{2a}, \ldots, Y_{\bar{n}n}$ aus den Gleichungen (84) so bestimmt werden, dass alle δ_{km} mit verschiedenen Zeigern zu Null werden. Damit ergeben sich infolge des *Betti*schen Satzes $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen für die n^2 Werte Y_{mk}, $\frac{n(n+1)}{2}$ derselben sind also willkürlich, jedoch müssen n voneinander unabhängige Gleichungen bestehen bleiben, damit die Befriedigung der Elastizitätsbedingungen gesichert ist. *S. Müller* erstrebt eine möglichst einfache Wahl der willkürlichen Werte, indem er $\frac{n(n-1)}{2}$ derselben gleich Null und n Werte gleich 1 setzt. So erhält er die Gleichungen:

$$
(85)\qquad
\begin{aligned}
Y_1 &= -X_a 1 - X_b Y_{1b} - X_c Y_{1c} - \cdots - X_n Y_{1n},\\
Y_2 &= - X_b 1 \phantom{Y_{1b}} - X_c Y_{2c} - \cdots - X_n Y_{2n},\\
Y_3 &= - X_c 1 - \cdots - X_n Y_{3n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Y_n &= - X_n 1.
\end{aligned}
$$

Der Zustand $X_a = -1$, welchem die Einzelwirkung $Y_1 = +1$ zugehört, liefert mit $\delta_{ba} = 0$ die Bedingungsgleichung für Y_{1b}:

$$0 = Y_{1b}\delta_{1a} + 1\,\delta_{2a}.$$

Es folgt $\delta_{ab} = \delta_{1b} = 0$ und $\delta_{aa} = \delta_{1a}$.

Dem Zustand $X_b = -1$ entsprechen die Einzelwirkungen $Y_1 = Y_{1b}$, $Y_2 = +1$. Es ergeben sich mit $\delta_{cb} = 0$ und $\delta_{ca} = 0$ die Bedingungsgleichungen für Y_{2c} und Y_{1c}:

$$
\begin{aligned}
0 &= \phantom{Y_{1c}\delta_{1a}} + Y_{2c}\delta_{2b} + 1\,\delta_{3b},\\
0 &= Y_{1c}\delta_{1a} + Y_{2c}\delta_{2a} + 1\,\delta_{3a}.
\end{aligned}
$$

Es folgt $\delta_{ac} = \delta_{1c} = 0$, $\delta_{bc} = \delta_{2c} = 0$ und $\delta_{bb} = \delta_{2b}$. In dieser Weise fortschreitend findet *S. Müller* alle Bedingungsgleichungen für die gesuchten Y-Werte nach dem Schema, welches aus nachstehenden Gleichungen für die Y_e-Werte ersichtlich ist:

$$\begin{aligned}
0 &= && && && + Y_{4e}\delta_{4d} + 1\,\delta_{5d},\\
0 &= && && + Y_{3e}\delta_{3c} && + Y_{4e}\delta_{4c} + 1\,\delta_{5c},\\
0 &= && Y_{2e}\delta_{2b} && + Y_{3e}\delta_{3b} && + Y_{4e}\delta_{4b} + 1\,\delta_{5b},\\
0 &= Y_{1e}\delta_{1a} && + Y_{2e}\delta_{2a} && + Y_{3e}\delta_{3a} && + Y_{4e}\delta_{4a} + 1\,\delta_{5a}.
\end{aligned}$$

In jeder dieser Gleichungen gehören alle Werte δ ein und demselben Belastungszustand X an, und zwar dem Belastungszustand $X_m = -1$ in den Gleichungen, aus denen sich die Werte $Y_{m,m+1}$, $Y_{m,m+2}$, ..., Y_{mn} ergeben. Der diesem Belastungszustand entsprechende Verschiebungsplan kann also als Einflussgebilde zur Ermittlung der genannten Y-Werte benutzt werden.

Damit ergiebt sich folgende schrittweise vorgehende Ermittlung aller Gruppenlasten Y: Der Verschiebungsplan für $X_a = -1$ ergiebt mit der Annahme $\delta_{aa} = 1$ als Einflussgebilde den Wert Y_{1b}, sofern im Punkt 2 die Last 1 angenommen wird. Der Verschiebungsplan für $X_b = -1$ ergiebt mit $\delta_{bb} = 1$ als Einflussgebilde den Wert Y_{2c} bei der Belastung 1 im Punkte 3, und der Verschiebungsplan für $X_a = -1$ den Wert Y_{1c} bei der Belastung 1 im Punkte 3 und Y_{2c} in Punkt 2 usw.

Dieser Weg führt zur Erkenntnis der *inneren Bedeutung* der *Kraftgruppen.* Sie seien bis zu den Gruppenlasten des Zustandes $X_m = -1$ ermittelt. Berechnet man nun aus den Gleichungen (85) mit Hilfe der Einflussflächen für $X_a \cdots X_{m-1}$ die Werte, welche Y_1, Y_2, ..., Y_{m-1} annehmen, wenn nur die Last 1 im Punkte m wirkt, so findet man

$$Y_{1m} = Y_1, \quad Y_{2m} = Y_2, \; \ldots, \; Y_{m-1,m} = Y_{m-1}.$$

Mithin stimmen die Gruppenlasten für den Zustand $X_m = -1$ überein mit den durch die Belastung 1 im Punkte m hervorgerufenen statisch unbestimmten Einzelgrössen des $m-1$-fach statisch unbestimmten Systems. Also ist die Biegungslinie für den Zustand $X_m = -1$ und damit die Einflusslinie für X_m identisch mit der Biegungslinie des $m-1$-fach statisch unbestimmten Systems für die Belastung 1 in Punkt m. Das Verfahren *S. Müllers* beruht demnach auf der Konstruktion von Biegungslinien für *veränderliche Hauptsysteme statischer Unbestimmtheit ansteigenden Grades.* Es bietet die Möglichkeit, leicht zu entscheiden, ob die Einführung einer neuen statischen Unbestimmtheit zweckmässig ist.

Auf demselben Grundgedanken der Einführung von Kraftgruppen X, welche alle δ mit verschiedenen Zeigern zum Verschwinden bringen, baut *H. Müller-Breslau*[137]) ein analytisches Verfahren auf. Indem er jedoch der Wahl der willkürlichen Gruppenlasten grösseren Spielraum lässt, gewinnt er die Möglichkeit, Eigenschaften der geometrischen Anordnung eines Systems auszunutzen. Es kommt hierbei hauptsächlich der Gesichtspunkt in Betracht, möglichst einfache Spannungszustände für die Belastungszustände X zu erhalten. Das erweist sich in manchen Fällen als zweckmässig, führt aber nicht zu der schrittweise vorgehenden Lösung *S. Müllers*. Einen mittleren Weg schlägt *Kirchhoff*[138]) ein, indem er bei Berechnung des symmetrischen Bogens ohne Gelenke den Zweigelenkbogen als Hauptsystem wählt und die beiden weiteren statisch unbestimmten Grössen nach dem Verfahren *Müllers-Breslau* bestimmt.

Die oben ausgesprochene Beziehung zwischen der Einflusslinie für X_m und der Biegungslinie des $m-1$-fach statisch unbestimmten Systems für den Zustand $X_m = -1$ ist bereits früher von *H. Müller-Breslau*[139]) bemerkt worden. Dieser spricht sie allerdings nur für die n^{te}, also die letzte statisch unbestimmte Grösse des n-fach statisch unbestimmten Systems aus. Er drückt die Spannkräfte eines n-fach statisch unbestimmten Fachwerkes durch die Formel

$$S = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}' X_n$$

aus, wobei unter $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}'$ diejenigen Werte des $n-1$-fach statisch unbestimmten Fachwerks verstanden werden, welche den Zuständen $X_n = 0$ und $X_n = -1$ entsprechen. Aus der Arbeitsgleichung für den Belastungszustand $X_n = -1$ und den wirklichen Verschiebungszustand ergibt sich dann die Beziehung

$$X_n = \frac{\sum P_m \delta'_{mn}}{\sum \mathfrak{S}'^2 \varrho}, \tag{86}$$

in welcher δ'_{mn} die Wege der Lasten P_m infolge des Belastungszustandes des $n-1$-fach statisch unbestimmten Systems $X_n = -1$ bezeichnen. Vermöge dieser Gleichung kann jede Einflusslinie einer Stabkraft nun als Biegungslinie aufgefasst werden, insonderheit die

137) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, Ab. 1, 4. Aufl. Stuttgart 1907, p. 162.

138) *Kirchhoff,* Beitrag zur Berechnung dreifach statisch unbestimmter Systeme mit Hilfe von Elastizitätsgleichungen, die voneinander unabhängig sind, Zeitschr. f. Bauwesen 61 (1911), p. 629.

139) *H. Müller-Breslau,* Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, Abt. 1. Leipzig 1892, p. 189.

Einflusslinie jeder statisch unbestimmten Grösse des n-fach statisch unbestimmten Systems als Biegungslinie des $n-1$fach statisch unbestimmten Systems infolge des Belastungszustandes $X_n = -1$. *H. Müller-Breslau* verwendet jedoch diese Beziehung nur in ganz bestimmten Fällen als Ersatz seines in Nr. **39** beschriebenen graphischen Verfahrens.

Die vorstehende Beziehung gestattet nun, wie aus der von *H. Müller-Breslau* gegebenen Begründung ersichtlich ist, ohne weiteres den Übergang vom m-fach auf das $m+1$-fach statisch unbestimmte System. Diesen Übergang vollzieht *J. Pirlet*[140]) und gelangt damit natürlich wieder zu dem Verfahren, welches *S. Müller* auf anderem Wege gefunden hatte. *J. Pirlet* bemerkt, dass das Verfahren der *Gauss*schen Eliminationsmethode analog ist, welche n lineare Gleichungen durch wiederholte Substitution einer Unbekannten mit Hilfe einer Gleichung in allen andern auflöst. Aus der *Gauss*schen Schreibweise gewinnt *J. Pirlet* ein übersichtliches Schema für die rechnerische Ermittlung aller benötigten Verschiebungen. Die Ermittlung der letzteren auf graphischem Wege verwirft er als ungenau, während *S. Müller* beide Wege zulässt. Also lediglich in diesem Punkte weicht *J. Pirlet* von *S. Müller* ab.

41. Mathematischer Zusammenhang und Vergleichung der Lösungsmethoden für die „Bedingungsgleichungen". *A. Hertwig*[141]) untersucht den mathematischen Zusammenhang der verschiedenen Lösungsmethoden. Die allgemeine Auflösung der linearen Bedingungsgleichungen kann durch Substitution, Elimination oder durch eine Kombination beider erfolgen. Die *Methode der Elimination* führt unmittelbar zu den in den Gleichungen (82) gegebenen Lösungen durch Determinanten. Die *Methode der Substitution* führt an Stelle der statisch unbestimmten Grössen Y, welche der Wirkung der überzähligen Konstruktionsteile entsprechen, Grössen X mit Hilfe von linearen Gleichungen zwischen den Y und X ein. Sie ergiebt für X die Lösung

$$X_k = -\frac{\sum P_m \delta_{mk}}{\varepsilon_{kk}}.$$

In dieser ist δ_{mk} der Weg der Last P_m infolge des Belastungszustandes $Y_k = +1$ und ε_{kk} der Weg der Belastung X_k infolge des Belastungs-

140) *J. Pirlet,* Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme, Der Eisenbau 1 (1910), p. 331.

141) *A. Hertwig,* Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme und verwandter Aufgaben in der Statik der Baukonstruktionen, Zeitschr. f. Bauwesen 60 (1910), p. 487.

zustandes $X_k = +1$. Mithin ist die Biegungslinie für $Y_k = +1$ Einflusslinie für X_k. Geht man weiter zur Ermittlung der Y über, so erhält man das durch Gleichung (82a) ausgedrückte Ergebnis, sofern gewisse willkürliche Koeffizienten geeignet gewählt werden.

Die *dritte Methode* bedient sich zunächst der Substitution, um neue statisch unbestimmte Grössen X in die Bedingungsgleichungen für die Y einzuführen. Aus diesen berechnet sie sodann die X mit Hilfe der Elimination, indem sie als Eliminationsmultiplikatoren die Koeffizienten wählt, welche auch die Substitution vermittelt hatten. So ergeben sich Gleichungen von der Form

$$C_{k1} X_1 + C_{k2} X_2 + \cdot C_{kk} \cdot X_k + C_{kn} X_n = -\sum P_m \delta_{mk}.$$

Diese sind identisch mit den gebräuchlichen Bedingungsgleichungen für die X, δ_{mk}, und die Koeffizienten C_k, entsprechen also dem Belastungszustand $X_k = +1$. Die Erfüllung der $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen $C_{kr} = 0$ ergiebt für jedes X einen Wert:

$$X_k = -\frac{\sum P_m \delta_{mk}}{C_{kk}}.$$

Sonderfälle dieser Methode sind alle diejenigen Verfahren, welche die Aufstellung von Bedingungsgleichungen für die statisch unbestimmten Grössen mit nur einer Unbekannten anstreben, im besonderen also auch das Verfahren von *S. Müller*.

A. Hertwig bespricht noch eine Methode der Substitution mit Hilfe linearer Gleichungen, welche ein konstantes Glied enthalten. Diese Methode bedeutet den Übergang von einer Gruppe im System vorhandener statisch unbestimmter Grössen zu einer anderen Gruppe vorhandener Grössen. Das Verfahren hat jedoch nur beschränkte Anwendbarkeit.

A. Hertwig kommt zu dem Schluss, dass die Verfahren der Elimination und Substitution annähernd gleichwertig sind hinsichtlich des Arbeitsaufwandes. Die kombinierten Methoden können eine Arbeitsersparnis mit sich bringen, wenn graphische Verfahren zur Darstellung der Biegungslinien Verwendung finden. In diesem Falle aber leidet bei statisch unbestimmten Systemen höheren Grades im allgemeinen die Genauigkeit der Ergebnisse. Man wird deshalb rechnerische Ermittlung vorziehen müssen. Es ist dann bei allen Verfahren die Berechnung von Unterdeterminanten Δ_{rk} $n-1^{\text{ten}}$ Grades erforderlich. Eine wesentliche Arbeitsersparnis oder Erhöhung der Genauigkeit kann demnach keinem der besprochenen Verfahren allgemein zuerkannt werden. Die Entscheidung über die zweckmässigste Methode

muss von Fall zu Fall getroffen werden. Nach *H. Müller-Breslau*[137]) muss in jedem Falle geprüft werden, ob es nicht besser ist, eine grössere Anzahl von Gleichungen aufzulösen und dafür einfachere Biegungslinien und Verschiebungspläne einzutauschen.

Einen Vorzug besitzen die Verfahren, welche Bedingungsgleichungen mit einer Unbekannten liefern, vor den allgemeinen Lösungsmethoden darin, dass sie die Möglichkeit bieten, die Richtigkeit und Genauigkeit der Rechnung im Laufe derselben zu prüfen. Diese Kontrollen beruhen auf dem *Maxwell*schen oder *Betti*schen Satze von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen. Allerdings muss hierbei die naheliegende Gefahr vermieden werden, dass die Kontrollrechnung nur eine unwesentlich veränderte Wiederholung der ersten Rechnung darstellt.

42. Einige besondere Lösungsmethoden für die „Bedingungsgleichungen". In manchen Fällen gelingt es, durch geeignete Wahl der statisch unbestimmten Grössen den Bedingungsgleichungen zu ihrer Berechnung die Form von *Differenzengleichungen* zu geben, welche einfache Lösungen auf verschiedenen Wegen zulassen. Derartige Gleichungen hat zuerst *E. Clapeyron*[142]) für die Beziehungen aufgestellt, welche zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten eines kontinuierlichen Balkens bestehen:

$$X_{m-1}\, l_m + 2\, X_m (l_m + l_{m+1}) + X_{m+1}\, l_{m+1} = N_m .$$

Die rechte Seite bezeichnet ein konstantes, nur von der Belastung abhängiges Glied. Für den Fall gleicher Stützweiten l löst *Clapeyron* die Gleichungen durch Elimination, er erhält als Multiplikatoren eine leicht anzuschreibende Zahlenreihe. Denselben Weg beschreitet *E. Winkler*[143]) für den allgemeinen Fall verschieden grosser Stützweiten. *L. Freytag*[144]) löst die Gleichungen

$$\begin{aligned}
-(2+\chi)\, X_1 + X_2 \qquad &= a_1 ,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
X_{m-1} - (2+\chi)\, X_m + X_{m+1} &= a_m ,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
X_{n-1} - (2+\chi)\, X_n \qquad &= a_n ,
\end{aligned}$$

welche in der Form mit denen *Clapeyrons* übereinstimmen, durch

142) *E. Clapeyron,* Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés, Paris C. R. 45 (1857), p. 1076.

143) *E. Winkler,* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag 1867, p. 114 ff.

144) *L. Freytag,* Gesetzmässigkeiten in der Statik des Vierendeelträgers, München-Berlin 1911, p. 17.

schrittweise erfolgende Substitution. Er gewinnt X_m als lineare Funktion von X_1 und den a:

$$X_m = \beta_m X_1 + \beta_{m+1} a_1 + \beta_{m-2} a_2 + \cdots + \beta_1 a_{m-1}$$

und bemerkt, dass die Koeffizienten β durch Reihenentwicklung zu bestimmen sind. Es ist

$$\beta_m = \mu_{1,m} + \mu_{3,m-1}\chi + \mu_{5,m-2}\chi^2 + \cdots + \mu_{2m-1,1}\chi^{m-1}.$$

Hierin sind die μ Glieder arithmetischer Reihen höherer Ordnung von ungerader Ordnungsziffer, beispielsweise $\mu_{7,m-3}$ das $m-3^{\text{te}}$ Glied der Reihe der Ordnungsziffer 7. Für $\chi = 2$ stimmen die Koeffizienten mit den Zahlen *Clapeyrons* überein.

A. Clebsch[145]) giebt für die *Clapeyron*schen Gleichungen bei gleichen Stützweiten eine Lösung in geschlossener Form durch das Integral:

$$X_m = C + Ap^m + Bq^m.$$

In diesem sind p und q die beiden Wurzeln der Gleichung

$$z^4 + 4z + 1 = 0$$

und C, A, B Konstante, welche aus dem von der Belastung abhängigen Glied und gegebenen Bedingungen des Systems zu bestimmen sind.

Ebenfalls benutzt *L. Mann*[146]) die Integration von Differenzengleichungen der Form

$$\alpha X_{m-1} + \beta X_m + \alpha X_{m+1} = c + d x_m.$$

Das totale Integral ist:

$$X_m = \frac{1}{2\alpha + \beta}(c + d x_m) + C_1 p^m + C_2 q^m;$$

hierin sind p und q die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha m^2 + \beta m + \alpha = 0$$

und die Konstanten C_1 und C_2 aus den gegebenen Bedingungen zu bestimmen.

Eine *graphische Lösung der Clapeyronschen Gleichungen* für den allgemeinen Fall verschiedener Stützweiten ist von *O. Mohr*[147]) im Anschluss an Arbeiten *C. Culmanns*, eine zweite von *H. Müller-Breslau*[148]) gegeben. Beide haben zur Voraussetzung, dass in der ersten

145) *A. Clebsch,* Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862, p. 394.

146) *L. Mann,* Statische Berechnung steifer Vierecknetze, Diss. techn. Hochschule Berlin 1909.

147) *O. Mohr,* Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 14 (1868), p. 19.

148) *H. Müller-Breslau,* Über einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen, Berlin 1891, p. 3.

Gleichung die erste, in der letzten Gleichung die letzte Grösse X bekannt ist. Dann bestehen zwischen der zweiten und dritten sowie zwischen der $2t$ und $3t$ letzten lineare Beziehungen, und man kann aus den Differenzengleichungen für je zwei aufeinanderfolgende Grössen zwei lineare Beziehungen ableiten, die eine, indem man mit den ersten Grössen beginnt und fortschreitet bis zu den letzten, die andere auf dem entgegengesetzten Wege. Das geschieht graphisch mit wenigen Hilfslinien und liefert, wenn man die X als Ordinaten von einer Nulllinie aus aufträgt und ihre Endpunkte durch Gerade verbindet, für jede dieser Geraden einen Punkt auf dem ersten, einen zweiten auf dem entgegengesetzten Wege.

Für *statisch unbestimmte Systeme höheren Grades* deutet *A. Hertwig*[141]) einen auf Reihenentwicklung (Anwendung des Verfahrens der Iteration) beruhenden Weg der Lösung an. Er stellt die statisch unbestimmten Grössen in der Form dar

$$X_r = f_{r1}\,\delta_{m1} + f_{r2}\,\delta_{m2} + \cdots + f_{rn}\,\delta_{mn}$$

und will die Koeffizienten f als unendliche konvergente Reihen entwickeln, welche bei geeigneter Wahl der statisch unbestimmten Grössen schnell konvergieren. *A. Hertwig* misst dem Verfahren Bedeutung bei. Das dürfte zutreffen, wenn sich eine gute Konvergenz der Reihen durch wenige Glieder erreichen lässt. Eine ausführlichere Entwicklung des Gedankens steht noch aus.[149])

H. Reissner[150]) verwendet bei *räumlichen Fachwerken* mit zyklischer Symmetrie das Verfahren der harmonischen Analyse. Er stellt eine Gruppe gleichartiger statisch unbestimmter Kräfte, welche an einem Ring angreifen, durch eine nach den Vielfachen der Sinus und Kosinus fortschreitende endliche trigonometrische Reihe dar und erhält Elastizitätsbedingungen, deren jede nur die auf einem Meridian liegenden statisch unbestimmten Kräfte aufweist. Liegen alle statisch unbestimmten Grössen auf einem Ring, so ist also in jeder Gleichung nur eine Unbekannte vorhanden.

---

149) Vgl. inzwischen die nähere Ausführung in *H. Müller-Breslau*-Festschrift, Leipzig 1912, p. 37.

150) *H. Reissner,* Über Fachwerke mit zyklischer Symmetrie, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 13 (1908), p. 317.

(Abgeschlossen April 1912.)

IV 29 b. THEORIE DER BAUKONSTRUKTIONEN II: SPEZIELLERE AUSFÜHRUNGEN.

Von

K. WIEGHARDT

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Infolge der grossen Ausdehnung der spezifisch technischen [d. h. der in erster Linie von technischen Interessen beherrschten] Litteratur konnte eine Vollständigkeit des Verzeichnisses nicht angestrebt werden; dass bei der Auswahl auch der Zufall eine Rolle gespielt hat, schien unvermeidlich.

Wegen der zahllosen Abhandlungen über Eisenbeton sei insbesondere auf folgende Zusammenstellung verwiesen:

R. Hoffmann, Die Eisenbetonlitteratur bis Ende 1910. Berlin 1911.

1. Lehrbücher und Monographieen.

Ausser den in IV 29a (*Grüning*) genannten:

A. Bierbaumer, Die Dimensionierung des Tunnelmauerwerkes. Leipzig und Berlin 1913.

F. v. Emperger, Handbuch für Eisenbetonbau. 2. Aufl. 1. Bd.: Entwicklungsgeschichte und Theorie des Eisenbetons. Berlin 1912.

F. Engesser, Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. 2 Bde. Berlin 1893.

A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. 2. Bd.: Graphische Statik. Leipzig 1900.

L. Freytag, Gesetzmäßigkeiten in der Statik des Vierendeel-Trägers. München u. Berlin 1911.

O. Kommerell, Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk. Berlin 1912.

G. Lang, Der Schornsteinbau. Hannover 1896.

A. Leon, Über die Wärmespannungen in runden Schornsteinen. Wien u. Leipzig 1906.

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe.* Leipzig u. Berlin 1907.

H. Moseley, The mechanical principles of engineering and architecture. London 1843.

H. Müller-Breslau-Festschrift. Leipzig 1912.
E. Reich, Vierendeelträger mit parallelen Gurtungen. Wien 1911.
H. Ritter, Berechnung von bogenförmigen Staumauern. Diss. Karlsruhe 1913.
W. Ritter, Die Statik der Tunnelgewölbe. Berlin 1879.
H. Seipp, Beiträge zur Theorie u. Berechnung doppelt gekrümmter Freiträger. Wien 1910.
A. Vierendeel, Longerons en treillis et longerons à arcades. Bruxelles-Paris 1897.
— Théorie générale des poutres Vierendeel. Mémoires et comptes rendus des travaux de la Société des ingénieurs civils de France 1900 (II), p. 163—218.
— Cours de Stabilité des constructions T 1 ff.; Louvain-Paris 1906 ff. Hierin T 8: Calcul des poutres Vierendeel, ebd. 1912, deutsch von *W. Mertens,* Der Vierendeel-Träger. Seine Berechnung und Konstruktion. Düsseldorf 1912.

2. Zeitschriften.

Allgemeine österreichische Bauzeitung. Wien 1836 ff.
Annales des ponts et chaussées. Paris 1831 ff.
Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig u. Berlin 1841 ff.
Armierter Beton. Berlin 1908 ff.
Béton armé. Paris 1898 ff.
Beton u. Eisen. Berlin 1905 ff.
Comptes rendus hebdomadaires d. séances de l'Académie des sciences. Paris 1835 ff.
Czasopismo technizne. Lemberg.
Deutsche Bauzeitung. Berlin 1868 ff.
Drapers research memoirs. London 1904 ff.
Eisenbau. Leipzig 1910 ff.
Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons. Berlin (früher Wien) 1904 ff.
Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. Leipzig 1892 ff.
Minutes of proceedings of the Institution of Civil Engineers. London 1837 ff.
Österreichische Wochenschrift für den öffentl. Baudienst. Wien 1901 ff.
Philosophical magazine. London, 1789 ff.
Physikalische Zeitschrift. Leipzig 1900 ff.
Schweizerische Bauzeitung. Zürich 1883 ff.
Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wiss. in Wien. Wien 1848 ff.
Technology quarterly and proceedings of the Society of arts. Boston 1888 ff.
Transactions of the American Society of Civil Engineers. New York 1872 ff.
Verhandlungen des Vereins zur Beförderung d. Gewerbfleißes in Preußen. Berlin 1822 ff.
Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover. Hannover 1855 ff. Von 1896 an:
Zeitschrift für Architektur u. Ingenieurwesen. Hannover 1896 ff.
Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- u. Architektenvereins. Wien 1849 ff.
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. Berlin, 1857 ff.
Zeitschrift für Bauwesen. Berlin 1851 ff.
Zeitschrift für Betonbau. Wien 1913 ff.
Zeitschrift f. Mathematik und Physik. Leipzig 1856 ff.
Zentralblatt d. Bauverwaltung. Berlin 1881 ff.
Zivilingenieur. Leipzig 1854 ff. bis 1896 erschienen.

Allgemeine Vorbemerkung. Das vorliegende zweite Referat über die Theorie der Baukonstruktionen behandelt zunächst die im ersten Referat (IV 29a, *Grüning*) sowie in IV 5, *Henneberg* noch nicht erledigten Fachwerkfragen, sodann die Statik der Steinbauten und endlich die wichtigsten der mit der neuen Eisenbetonbauweise zusammenhängenden Fragen.

Es zerfällt damit in drei Abschnitte von sehr verschiedenem Charakter.

Die *Theorie der Fachwerke* ist heute so weit durchgebildet, dass man höchstens noch in der *Dynamik der Fachwerke* (Nr. 5) auf wesentliche Schwierigkeiten stösst. Die *Statik der Steinbauten* ist in einem weniger befriedigenden Zustande. Dort gruppiert sich eine rationelle Theorie um Randwertaufgaben für die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie (IV 24, 2a, *Tedone*), so dass man nur langsam weiter kommt und bisher nicht einmal alle Haupttypen der wirklich vorkommenden Steinbauten eine halbwegs befriedigende theoretische Behandlung erfahren haben. Noch ungünstiger steht es um die *Theorie des Eisenbetons,* weil dort die oben erwähnten Randwertaufgaben in einer erheblich modifizierten und komplizierten Form auftreten. Demgemäss kann hier nur über erste Anfänge auf diesem Gebiete berichtet werden. Freilich bedarf gegenüber diesem Sachverhalt die Tatsache, dass schon jetzt eine ungeheuer ausgedehnte Eisenbetonlitteratur vorhanden ist, der Erklärung: Vorwiegend handelt es sich dabei um *experimentelle* Studien, um u. a. festzustellen, bis zu welchem Grade gewisse Voraussetzungen der Theorie (z. B. Haften des Eisens am Beton) überhaupt zulässig sind, und die meisten Abhandlungen *theoretischen* Charakters zeigen weniger das Bestreben, einen rationellen Anschluss an die allgemeine Elastizitätstheorie zu gewinnen, als vielmehr der Forderung des Tages nach möglichst einfachen und gebrauchsfertigen Formeln für die Dimensionierung der Eisenbetonkonstruktionen nachzukommen.

Das vorliegende Referat steht natürlich in manchen Beziehungen zu andern, hauptsächlich folgenden: IV 5, *Henneberg;* 24, *Tedone;* 25, *Tedone-Timpe;* 26, *Lamb;* 27, *v. Kármán;* 29a, *Grüning.*

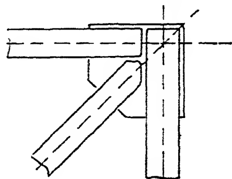
Als elastische Konstante wurden durchweg der *Young*sche Elastizitätsmodul E und m, der reziproke Wert der *Poisson*schen Konstanten, gewählt.

I. Speziellere Fragen aus der Theorie der Fachwerke.

1. Steife Stabverbindungen.

1a. Allgemeiner Ansatz einer die Steifigkeit der Stabverbindungen berücksichtigenden Statik der (ebenen) Fachwerke. In den

Artikeln IV 5 (*Henneberg*) und IV 29a (*Grüning*) ist auseinandergesetzt, wie die Spannungen und Deformationen eines Fachwerkes zu ermitteln sind, wenn seine Stäbe in reibungslosen Gelenken miteinander verbunden sind. In Wirklichkeit ist aber die Stabverbindung meist mehr oder weniger *steif*, sei es infolge von Reibung in den Gelenken, vor allem aber dann, wenn, wie es meist geschieht, die Stäbe überhaupt nicht in Gelenken aneinanderstossen, sondern an Knotenblechen festgenietet sind (Fig. 1). In erster Annäherung wird man dann das einzelne Knotenblech i mit den daran festgenieteten Stabenden als starre Scheibe auffassen dürfen, die sich nur als Ganzes um einen Winkel φ_i drehen kann, während die Winkel zwischen den Stabenden unter allen Umständen konstant bleiben. Infolgedessen können die *Stäbe* bei einer Belastung des Fachwerkes *im allgemeinen nicht geradlinig* bleiben, denn die Längsspannkräfte S_{ik} der Stäbe werden Dehnungen ε_{ik} und diese wiederum Verrückungen u_i, v_i der Knotenpunkte bedingen, so dass die „Stabaxen", nämlich die Verbindungsgeraden je zweier Endpunkte i und k eines Stabes, sich nach erfolgter Belastung um gewisse Winkel ω_{ik} aus ihrer ursprünglichen Lage gedreht haben werden; diese Winkel werden für die an einem Knoten zusammenstossenden Stäbe im allgemeinen nicht alle denselben Wert haben können.


Fig. 1.

Sei nun $\eta = f(\xi)$ die Gleichung eines so verbogenen Stabes in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ξ-Axe mit der verschobenen Stabaxe zusammenfällt (Fig. 2a), so werden wegen

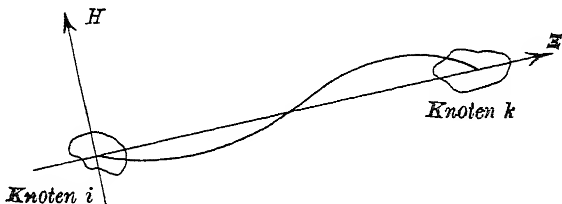


Fig. 2a.

der Kleinheit aller in Betracht kommenden Grössen die beiden Randwerte von $f'(\xi)$ annähernd den beiden Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} f'(\xi)_i = \varphi_i - \omega_{ik} \\ f'(\xi)_k = \varphi_k - \omega_{ik} \end{cases}$$

genügen und die Randwerte von $f(\xi)$ selbst den Bedingungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} f(\xi)_i = 0 \\ f(\xi)_k = 0. \end{cases}$$

Nun möge das Knotenblech i auf den Stab ik übertragen:

1. die als Zugkraft positiv gerechnete Längsspannkraft S_{ik},
2. die Schubkraft (Querkraft) Q_{ik},
3. das Kräftepaar B_{ik},

alles im Sinne der Fig. 2b. Wenn dann die Belastung des Fachwerkes ausschliesslich in den Knotenpunkten angreift, so wird im Querschnitte ξ des Stabes übertragen: d. Längsspannkraft S_{ik}, die Schubkraft Q_{ik} und ferner das Biegungsmoment: $B_{ik} + \xi \cdot Q_{ik}$, sofern man den Einfluss von S_{ik} auf das Biegungsmoment als vernachlässigbar betrachtet.[1])

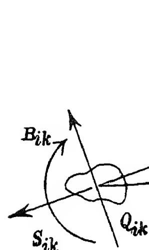


Fig. 2b.

Somit wird nach IV 25, Nr. 17, (*Tedone-Timpe*) annähernd die Gleichung:

$$(3) \qquad E_{ik} \cdot J_{ik} \cdot f''(\xi) = B_{ik} + Q_{ik} \cdot \xi$$

bestehen, da die Stabkrümmung nur schwach sein wird. E_{ik} und J_{ik} bedeuten in bekannter Weise Elastizitätsmodul des Stabes und das in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes. Die Integration dieser Gleichung liefert mit Berücksichtigung der Randbedingungen (1) und (2) folgenden *Zusammenhang zwischen Biegungsmoment, Schubkraft, Stabaxendrehwinkeln, Knotendrehwinkeln*:

$$(4) \qquad \begin{cases} B_{ik} = -\dfrac{2 E_{ik} J_{ik}}{l_{ik}} (2\varphi_i + \varphi_k - 3\omega_{ik}), \\ Q_{ik} = +\dfrac{6 E_{ik} J_{ik}}{l_{ik}^2} (\varphi_i + \varphi_k - 2\omega_{ik}), \end{cases}$$

und das Biegungsmoment am Ende k des Stabes ist:

$$(5) \qquad B_{ki} = B_{ik} + Q_{ik} \cdot l_{ik} = +\frac{2 E_{ik} J_{ik}}{l_{ik}} (\varphi_i + 2\varphi_k - 3\omega_{ik}).$$

Da somit die Wirkung des Stabes ik auf den Knoten i in 2 Kräften und einem Kräftepaar besteht, verlangt das *Gleichgewicht am einzelnen Knoten* i das Erfülltsein von drei Gleichungen. Diese lauten nach Einführung eines in der Fachwerkebene festen rechtwinkligen XY-

---

1) Wegen der Modifikationen, die die Theorie bei Berücksichtigung dieses Einflusses erfährt, s. die in folgender Nr. 1b zitierte Abhandlung von *H. Manderla.*

Koordinatensystems, wie folgt:

$$
(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \sum_k \left[\frac{x_k - x_i}{l_{ik}} \cdot S_{ik} + \frac{y_k - y_i}{l_{ik}} \cdot Q_{ik}\right] + X_i + X_i' = 0, \\ \sum_k \left[\frac{y_k - y_i}{l_{ik}} \cdot S_{ik} + \frac{x_k - x_i}{l_{ik}} \cdot Q_{ik}\right] + Y_i + Y_i' = 0, \\ \sum_k \mathfrak{M}_{ik} = 0.^{2)} \end{cases}
$$

X_i, Y_i sind die Komponenten der Last am Knoten i; X_i', Y_i' die Komponenten eines eventuellen Stützwiderstandes am Knoten i. Die Koordinaten der Knotenpunkte x_i, y_i und die Längen der Stabaxen, l_{ik}, sind natürlich strenggenommen auf den deformierten, den Gleichgewichtszustand des Fachwerkes zu beziehen, werden aber allgemein, wie auch in IV 29a, Nr. **14** (*Grüning*), auf den ursprünglichen Zustand bezogen, da es wegen der Kleinheit der Verrückungen als Annäherung gestattet ist und den Ansatz fundamental vereinfacht.

Die Zusammenhänge zwischen den statischen Grössen S, Q, $\mathfrak{M}$ und den kinematischen: ε, φ, ω, die sog. *„Elastizitätsgleichungen"*, lauten nach den obigen Ausführungen:

$$
(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = -\frac{2 E_{ik} J_{ik}}{l_{ik}}(2\varphi_i + \varphi_k - 3\omega_{ik}), \\ Q_{ik} = \frac{6 E_{ik} J_{ik}}{l_{ik}^2}(\varphi_i + \varphi_k - 2\omega_{ik}), \\ S_{ik} = E_{ik} \cdot F_{ik} \cdot \varepsilon_{ik}, \end{cases}
$$

wo F_{ik} der Stabquerschnitt ist. Endlich bestehen noch *die rein kinematischen Zusammenhänge*:

$$
(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} l_{ik}^2 \cdot \varepsilon_{ik} = (x_k - x_i)(u_k - u_i) + (y_k - y_i)(v_k - v_i), \\ l_{ik}^2 \cdot \omega_{ik} = (x_k - x_i)(v_k - v_i) - (y_k - y_i)(u_k - u_i). \end{cases}
$$

Die Gleichungen (A), (B), (C) *sind als die Grundgleichungen der Theorie der ebenen Fachwerke mit lauter steifen Stabverbindungen zu bezeichnen.*

Ist nun:

s die Anzahl der Stäbe,
n „ „ „ Knoten,
a „ „ „ Auflagerbedingungen,

so repräsentieren die Grundgleichungen zusammen mit den Auflager-

2) Wenn die Belastung auch noch die Wirkung von Kräftepaaren M_i auf die Knoten hat, ist die letzte Gleichung natürlich durch:

$$\sum_k \mathfrak{M}_{ik} + M_i = 0$$

zu ersetzen.

bedingungen $3n + 6s + a$ Gleichungen, denen ebenso viele Unbekannte gegenüberstehen, nämlich:

s Längsspannkräfte S,
s Schubkräfte Q,
$2s$ Kräftepaare $\mathfrak{M}$,
s Dehnungen ε,
s Stabaxendrehungen ω,
n Knotendrehwinkel φ,
$2n$ Knotenpunktverrückungen u, v,
a unbekannte Stützwiderstandskomponenten X', Y'.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass bei lauter steifen Stabverbindungen neben den in den früheren Artikeln behandelten Fachwerken, bei welchen $s \geqq 2n - a$ war, ganz neue Fachwerke der Verwendung zugänglich werden, nämlich solche, bei welchen $s < 2n - a$ ist, die also, wenn sie an Stelle der steifen mit lauter gelenkigen Stabverbindungen ausgerüstet wären, gar nicht tragfähig wären. Es ist nun zweckmässig, bei der weiteren Durchführung der Theorie diese beiden Fälle scharf zu trennen (Nr. **1** b und **1** c). Denn eine exakte Auflösung der Grundgleichungen ist einerseits umständlich, anderseits nicht nötig[3]); man kann nämlich in jedem der beiden Fälle näherungsweise eine weitere Vereinfachung in den Grundgleichungen eintreten lassen, aber nicht in beiden Fällen dieselbe. Schliesslich ist dann noch in Nr. **1** d über diejenigen Fachwerke zu berichten, bei denen nicht alle Stabverbindungen steif sind.

1 b. **Fachwerke mit lauter steifen Stabverbindungen, die auch mit lauter gelenkigen Stabverbindungen tragfähig wären. Problem der sog. „Nebenspannungen".** Von der historisch ersten Darstellung der Theorie der Nebenspannungen bei *H. Manderla*[4]) weichen wir insofern ab, als in den Grundgleichungen der Nr. **1** a der von *Manderla* berücksichtigte Einfluss der Längsspannkräfte auf die Biegungsmomente von vornherein vernachlässigt ist.

Da ein tragfähiges Fachwerk mit lauter gelenkigen Stabverbindungen keine dehnungslose Deformation gestattet, so werden bei den jetzt zu betrachtenden steifen Fachwerken im Durchschnitt die Grössen φ, ω und ε von derselben Grössenordnung sein. Ebendaraus können wir aber, sofern nur die Querschnittsabmessungen δ der Stäbe noch

3) Neuerdings hat *W. Schachenmeier* in theoretischem Interesse die exakte Behandlung durchgeführt, und zwar für Fachwerke der ersten Art. Der Eisenbau 2 (1911), p. 429.

4) *H. Manderla,* Allg. Bauzeitung 45 (1880), p. 34.

einigermassen klein gegen die Stablängen l sind, *zwei wichtige Folgerungen* ziehen:

1. Der Vergleich der ersten und dritten Gleichung B zeigt, dass im Durchschnitt *die den* $\mathfrak{M}$ *entsprechenden Biegungsspannungen im Vergleich zu den Längsspannungen* $S:F$ *im Verhältnis* $\delta : l$ *klein* sind, also mit Recht den Namen „*Nebenspannungen*" führen im Gegensatz zu den „Haupt- oder Grundspannungen" $S:F$;

2. der Vergleich der zweiten und dritten Gleichung B zeigt, dass im Durchschnitt die *Schubkräfte* Q *im Vergleich zu den Längskräften* S *im Verhältnis* $\delta^2 : l^2$ *klein* sind, also mit Recht dagegen *vernachlässigt* werden dürfen.

Aus 2. folgt unmittelbar, dass die Spannkräfte S, die Dehnungen ε und die Verrückungen u, v genügend genau erhalten werden, wenn man so rechnet, als wenn alle Stabverbindungen gelenkig wären, so dass also dieser Teil der Aufgabe durch den vorangehenden Artikel IV 29 a (*Grüning*) praktisch bereits erledigt ist. Da nun die zweite Reihe der Grundgleichungen (C) sofort auch die ω_{ik} liefert, handelt es sich wesentlich nur noch darum, *die* $n+2s$ *Grundgleichungen*:

$$\text{(a)} \qquad \sum_k \mathfrak{M}_{ik} = 0$$

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{M}_{ik} = -\frac{2E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}}(2\varphi_i + \varphi_k - 3\omega_{ik})$$

nach den $n+2s$ Unbekannten φ und $\mathfrak{M}$ aufzulösen. Im allgemeinen empfiehlt es sich, aus ihnen die $\mathfrak{M}$ zu eliminieren, wodurch man, wenn abkürzend

$$c_{ik} = \frac{E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}}$$

gesetzt wird, die n-Gleichungen:

$$\text{(6)} \qquad 2\left[\sum c_{ik}\right] \cdot \varphi_i + \sum_k c_{ik}\varphi_k = 3 \cdot \left[\sum_k c_{ik}\omega_{ik}\right]$$

für die n unbekannten Winkel φ erhält. Hat man die φ, so hat man nach (b) sofort auch die $\mathfrak{M}$.

Die exakte Auflösung dieser Gleichungen ist immerhin noch beschwerlich und wird gern umgangen auf Grund der Tatsache, dass in der i^{ten} Gleichung (6) der Faktor von φ_i die Faktoren der φ_k merklich überwiegt, so dass die Gleichung für φ_i schon einen brauchbaren Näherungswert liefern wird, wenn man darin die φ_k durch ganz rohe Näherungswerte ersetzt, wenn man z. B. mit *O. Mohr*[5]) in der i^{ten}

5) *O. Mohr*, Zivilingenieur 38 (1892), p. 577, auch in *O. Mohr*, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906, p. 420.

Gleichung alle $\varphi_k = \varphi_i$ setzt. Man bekommt so die *ersten Näherungswerte*:

$$\varphi_i' = \frac{\sum_k c_{ik}\omega_{ik}}{\sum_k c_{ik}}. \tag{7}$$

Dies Verfahren hat ein besonderes Interesse; man würde nämlich genau dasselbe bekommen, wenn man die Idee fasste, dass der Winkel φ_i wesentlich der Steifigkeit am Knoten i verdankt wird, und dementsprechend das Fachwerk so auffasste, als wenn nur am Knoten i die Stäbe steif, aber sonst überall gelenkig verbunden wären. Man hätte dann bei der Integration der Gleichung (3) die zweite Randbedingung (1) durch die Bedingung $B_{ki} = 0$ zu ersetzen und würde an Stelle der ersten Gleichung (B) die folgende bekommen haben:

$$\mathfrak{M}_{ik} = -\frac{3E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}}(\varphi_i' - \omega_{ik}), \tag{8}$$

so dass aus (a) nun wirklich (7) folgen würde. *K. Wieghardt*[6]) findet übrigens, dass die einfachen Gleichungen (7) bei gewissen hochgradig statisch unbestimmten Fachwerken unter Umständen sogar die exakten Werte der Knotendrehungen liefern.

Bessere Näherungswerte φ_i'' findet *O. Mohr*[7]), mit Benutzung der schon erhaltenen φ', indem er in die i^{te} Gleichung (6) formell die Quotienten $\varphi_k : \varphi_i$ einführt und diese dann durch $\varphi_k' : \varphi_i'$ ersetzt, zu:

$$\varphi_i'' = \frac{3 \cdot \sum_k c_{ik}\omega_{ik}}{2 \cdot \sum_k c_{ik} + \sum_k c_{ik}\frac{\varphi_k'}{\varphi_i'}}, \tag{9}$$

bei einem vollständig durchgeführten Zahlenbeispiel stellt sich heraus, dass diese zweiten Näherungswerte praktisch bereits mit den exakten Werten übereinstimmen.

Da die gesuchten Nebenspannungen mit den Kräftepaaren $\mathfrak{M}$ enger zusammenhängen als mit den Knotendrehungen φ, liegt es an sich näher, aus den Gleichungen (a) und (b) die φ zu eliminieren und nicht die $\mathfrak{M}$. Indessen ist das System der $2s$ Gleichungen mit den $2s$ unbekannten $\mathfrak{M}$, das man so bekommt, im allgemeinen sehr unübersichtlich und einer wirklichen Auflösung wenig zugänglich; dagegen scheint es in dem praktisch freilich häufigsten Falle, dass das *Fachwerk eine*

6) *K. Wieghardt,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 53 (1906), p. 113.
7) Vgl. *O. Mohr,* Fußnote 5.

Aneinanderreihung von Dreiecken nach Art der Fig. 3 darstellt, den Vorzug zu verdienen. (*O. Mohr.*[8]))

Hiermit streifen wir schon die zahlreichen, ins einzelne gehenden Untersuchungen darüber, wie man im gegebenen Falle am schnellsten

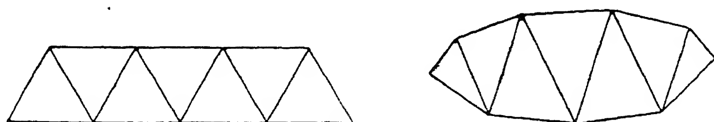


Fig. 3.

und bequemsten aus der allgemeinen Theorie bestimmte Resultate gewinnt. Wir müssen uns aber mit einem allgemein orientierenden Hinweis auf die Namen einiger Autoren begnügen, die an dem weiteren Ausbau der Theorie der Nebenspannungen beteiligt sind: *F. Engesser*[9]), *H. Müller-Breslau*[10]), *Th. Landsberg*[11]).

1c. Fachwerke mit lauter steifen Stabverbindungen, die mit lauter gelenkigen Stabverbindungen nicht tragfähig wären. Regelmässiger Vierendeelträger als Beispiel. Nach dem Vorgange *A. Vierendeels*[11a]) werden neuerdings häufig Fachwerke gebaut, die eine Aneinanderreihung aus Vierecken ohne Diagonalen bilden. Wir beschränken uns auf den durch die Fig. 4a dargestellten Fall, dass die Vierecke

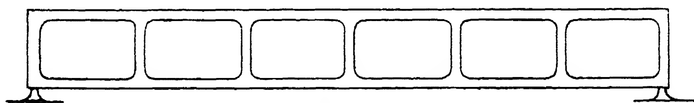


Fig. 4a.

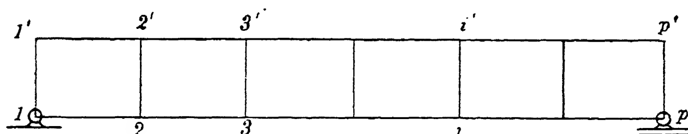


Fig. 4b.

kongruente Rechtecke sind, dass je alle vertikalen Stäbe, „Pfosten“, unter sich, je alle oberen Gurtstäbe und je alle unteren Gurtstäbe

8) *O. Mohr,* Der Eisenbau 3 (1912), p. 181.

9) *F. Engesser,* Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken, 2 Bde., Berlin 1893.

10) *H. Müller-Breslau,* Allg. österr. Bauztg. 56 (1885), p. 85.

11) *Th. Landsberg,* Zusatzspannungen infolge starrer Knotenverbindung. *H. Müller-Breslau*-Festschrift, Leipzig 1912, p. 121.

11a) Vgl. die in der Litteraturübersicht genannten Werke.

unter sich gleichartig sind, dass ferner die Belastung vertikal ist und ausschliesslich in den Knotenpunkten angreift. Die Theorie dieser *regelmässigen Vierendeelträger* wurde zuerst vollständig und einwandfrei von *L. Mann*[12]) entwickelt.

Es mögen bedeuten:

d Länge der Gurtstäbe,
h Länge der Pfosten,
p Anzahl der Pfosten,
P_i Belastung der unteren Gurtung,
P_i' Belastung der oberen Gurtung,
W_l, W_r die beiden Stützwiderstände,
E_0, E_u, E_v Elastizitätsmoduln der oberen und unteren Gurtstäbe und der Pfosten,
J_0, J_u, J_v entsprechend die in Betracht kommenden Trägheitsmomente der Stabquerschnitte,
F_0, F_u, F_v entsprechend die Stabquerschnitte,
$S_{i,i+1}$ u, $S'_{i,i+1}$ Längsspannkräfte in der unteren bzw. der oberen Gurtung,
$Q_{i,i+1}$ u. $Q'_{i,i+1}$ entsprechend Schubkräfte,
$S_{i,i'}$ Längsspannkräfte in den Pfosten,
$Q_{i,i'}$ Schubkräfte in den Pfosten,
$\mathfrak{M}_{i,i+1}$ das vom unteren Gurtstab $i, i+1$ auf den Knoten i übertragene Kräftepaar,
$\mathfrak{M}'_{i,i+1}$ das vom oberen Gurtstab $i', i'+1$ auf den Knoten i' übertragene Kräftepaar,
$\mathfrak{M}_{i+1,i}$ das vom unteren Gurtstab $i, i+1$ auf den Knoten $i+1$ übertragene Kräftepaar,
$\mathfrak{M}'_{i+1,i}$ das vom oberen Gurtstab $i', i'+1$ auf den Knoten $i'+1$ übertragene Kräftepaar,
$\mathfrak{M}_{ii'}$ das vom Pfosten ii' auf den unteren Gurt übertragene Kräftepaar,
$\mathfrak{M}_{i'i}$ das vom Pfosten ii' auf den oberen Gurt übertragene Kräftepaar,
φ_i, φ_i' die Knotendrehwinkel,
$\omega_{i,i+1}$ $\omega'_{i,i+1}$, $\omega_{ii'}$ die Stabaxendrehwinkel,
$\varepsilon_{i,i+1}$, $\varepsilon'_{i,i+1}$, $\varepsilon_{ii'}$ die Stabdehnungen,
u_i, v_i; u_i', v_i' horizontale und vertikale Komponenten der Knotenpunktverrückungen.

---

12) *L. Mann,* Zeitschr. f. Bauwesen 59 (1909), p. 539 und *Müller-Breslau*-Festschrift, Leipzig 1912, p. 135.

Von Vorteil sind folgende Abkürzungen:

$$(10)\quad \begin{cases} a_0 = \frac{2 E_0 J_0}{d}, & b_0 = \frac{6 E_0 J_0}{d^2}, & c_0 = E_0 F_0, \\ a_u = \frac{2 E_u J_u}{d}, & b_u = \frac{6 E_u J_u}{d^2}, & c_u = E_u F_u, \\ a_v = \frac{2 E_v J_v}{h}, & b_v = \frac{6 E_v J_v}{h^2}, & c_v = E_v F_v. \end{cases}$$

Die *Grundgleichungen* (A), (B), (C) (Nr. 1a) lassen sich sofort auf folgende Form bringen:

$$(A')\quad \begin{cases} S_{i,i+1} + S'_{i,i+1} = 0, \\ S_{i-1,i} - S_{i,i+1} = Q_{ii'}, \\ \qquad Q_{i,i+1} = W_l - [P_1 + P_2 + \cdots + P_i] + [S_{11'} + S_{22'} + \cdots + S_{ii'}], \\ Q_{i,i+1} + Q'_{i,i+1} = W_l - [P_1 + P_2 + \cdots + P_i] - [P_1' + P_2' + \cdots + P_i'], \\ \mathfrak{M}_{i,i-1} + \mathfrak{M}_{i,i+1} + \mathfrak{M}_{ii'} = 0, \\ \mathfrak{M}'_{i,i-1} + \mathfrak{M}'_{i,i+1} + \mathfrak{M}_{i'i} = 0. \end{cases}$$

$$(B')\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{i,i+1} = -a_u(2\varphi_i + \varphi_{i+1} - 3\omega_{i,i+1}), & \mathfrak{M}_{i+1,i} = -a_u(\varphi_i + 2\varphi_{i+1} - 3\omega_{i,i+1}), \\ \mathfrak{M}'_{i,i+1} = -a_0(2\varphi_i' + \varphi'_{i+1} - 3\omega'_{i,i+1}), & \mathfrak{M}'_{i+1,i} = -a_0(\varphi_i' + 2\varphi'_{i+1} - 3\omega'_{i,i+1}), \\ \mathfrak{M}_{ii'} = -a_v(2\varphi_i + \varphi_i' - 3\omega_{ii'}), & \mathfrak{M}_{i'i} = -a_v(\varphi_i + 2\varphi_i' - 3\omega_{ii'}), \\ Q_{i,i+1} = b_u(\varphi_i + \varphi_{i+1} - 2\omega_{i,i+1}), & S_{i,i+1} = c_u \cdot \varepsilon_{i,i+1}, \\ Q'_{i,i+1} = b_0(\varphi_i' + \varphi'_{i+1} - 2\omega'_{i,i+1}), & S'_{i,i+1} = c_0 \cdot \varepsilon'_{i,i+1}, \\ Q_{ii'} = b_v(\varphi_i + \varphi_i' - 2\omega_{ii'}), & S_{ii'} = c_v \cdot \varepsilon_{ii'}. \end{cases}$$

$$(C')\quad \begin{cases} d[\omega_{i,i+1} - \omega'_{i,i+1}] = -h[\varepsilon_{i+1,i'+1} - \varepsilon_{ii'}], \\ h[\omega_{i+1,i'+1} - \omega_{ii'}] = d[\varepsilon_{i,i+1} - \varepsilon'_{i,i+1}]. \end{cases}$$

Es wäre zu umständlich, die genaue Lösung dieser Gleichungen aufzustellen. Eine *passende Näherung* gewinnt man aus der Überlegung, dass, da die Längsspannkräfte S zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes nicht ausreichen, jetzt S und die Schubkräfte Q im Durchschnitt von derselben Grössenordnung sein müssen, so dass die Dehnungen ε im Vergleich zu den Stabaxendrehungen ω und den Knotendrehungen φ im Verhältnis $\delta^2 : d^2$ oder $\delta^2 : h^2$ klein sein werden, wenn δ wieder eine Stabquerschnittabmessung bedeutet. Man kann demnach unbedenklich die rechten Seiten von (C′) durch Null ersetzen; da aber nur die Kürzung der *ersten* Gleichung (C′) eine wesentliche Vereinfachung des Rechnungsganges zur Folge hat, möge die zweite beibehalten werden.

Mit Einführung der Abkürzungen:

$$\chi = \frac{2b_v}{a_0}\left[h + \frac{d}{h}a_0\left(\frac{1}{c_u} + \frac{1}{c_0}\right)\right] \text{ und } T_{i,i+1} = (2i-1)W_l - [(2i-1)(P_1+P_1') + (2i-3)(P_2+P_2') + \cdots + P_i + P_i')$$

gelangt man dann leicht zu dem folgenden System von Gleichungen:

$$(11) \quad b_v \cdot \frac{a_u - a_0}{a_0}[\varphi_i - \varphi_{i+1}] = -S_{i-1,i} + (2+\chi)S_{i,i+1} - S_{i+1,i+2} - \frac{b_v d}{a_0} \cdot T_{i,,+1},$$

wo $i = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ ist und $S_{01} = 0$ und $S_{p,p+1} = 0$ zu setzen ist, nebst einem analogen für die φ', das aus diesem durch gegenseitige Vertauschung von a_0 und a_u entsteht, ferner:

$$(12) \begin{cases} \left[2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_v}{a_u} + \frac{a_v}{a_0}\right)\right](\varphi_1 - \varphi_1') + \varphi_2 - \varphi_2' = -\frac{3}{2}\left(\frac{a_v}{a_u} - \frac{a_v}{a_0}\right) \cdot \frac{Q_{11'}}{b_v}, \\ \left[2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_v}{a_u} + \frac{a_v}{a_0}\right)\right](\varphi_p - \varphi_p') + \varphi_{p-1} - \varphi_{p+1}') = -\frac{3}{2}\left(\frac{a_v}{a_u} - \frac{a_v}{a_0}\right) \cdot \frac{Q_{pp'}}{b_v}, \\ \varphi_{i-1} - \varphi_{i-1}' + \\ \left[4 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_v}{a_u} + \frac{a_v}{a_0}\right)\right](\varphi_i - \varphi_i') + \varphi_{i+1} - \varphi_{i+1}' = -\frac{3}{2}\left(\frac{a_v}{a_u} - \frac{a_v}{a_0}\right) \cdot \frac{Q_{ii'}}{b_v}, \end{cases}$$

wo $i = 2, 3, 4, \ldots, p-1$ ist.

Hiermit hat man ein System von $2(p-1) + p = 3p - 2$ Gleichungen gewonnen, denen, wenn man sich die $Q_{ii'}$ vermöge der statischen Gleichung (A′) durch die $S_{i,i+1}$ ersetzt denkt, die $3p-1$ Unbekannten

$$\varphi_i, \; \varphi_i' \text{ und } S_{i,i+1}$$

gegenüberstehen. Die noch fehlende Gleichung findet man leicht aus der Überlegung, dass infolge der Stützung

$$\sum_1^{p-1} \omega_{i,i+1} = 0$$

ist, mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen und der Tatsache, dass die Summe der Drehmomente aller äusseren Kräfte (inkl. W_l und W_r) verschwinden muss, zu:

$$(13) \quad a_u[\varphi_1 + \varphi_p + 2(\varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{p-1})] + a_0[\varphi_1' + \varphi_p' + 2(\varphi_2' + \varphi_3' + \cdots + \varphi_{p-1}')] = 0.$$

Da das erhaltene Gleichungssystem unschwer die Auffassung als eines Systemes simultaner linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten zulässt, dürfte seine Auflösung nicht zu mühsam sein. Hat man so erst die φ_i, φ_i' und $S_{i,i+1}$ gefunden, so liefern die Grundgleichungen sofort alles Übrige.

Eine *ausserordentliche Vereinfachung* tritt nach (11) ein, wenn:

$$a_0 = a_u = a$$

ist, insbesondere also dann, wenn die beiden Gurtungen aus gleichem Material sind und gleich stark dimensioniert werden, was in der Praxis sehr häufig ist. Man hat dann wesentlich nur die einzige lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$(14) \qquad -S_{i-1,i} + (2+\chi) S_{i,i+1} - S_{i+1,i+2} = \frac{b_v d}{a} \cdot T_{i,i+1}$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$

mit den Randbedingungen: $S_{01} = 0$, $S_{p,p+1} = 0$, deren Lösung man sofort explizite hinschreiben kann. Vgl. IV 29a, Nr. 42 (*Grüning*).

Dieser Spezialfall hat auch noch aus einem andern Grunde ein besonderes Interesse. Man kann die Frage stellen, an welcher (wirklich vorhandenen oder in der gedachten Pfostenverlängerung gelegenen) Stelle des Pfostens i das Biegungsmoment Null wird, und findet leicht, dass dies in dem nach oben positiv gerechneten Abstande $v_i h$ vom unteren Gurtknoten i der Fall ist, wobei:

$$(15) \qquad v_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} b_v \cdot \frac{\varphi_i - \varphi_i'}{Q_{ii'}}$$

ist. Da nun in unserm Spezialfall aus den Gleichungen (12) folgt, dass $\varphi_i = \varphi_i'$ ist, so hat der regelmässige Vierendeelträger in dem Spezialfalle $a_0 = a_u$ *in der Mitte der Pfosten* „natürliche Gelenke", d. h. es würde am Spannungs- und Deformationszustand nichts geändert werden, wenn dort wirkliche Gelenke wären.

Die apriorische Kenntnis solcher natürlicher Gelenke ist dem Konstrukteur immer sehr angenehm; für den allgemeineren Fall $a_0 \gtrless a_u$, wo sie nicht genau in gleicher Höhe liegen, wie man sich leicht überzeugt, giebt *L. Mann*[13]) eine Näherungsrechnung.

Man kann noch fragen, wie die Theorie des regelmässigen Vierendeelträgers ausfällt, wenn die Pfosten an der gleichen Stelle vh *wirkliche Gelenke* besitzen. Das Resultat ist ähnlich wie beim gelenklosen Träger. Im allgemeinen kommt man wieder auf ein System simultaner Differenzengleichungen und nur in dem Spezialfalle:

$$\frac{a_0}{a_u} = \frac{1-v}{v}$$

kommt man mit einer einzigen Differenzengleichung aus.

Beim *unregelmässigen Vierendeelträger*, wo die Werte von a_0 und a_u von Rechteck zu Rechteck wechseln oder allgemeinere Viereckfelder

13) *L. Mann, H. Müller-Breslau*-Festschrift, Leipzig 1912. p. 149.

vorhanden sind, gestaltet sich die Auflösung der Grundgleichungen natürlich wesentlich umständlicher. Vgl. etwa *O. Mohr.*[14])

Im übrigen können wir uns mit einem blossen Hinweis auf das Litteraturverzeichnis begnügen[14a]).

1d. Fachwerke mit steifen und gelenkigen Stabverbindungen. Hier muss man, um allen Möglichkeiten gerecht zu werden, die Elastizitätsgleichungen (B) von Nr. **1**a einer Modifikation unterwerfen, während die statischen und kinematischen Grundgleichungen (A) und (C) unverändert bleiben.

An Stelle der früheren Knotendrehwinkel φ_i sind jetzt für jeden Stab ik zwei „Enddrehwinkel" φ_{ik} und φ_{ki} einzuführen als diejenigen Winkel, um welche die beiden Stab*enden* i und k nach erfolgter Belastung gegen den ursprünglichen Zustand gedreht erscheinen.

Man hat dann:

1. für Stäbe, die an beiden Enden steif angeschlossen sind:

$$(B_1)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = -\dfrac{2E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}}(2\varphi_{ik}+\varphi_{ki}-3\omega_{ik}), \\ \mathfrak{M}_{ki} = -\dfrac{2E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}}(\varphi_{ik}+2\varphi_{ki}-3\omega_{ik}), \\ Q_{ik} = \dfrac{6E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}^2}(\varphi_{ik}+\varphi_{ki}-2\omega_{ik}), \end{cases}$$

und überdies am Knoten i für jede Gruppe von Stäben $ik, il, im, \ldots$ die dort miteinander steif verbunden sind:

$$\varphi_{ik} = \varphi_{il} = \varphi_{im} = \cdots$$

und entsprechend am Knotenpunkte k Gleichungen:

$$\varphi_{ki} = \varphi_{kn} = \varphi_{kp} = \cdots,$$

2. für Stäbe, die am Knoten i steif, am Knoten k gelenkig angeschlossen sind:

$$(B_2)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = -\dfrac{3E_{ik}J_{ik}}{l_{ik}}(\varphi_{ik}-\omega_{ik}), \\ \mathfrak{M}_{ki} = 0, \\ Q_{ik} = \dfrac{3E_{ik}J_{ik}}{l_{ih}^2}(\varphi_{ik}-\omega_{ik}), \end{cases}$$

überdies:

$$\varphi_{ki} = -\tfrac{1}{2}\varphi_{ik} + \tfrac{3}{2}\omega_{ik}$$

14) *O. Mohr,* Der Eisenbau 3 (1912), p. 85.

14a) Insofern sich Viadukte als Fachwerke mit steif verbundenen *krummen* Stäben auffassen lassen, ist auch an dieser Stelle auf eine Abhandlung von *W. Schachenmeier* hinzuweisen. S. Fussnote 36a).

und am Knotenpunkt i wiederum wie oben:

$$\varphi_{ik} = \varphi_{il} = \varphi_{im} = \cdots;$$

3. für Stäbe, welche an beiden Enden gelenkig angeschlossen sind:

$$(\mathrm{B}_3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ik} = \mathfrak{M}_{ki} = Q_{ik} = 0, \\ \varphi_{ik} = \varphi_{ki} = \omega_{ik}. \end{cases}$$

Allgemeine Resultate anzugeben, ist nicht gut möglich; die Art der Untersuchung muss sich nach dem jeweiligen Fall richten. *Beispiele* bilden alle die Fachwerke, deren Randstäbe einen steifen Rahmen bilden, *an den die übrigen Stäbe gelenkig angeschlossen sind* (*Th. Landsberg*)[15]), *Kuppeln mit versteiften Ringen* (*H. Müller-Breslau*[16]) und *L. Mann*[17])), *die meisten üblichen Holzfachwerke, Dachbinder* u. dgl. (*S. Müller*).[18])

2. Schlaffe Stäbe. Eine ebene oder auch räumliche Aneinanderreihung ebener Gelenkvierecke, kann dadurch zu einem im allgemeinen statisch bestimmten Fachwerk gemacht werden, dass man in jedes Viereck noch eine der beiden Diagonalen als Stäbe einbaut; zu diesem Typus von Fachwerken gehören viele Kuppeln, Gasbehältergerüste und Brückenträger. Längere Zeit hindurch war es nun aus praktischen Gründen üblich, an Stelle des *einen* notwendigen Diagonalstabes beide Diagonalen des Viereckes als Stäbe einzubauen, aber als Stäbe von so kleinem Querschnitt, dass sie zwar genügend zugfest, aber so gut wie gar nicht druckfest waren, sog. „schlaffe Stäbe“. Die Wirkungsweise dieser Fachwerke kann man sich dann zunächst, wie folgt, vorstellen: Bei einer kleinen Deformation eines aus *starren* Stäben gebildeten Gelenkviereckes in seiner Ebene haben die Längenänderungen der beiden Diagonalen immer entgegengesetztes Vorzeichen; infolgedessen wird im allgemeinen bei irgendeiner Belastung des Fachwerkes in jedem Viereck der eine der beiden Diagonalstäbe auf Zug beansprucht sein, während der andere unwirksam ist. Also wird der Spannungszustand identisch mit jenem sein, der bei gleicher Belastung in einem der 2^n statisch bestimmten Fachwerke herrscht, die man aus dem vorliegenden Fachwerke gewinnt, wenn man, in allen möglichen Kombinationen, in jedem der n Vierecke die beiden schlaffen Diagonalstäbe

15) *Th. Landsberg*, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver., Hannover 1885, H. 4 u. 1886, H. 5.

16) *H. Müller-Breslau*, Die neueren Methoden d. Festigkeitslehre, 4. Aufl., Leipzig 1913, p. 350.

17) *L. Mann*, Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendungen auf das räumliche Fachwerk, Der Eisenbau 2 (1911), p. 18.

18) *S. Müller*, *H. Müller-Breslau*-Festschrift, Leipzig 1912.

durch einen gewöhnlichen, steifen Diagonalstab ersetzt. Es kommt also nur noch darauf an, unter diesen 2^n Fachwerken das richtige herauszufinden. Das ist aber leicht; man braucht nur in irgendeinem von ihnen die Spannungen zu ermitteln und dann in allen jenen Vierecken, in deren Diagonalstab Druckspannung herrscht, diese Diagonale zu entfernen und die andere, die „Gegendiagonale“, als Stab einzubauen.

Es wurde zwar frühzeitig bemerkt, dass diese Betrachtung den offenbar möglichen Fall nicht umfasst, dass in einem oder in mehreren Vierecken des Fachwerks beide Diagonalstäbe gespannt sind, aber eine systematische Untersuchung aller sich bei schlaffen Stäben ergebenden Fragen wurde erst von *K. Wieghardt*[19]) angestellt, der von vornherein alle möglichen Fälle dadurch umfasst, dass er die Stäbe als elastisch ansieht, wobei das *Hooke*sche Gesetz in der gewöhnlichen Form:

$$S = EF \cdot \frac{\delta l}{l}$$

für die steifen Stäbe und in der modifizierten Form:

$$S = EF \cdot \frac{\delta l + |\delta l|}{2l}$$

für die schlaffen Stäbe angesetzt wird. Einfache Beispiele zeigen, dass das Gespanntsein beider Diagonalen auch bei ganz normalen Belastungen vorkommt.

Neuerdings werden die Fachwerke mit schlaffen Stäben gern vermieden, weil sie leicht schlottern, sobald einmal in einem Viereck zufällig beide Diagonalen spannungslos sind.

3. Zerlegung von Brücken in ebene Fachwerke. Obwohl natürlich strenggenommen jedes wirkliche Fachwerk eine räumliche Konstruktion ist, hat man doch die meisten Fachwerke, vor allem Brücken, stillschweigend immer auf Grund der Theorie der ebenen Fachwerke behandelt; und auch heute, wo die Theorie der räumlichen Fachwerke bereits entwickelt ist, bleibt ihre Anwendung meist auf Kuppeln, Gasbehältergerüste u. dgl. beschränkt. Die Erklärung hierfür liegt nahe genug; man scheut die grössere Mühe des Rechnens, aber die Frage nach der Berechtigung bedarf näherer Untersuchung.

Was dazu verlockt, eine Brücke in ebene Fachwerke zu „zerlegen“, ist die Tatsache, dass es bei ihnen möglich ist, auf verschiedene Weise Ebenen zu finden, die jedesmal eine grössere Anzahl von Stäben der Brücke enthalten in solcher Anordnung, dass sie für sich ein tragfähiges ebenes Fachwerk bilden. Hierbei kann natürlich der einzelne Stab

---

19) *K. Wieghardt,* Diss. Göttingen 1903. Auszugsweise: Zentralbl. d. Bauverwaltung 1904, p. 390.

der Brücke zu mehreren dieser ebenen Fachwerke gehören. Welchen Sinn kann es nun haben, das an der Brücke wirkende Kraftsystem in Kraftsysteme zu zerlegen, die an diesen einzelnen ebenen Fachwerken wirken, und nun den Spannungszustand der Brücke als die Superposition der einzelnen so definierten ebenen Spannungszustände anzusehen?

Betrachten wir einen bestimmten Fall. An der Brücke von Fig. 5 möge ausser vertikaler Belastung (P) noch Winddruck (W), (W') wirken.

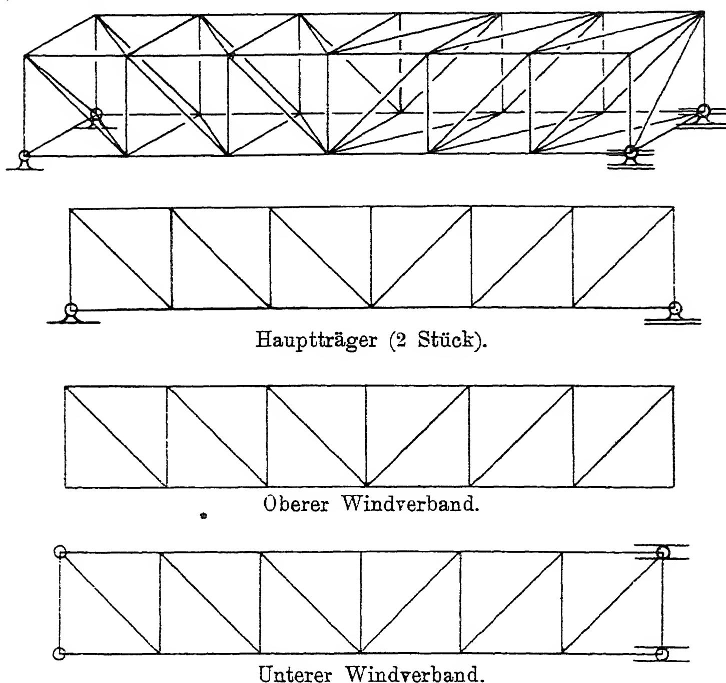


Fig. 5.

Dann ergiebt sich bei der Reduktion auf die gezeichneten ebenen Fachwerke sofort eine fundamentale Schwierigkeit bezüglich des oberen Windverbandes. Er ist, für sich betrachtet, ein statisch bestimmtes, also tragfähiges Fachwerk, nimmt aber an der Stützung der Brücke nicht teil, und so fehlt es ihm an Kräften, die ihn bei dem Winddruck W im Gleichgewicht halten könnten, so dass also die Berechnung dieses aus dem Ganzen losgelösten ebenen Fachwerkes bei der gewählten Belastung gar keinen klaren Sinn hat und jedes etwa hinzugefügte System von Kräften, das W aufhebt, in hohem Grade willkürlich genannt werden muss. Über diese Schwierigkeit

pflegt man hinwegzusehen, da sie für die Hauptträger, wie die Figur erkennen lässt, nicht existiert und deren Berechnung im allgemeinen für wichtiger gehalten wird als die der Windverbände. Nun liegt aber eine noch grössere Schwierigkeit darin, dass selbst in unserm Falle, wo doch die einzelnen ebenen Teilfachwerke nur so viel Stäbe enthalten, als unbedingt nötig ist, wenn sie, jedes für sich genommen, tragfähig sein sollen, das ganze räumliche Fachwerk *statisch unbestimmt* ist. Die Folge davon ist aber, dass einerseits die vertikale Belastung (P) Spannungen auch in jenen Stäben der Windverbände erzeugt, die nicht zum Hauptträger gehören, und dass umgekehrt der Winddruck auch auf die vertikalen und diagonalen Stäbe der Hauptträger wirkt.

Diese Schwierigkeiten und Unklarheiten der üblichen Methode, die Brücke in ebene Fachwerk zu „zerlegen", haben *H. Müller-Breslau*[20]) veranlasst, von jeder solchen Reduktion abzusehen, und eine grosse Anzahl verschiedenartiger Brücken konsequent als statisch unbestimmte räumliche Fachwerke zu berechnen. Er findet, dass die übliche Berechnung der Windverbände auf Winddruck ganz unzuverlässig ist und vor allem, dass die Hauptbelastung (P) unter Umständen in den nicht gleichzeitig zum Hauptträger gehörenden Stäben der Windverbände Spannungen erzeugt, die grösser sind als die durch Winddruck erzeugten.

Indessen lässt sich nun doch unter gewissen Bedingungen eine zwar nur partielle, praktisch aber sehr bedeutende Reduktion auf ebene Fachwerke durchführen. *W. Schlink*[21]) hat erkannt, dass es vor allem darauf ankommt, jede statische Unbestimmtheit zu vermeiden, und dementsprechend eine Reihe von räumlichen Brücken und ähnlichen statisch bestimmten Fachwerken angegeben, die gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass die aus dem Ganzen losgelösten *Hauptträger* als ebene Fachwerke ebenfalls *statisch bestimmt* sind, was er dadurch erreicht, dass er die Tragfähigkeit der Windverbände, als isolierte ebene Fachwerke betrachtet, opfert. Im Falle der Figur braucht man zu dem genannten Zwecke nur aus jedem Windverband je einen Diagonalstab zu entfernen (nicht etwa aus einem zwei). Es ist ohne weiteres klar, dass in solchen Fachwerken die Hauptbelastung (P) ausschliesslich auf die Hauptträger wirkt, und dass diese Wirkung völlig richtig erhalten wird, wenn man den einzelnen Hauptträger in der üblichen Weise als durch (P) belastetes ebenes Fachwerk behandelt Bei der Berechnung auf Winddruck muss man freilich das System als Ganzes,

20) *H. Müller-Breslau*, Zeitschr. f. Bauw. 54 (1904), p. 115.

21) *W. Schlink*, Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbfleisses 83 (1904), p. 181.

also als räumliches Fachwerk, ins Auge fassen, die Berechnung fällt aber sehr einfach aus.

4. Zusammenhänge zwischen einem statisch unbestimmten Fachwerk und den darin enthaltenen Fachwerken.

Der einfachste Zusammenhang dieser Art wird durch die Gleichungen (69) in IV 29 a, Nr. **35** *(Grüning)* dargestellt; sie geben an, welche linearen Beziehungen zwischen den Spannkräften eines statisch unbestimmten Fachwerkes und den Spannkräften eines der in ihm enthaltenen statisch bestimmten Fachwerke bei gleicher Belastung bestehen; sodann behandeln die Nr. **40** u. **41** desselben Referates implizite solche Zusammenhänge. Die beiden folgenden wurden noch nicht besprochen.

Unter den in einem r-fach statisch unbestimmten Fachwerk f_r enthaltenen Fachwerken verstehen wir im folgenden einfach alle jene Fachwerke, welche aus f_r durch Entfernung beliebiger Stäbe und beliebige Änderung der Querschnitte der verbleibenden Stäbe hergestellt werden können.

4a. Reduktion der Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerkes auf die Berechnung darin enthaltener statisch bestimmter und überbestimmter Fachwerke. Die Spannkräfte $S_1, S_2 \ldots$ eines r-fach statisch unbestimmten Fachwerkes genügen nach der allgemeinen Theorie (IV 29 a, Nr. **34**—**42**, *Grüning*) ausser den Gleichgewichtsbedingungen noch r homogenen linearen Gleichungen:

$$(16) \qquad \Phi_i(S_1, S_2 \ldots) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Die Aufstellung und Berücksichtigung dieser „Bedingungsgleichungen“ wird in der technischen Praxis vielfach als zu zeitraubend empfunden und gern umgangen, was auf Grund von Überlegungen der folgenden Art unter Umständen möglich ist: Sind $f_1, f_2, \ldots$ irgend welche der in f_r enthaltenen statisch bestimmten oder überbestimmten Fachwerke, so wird man bei beliebig gegebener Belastung (P) des statisch unbestimmten Fachwerks diese Teilfachwerke so mit $(P^{(1)}), (P^{(2)}) \ldots$ belasten können, dass die Superposition der einzelnen zugehörigen Spannkraftverteilungen

$$S_i = S_i^{(1)} + S_i^{(2)} + S_i^{(3)} + \cdots$$

versuchsweise als Spannkraftverteilung (S) des statisch unbestimmten Fachwerkes gedeutet, die der gegebenen Belastung (P) entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen befriedigt. Dagegen werden die Gleichungen (16) nicht allgemein befriedigt sein, sondern nur dann, wenn die Belastung (P) gewissen Bedingungen genügt, die man eben bekommt, wenn man die S_i, als Funktion von (P) ausgedrückt, in die obigen

Ausdrücke Φ einsetzt. Diese Bedingungen werden nun vermutlich *im allgemeinen* die Belastung (P) mehr einschränken, als in Hinblick auf die in Wirklichkeit tatsächlich heranzuziehenden Belastungen wünschenswert erscheint. Das schliesst aber nicht aus, dass das angedeutete Verfahren *in speziellen Fällen* recht brauchbar ist.

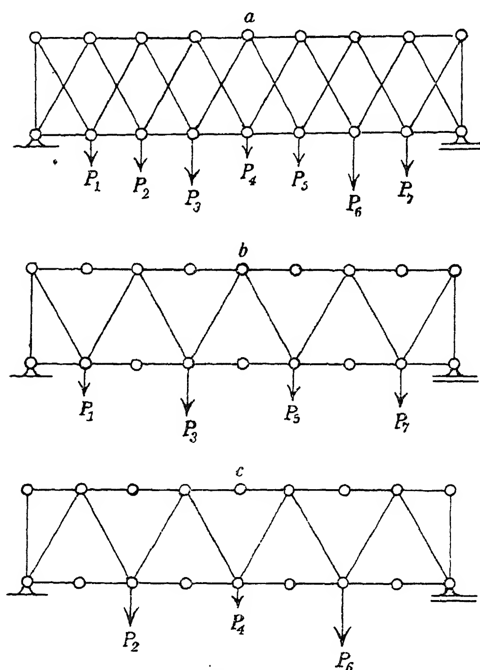


Fig. 6.

Betrachten wir z. B. einen „mehrgliedrigen" Träger nach Art von Fig. 6a. Ein solcher Träger ist *einfach* statisch unbestimmt, und die daraus resultierende Bedingungsgleichung für die Spannkräfte lautet, wenn $\frac{1}{E \cdot F}$ für bzw. die beiden Vertikalstäbe, die horizontalen Stäbe, die Diagonalstäbe die Werte a_v, a_h, a_d, hat:

$$(17) \quad \Phi \equiv a_v \sin^2 \alpha (S_r - S_l) + a_h \cos^2 \alpha \cdot \sum_{m=1}^{m=8} (-1)^m (G_m + H_m) - a_d \sum_{m=1}^{m=8} (-1)^m (T_m + D_m) = 0,$$

worin die grossen Buchstaben Spannkräfte bedeuten, und zwar:

S_r u. S_l in den vertikalen Stäben rechts und links,
$G_1, G_1, \ldots G_8$ von links nach rechts in den unteren Gurtstäben,
$H_1, H_2, \ldots H_8$ von links nach rechts in den oberen Gurtstäben,
$T_1, T_2, \ldots T_8$ von links nach rechts in den nach rechts steigenden Schrägstäben,
$D_1, D_2, \ldots D_8$ von links nach rechts in den nach rechts fallenden Schrägstäben;
α ist der spitze Winkel zwischen den horizontaben und schrägen Stäben.

Wenn man nun die beiden sehr leicht zu erhaltenden Spannungszustände der statisch überbestimmten Fachwerke von Fig. 6b und c bei bzw. den Belastungen $P_1 P_3 P_5 P_7$ und $P_2 P_4 P_6$ superponiert und das Ergebnis in (17) einsetzt, so findet man (C eine Konstante):

$$(18) \qquad \Phi = C\,[3(P_1 - P_7) + P_3 - P_5],$$

so dass also diese Superposition immer dann den gesuchten Spannungszustand liefert, sobald die rechte Seite von (18) verschwindet. Das ist aber noch bei recht allgemeinen Belastungen der Fall, u. a. bei allen in bezug auf die vertikale Symmetrieaxe des Fachwerkes symmetrischen. Proberechnungen haben überdies ergeben, dass die Superposition auch in vielen Fällen eine brauchbare Annäherung liefert, in denen die rechte Seite von (18) nicht verschwindet.[22])

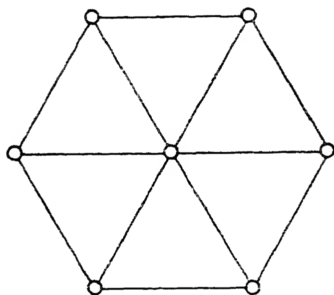


Fig. 7.

Das Fachwerk der Fig. 7, bestehend aus den 6 Seiten eines regelmässigen Sechseckes und den 6 von den Ecken nach dem Mittelpunkt des Sechseckes laufenden „Speichen", ist mit 12 Stäben und 7 Knotenpunkten *einfach* statisch unbestimmt; man kann offenbar durch Wegnahme eines Stabes auf 12 verschiedene Weisen daraus ein statisch bestimmtes Fachwerk machen. Es ist dann, wenn alle Stäbe gleiches $E \cdot F$ haben, bei beliebiger Belastung, die überhaupt im Gleichgewichte ist, die Spannkraftverteilung dieses statisch unbestimmten Fachwerkes einfach das arithmetische Mittel jener 12 Spannkraftverteilungen, die bei der gegebenen Belastung in den genannten statisch bestimmten Fachwerken herrschen.

Ein ganz analoger Satz gilt für jedes *einfach* statisch unbestimmte Fachwerk, sofern man über das $E \cdot F$ der einzelnen Stäbe geeignet verfügt[22a]).

Schliesslich kann man noch fragen, ob nicht schon brauchbare Beziehungen bestehen zwischen der gesuchten Spannkraftverteilung eines f_r und der *eines einzigen* der in ihm enthaltenen statisch bestimmten Fachwerke, etwa $f^{(1)}$. Seien bei einer Belastung (P) $S_1 S_2 \ldots S_m$ die Spannkräfte in $f^{(1)}$, $S_1 S_2 \ldots S_m$ die bei derselben Belastung in den entsprechenden Stäben von f_r herrschenden und $U_1 U_2 \ldots U_r$ die Spannkräfte in den übrigen Stäben von f_r, gelte ferner die Abkürzung:

$$s_i \text{ bzw. } u_i = \frac{\text{Stablänge}}{E_i \cdot F_i},$$

und werde jetzt angenommen, dass beim Übergang von einem zum

22) Vgl. *H. Müller-Breslau,* Die graph. Statik der Baukonstruktionen, Bd. 1, 5. Aufl., Leipzig 1912, p. 579.

22a) *K. Wieghardt,* Über einige einfache, aber weniger bekannte Sätze aus der Statik der Fachwerke. Erscheint demnächst in: Archiv d. Math. u. Phys. Leipzig u. Berlin 1914.

andern Fachwerk die Stabquerschnitte *nicht* variiert werden, so folgt, da nach IV 29a, Nr. 7, (*Grüning*) die „Formänderungsarbeit“ für f_r so klein ist, wie es die Gleichgewichtsbedingungen zulassen, die Ungleichung:

$$(19)\qquad \sum_{i=1}^{i=m} s_i S_i^2 + \sum_{i=1}^{i=r} u_i U_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{i=m} s_i \mathrm{S}_i^2,$$

also erst recht die Ungleichung:

$$(20)\qquad \sum_{i=1}^{i=m} s_i S_i^2 < \sum_{i=1}^{i=m} s_i \mathrm{S}_i^2.$$

Wenn man also in ein statisch bestimmtes Fachwerk neue Stäbe einbaut, so werden die Spannkräfte in den alten Stäben nach (20) dadurch *im Durchschnitt* verkleinert, vorausgesetzt, dass ihre Querschnitte dabei nicht geändert werden. Trotzdem ist man aber nicht sicher, diese Stäbe genügend stark gemacht zu haben, wenn sie die Spannkräfte S aushalten, denn, wie einfache Proberechnungen zeigen, kann es trotz der Ungleichung (20) schon bei ganz gewöhnlichen Belastungen vorkommen, dass *für einzelne Stäbe*

$$S_h^2 > \mathrm{S}_h^2$$

ist, sogar dann, wenn S_h^2 das Maximum aller Spannkraftquadrate von f_1 ist.

4b. Vergleich eines statisch unbestimmten Fachwerkes mit den darin enthaltenen in bezug auf den Materialaufwand. *F. H. Cilley*[23]) behandelt die Frage, welches unter den Fachwerken der in Nr. 4 definierten Mannigfaltigkeit bei fest gegebener Belastung (P) den geringsten Materialaufwand beansprucht und findet, daß dies stets eines der statisch bestimmten (oder überbestimmten) Fachwerke der Mannigfaltigkeit ist. Da weder sein eigener noch ein von ihm reproduzierter, von *G. F. Swain* herrührender Beweis ausreicht, mag hier, in knapper Form, ein exakter Beweis folgen. Dabei können wir uns auf den Fall eines *einfach* statisch unbestimmten Fachwerkes, f_1, beschränken, da die Verallgemeinerung auf beliebiges f_r leicht ist[23a]).

a) *Kleinster Materialaufwand eines statisch bestimmten Fachwerkes.* Da bei gegebener Belastung die Spannkräfte S eines statisch bestimmten Fachwerkes nur von der Struktur des Fachwerkes, aber nicht von den Stabquerschnitten abhängen, kann man, abgesehen vom Vorzeichen,

23) *F. H. Cilley*, Some fundamental propositions relating to the design of frameworks; The Technology quarterly, Boston, 10 (1897), p. 250.

23[a]) Vgl. *K. Wieghardt,* a. a. O., s. Fussnote 22[a])

über seine *Spannungen* σ_{i0}:

$$\sigma_{i0} = \frac{\mathrm{S}_i}{F_i}$$

noch willkürlich verfügen. Daraus folgt, dass bei gegebener Belastung der Materialaufwand

$$M = \sum_i l_i F_i$$

(l_i Stablänge) ein Minimum wird, wenn man die Querschnitte nach

$$F_i = \frac{\mathrm{S}_i}{\sigma_{\max}}$$

wählt, wo $\sigma_{\max}$ die hinsichtlich der Materialfestigkeit noch zulässige größte Spannung bedeutet (der Einfachheit halber sowohl für alle Stäbe als auch für Zug und Druck gleich groß angenommen).

b) *Materialaufwand eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes.* Hier liegt die Sache nicht so einfach, weil man wegen der Bedingungsgleichung (16) über die Absolutwerte der Spannungen σ_i nicht ganz willkürlich verfügen kann. Sei bei gegebener Belastung S_i die Spannkraft in einem der in f_1 enthaltenen statisch bestimmten Fachwerke — wir nennen es $f^{(0)}$ —; seien S_i, σ_i, F_i bzw. Spannkraft, Spannung, Querschnitt des entsprechenden Stabes von f_1; seien ferner U, τ, Φ, λ bzw. Spannkraft, Spannung, Querschnitt, Länge des noch übrigen, „überzähligen" Stabes von f_1, so schreiben sich die Glgn. (69) von IV 29a, Nr. **35** (*Grüning*), wie folgt:

(21) $$S_i = \mathrm{S}_i + a_i \cdot U$$

oder, da:

$$S_i = F_i \cdot \sigma_i \qquad \text{und} \qquad U = \Phi \cdot \tau$$

ist:

(22) $$F_i = \frac{\mathrm{S}_i}{\sigma_i} + \Phi\tau \frac{a_i}{\sigma_i},$$

wo die Koeffizienten a_i lediglich von der Struktur des Fachwerkes, also insbesondere *nicht* von den Stabquerschnitten abhängen. Die homogene lineare Bedingungsgleichung, welche zwischen den Spannungen eines *einfach* statisch unbestimmten Fachwerkes besteht, läßt sich bekanntlich aus den Gleichungen (21) ablesen; sie lautet:

(23) $$a_1 l_1 \cdot \sigma_1 + a_2 l_2 \cdot \sigma_2 + \cdots + a_m l_m \cdot \sigma_m + \lambda \cdot \tau = 0,$$

(m Anzahl der Stäbe von $f^{(0)}$).

Aus (22) ergiebt sich mit Einführung der Abkürzung:

$$A = \frac{a_1 l_1}{\sigma_1} + \frac{a_2 l_2}{\sigma_2} + \cdots + \frac{a_m l_m}{\sigma_m} + \frac{\lambda}{\tau}$$

für den Materialaufwand die Darstellung:

$$M = \sum \frac{l_i S_i}{\sigma_i} + \Phi \cdot \tau \cdot A \dots . \tag{24}$$

Man findet nun leicht, dass, wenn man an Stelle des Stabes λ den Stab l_h als überzählig behandelt hätte, man dann für dasselbe M den Ausdruck

$$M = \frac{\lambda \cdot U}{\tau} + \sum_i \frac{l_i S_i^{(h)}}{\sigma_i} + F_h \cdot \frac{\sigma_h}{a_h} \cdot A \tag{25}$$

bekommen haben würde, wo natürlich U, $S_i^{(h)}$ die der gegebenen Belastung entsprechenden Spannkräfte des *jetzt* zugrunde gelegten statisch bestimmten Fachwerkes — wir nennen es $f^{(h)}$ — bedeuten sollen.

c) Jetzt kann man folgendes beweisen: *Bei jedem Spannungszustande σ_i, τ, welcher in f_1 möglich ist, kann man unter allen statisch bestimmten Fachwerken $f^{(0)}$, $f^{(h)}$ stets mindestens eines finden, welches bei demselben Spannungszustand einen kleineren, oder wenigstens keinen größeren Materialaufwand beansprucht als f_1.*

Sei bei gegebener Belastung (P), also auch gegebenen S und U, das System:

$$\sigma_i, \ \tau, \ F_i, \ \Phi$$

in f_1 *möglich*, d. h. also, genüge es den Gleichungen (22) und (23) sowie den Ungleichungen:

$$F_i \geqq 0, \qquad \Phi \geqq 0. \tag{26}$$

Dann ist entweder A gleich Null oder nicht. Sei erstens $A = 0$, dann zeigen die Formeln (24) und (25), dass der Materialaufwand in allen Fachwerken der Mannigfaltigkeit der gleiche ist. Sei zweitens $A \gtrless 0$; dann läuft alles darauf hinaus, dass infolge der Bedingungsgleichung (23) die Grössen

$$\tau, \ \frac{\sigma_1}{a_1}, \ \frac{\sigma_2}{a_2}, \ \dots\dots, \ \frac{\sigma_m}{a_m}$$

nicht alle dasselbe Vorzeichen haben können. Denn daraus folgt zunächst, dass mindestens einer der Ausdrücke:

$$\tau \cdot A, \ \frac{\sigma_1}{a_1} \cdot A, \ \dots\dots, \ \frac{\sigma_m}{a_m} \cdot A,$$

positiv sein muß, etwa $\frac{\sigma_p}{a_p} \cdot A$. Die p-te Gleichung (25) zeigt dann, dass eine Verkleinerung von F_p eine Verkleinerung von M zur Folge hat. Es fragt sich nun, ob die Gleichungen (22) in Verbindung mit den Ungleichungen (26) zulassen, dass man F_p Null setzt oder nicht. Kann man $F_p = 0$ setzen, so beansprucht eben $f^{(p)}$ einen kleineren Materialaufwand als f_1; kann man aber F_p nicht Null setzen, so kann

man es, und damit auch M, aber so weit verkleinern, bis die schärfste der das Nullsetzen ausschließenden Ungleichungen (26), etwa $F_k \geqq 0$, gerade noch befriedigt ist, d. h. also bis gerade F_k Null wird; in diesem Falle beansprucht also $f^{(k)}$ einen kleineren Materialaufwand als f_1.

Ganz analog könnte man natürlich unter den Fachwerken $f^{(0)}$, $f^{(\lambda)}$ eines finden, das einen *grösseren* Materialaufwand beansprucht als f_1. *Bei gegebener Belastung beanspruchen also die in einem einfach statisch unbestimmten Fachwerke f_1 enthaltenen statisch bestimmten Fachwerke zum Teil einen kleineren, zum Teil einen grösseren Materialaufwand als das statisch unbestimmte Fachwerk selbst; oder es beanspruchen alle, auch f_1 selbst, denselben Materialaufwand.*

Damit ist im wesentlichen der *Cilley*sche Satz bewiesen[24]).

5. Dynamik der Fachwerke. Viele Fachwerke werden stark wechselnden Verkehrsbelastungen ausgesetzt von einer Grösse, die neben der ständigen Belastung durch das Eigengewicht der Konstruktion sehr wohl in Betracht kommt oder sie gar überwiegt. In jedem solchen Falle ist dann die *Statik* der Fachwerke allein nicht imstande, ein zutreffendes Bild von den Spannungen und Deformationen zu geben. Denn wenn z. B. ein Eisenbahnzug über eine Brücke fährt, so liefert zwar natürlich die Statik für jeden Augenblick einen Spannungszustand, aber die entsprechende zeitliche Aufeinanderfolge dieser Zustände würde nur dann ein einigermassen zutreffendes Bild der wirklich auftretenden Spannungen geben, wenn die Geschwindigkeit des Zuges minimal wäre. In Wirklichkeit wird der Vorgang von äusserst komplizierten Schwingungen begleitet sein.

Über diese ist zurzeit nichts Zuverlässiges bekannt.[25])

Um nun zunächst überhaupt einmal über die Ergebnisse der Fachwerkstatik hinauszukommen, stellt sich *H. Reissner*[26]) das folgende einfachere Problem. Er denkt sich die Last in relativer Ruhe zum Fachwerk, verteilt ihre Masse in geeigneter Weise auf dessen Knotenpunkte und untersucht die freien Schwingungen des so entstandenen,

---

24) Auf *Cilleys* weitergehende, hauptsächlich auf diesen Satz gegründete Behauptung, daß allgemein und schlechthin die statisch bestimmten Fachwerke den statisch unbestimmten vorzuziehen seien, kann hier nicht eingegangen werden. Vgl. *F. H. Cilley,* The exact design of statically indeterminate frameworks. An exposition of its possibility, but futility, Transactions of the American Society of Civil Engineers 43 (1900), p. 353.

25) Das Problem der wandernden Last ist erst für den Fall gelöst, dass die Last ein Massenpunkt und der Träger ein einfacher elastischer Stab ist. *M. Radaković,* Sitzungsber. d. Wiener Akademie 108 II A (1899), p. 577.

26) *H. Reissner,* Zeitschr. f. Bauwesen 53 (1903), p 135.

aus elastischen Stäben und Massenpunkten bestehenden Systemes. Beschränkt man sich der Einfachheit wegen auf ebene Fachwerke, so kann man Torsionsschwingungen der Stäbe ausschliessen, und es bleiben noch Dehnungs- und Biegungsschwingungen zu betrachten. Hierfür stehen nun die Formeln (75) und (95) des Ref. IV 26 (*Lamb*) zur Verfügung. Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Bedingungen an den Enden der Stäbe, wie sie 1. der Art der Knoten (ob gelenkig oder steif) und 2. dem Umstande entsprechen, dass sich der in dem betreffenden Knotenpunkte konzentrierte Massenpunkt unter dem Einflusse der auf ihn von den Stabenden übertragenen Kräfte K (und Kräftepaare $\mathfrak{M}$) nach den Gesetzen der Dynamik des Massenpunktes (IV 6, *Stäckel*) bewegen muss. $(\sum \mathfrak{M} = 0)$. Aber selbst die so sehr vereinfachte Aufgabe gestattet eine wirklich durchgeführte Lösung nur in sehr wenigen Fällen. Immerhin macht *H. Reissner* an einigen dieser Lösungen plausibel, dass man auch in komplizierteren Fällen eine genügende Annäherung bekommt, wenn man nicht nur die Masse der Last, sondern auch noch die Masse der Stäbe in geeigneter Weise auf die Knotenpunkte verteilt, so dass man nun ein System von n Massenpunkten $m_1 m_2 \ldots m_n$ hat, die durch elastische, aber masselose Stäbe miteinander nach Massgabe der Struktur des Fachwerkes verbunden sind. Die Schwingungen dieses Systemes von *endlichem* Freiheitsgrade sind dann nach den allgemeinen Ansätzen unter Nr. 1a in IV 26 (*Lamb*) zu ermitteln. *Reissner* giebt die allgemeinen Formeln, die sich so für das ebene Fachwerk ergeben, und führt ein Zahlenbeispiel bis zur Berechnung der Frequenzen der einzelnen Normalschwingungen durch.

Was ausser den Frequenzen vor allem interessiert, sind die Amplituden der Schwingungen, denn von ihnen hängt das Grössenverhältnis der maximalen dynamischen Spannungen zu den statischen ab. Massgebend für die Amplituden sind natürlich die Anfangsbedingungen des Systems. Stellt man sich insbesondere vor, dass im Augenblick $t = 0$ auf das bis dahin ruhende Fachwerk die ganze Last *plötzlich, aber ohne Stoss* aufgebracht wird, so liefert folgende Überlegung[27]) eine Art durchschnittliches Ergebnis für das Verhältnis der maximalen dynamischen zur statischen Beanspruchung. Da für $t = 0$ nach Voraussetzung die kinetische Energie verschwindet, so kann im Verlauf der nun erfolgenden Bewegung die potentielle Energie höchstens wieder den Wert erreichen, den sie zur Zeit $t = 0$ hatte. Dieser Gedanke

27) Vgl. *A. E. H. Love,* Lehrbuch d. Elastizität, deutsch von *A. Timpe.* Leipzig u. Berlin 1907, p. 214

setzt sich in die Ungleichung um:

$$\sum_i \frac{l_i}{E_i F_i} \cdot S_i^2 \leqq 2. \sum_i \frac{l_i}{E_i F_i} S_i \cdot S_i^{(s)},$$

wo $S_i^{(s)}$ die statische und S_i die dynamische Spannkraft eines Stabes bedeutet, so dass also die maximale dynamische Beanspruchung *im Durchschnitt* höchstens doppelt so gross ist wie die statische.

Will man freilich *für den einzelnen Stab* das Verhältnis $|S_i| : |S_i^{(s)}|$ kennen lernen, so ist man auf eine detailliertere Untersuchung angewiesen; denn es ist an einfachen Beispielen leicht zu sehen, dass trotz obiger Ungleichung für den einzelnen Stab das Verhältnis den Wert 2 beliebig überschreiten kann.

II. Statik der Steinbauten.

6. Allgemeines. Mehr noch als bei andern Baukonstruktionen ist man, wegen der beträchtlichen mathematischen Schwierigkeiten, bei Steinbauten auf die Untersuchung *statischer* Verhältnisse beschränkt. Die damit begangenen Vernachlässigungen sind im allgemeinen auch unbedeutend, sei es nun, dass wegen grosser Massigkeit der Konstruktion die wechselnde Verkehrslast gegenüber dem Eigengewicht keine Rolle spielt, sei es, dass die Belastung überhaupt gar nicht oder wenig wechselt. Schornsteine machen eine Ausnahme; sie geraten im Winde leicht in ziemlich beträchtliche Schwankungen.

Im allgemeinen hat man einen Komplex von Steinen, die durch festgewordenen Mörtel miteinander verbunden sind, als einen festen, aber *deformierbaren* Körper anzusehen, weil bei der Auffassung als *starrer* Körper nicht nur die Spannungen, sondern im allgemeinen sogar Stützwiderstände und damit Biegungsmomente, Schubkräfte usw. unbestimmbar bleiben würden. Um nun nicht vor unüberwindlichen Schwierigkeiten zu stehen, wird man diesem Körper im allgemeinen die Eigenschaft zuschreiben, homogen und elastisch isotrop zu sein und dem verallgemeinerten *Hooke*schen Gesetz (IV 23, Nr. 4 *Müller-Timpe*) zu gehorchen, obwohl gerade diese Annahme durch die Erfahrung kaum bestätigt wird, wenigstens nicht im Gebiete der nicht ganz minimalen Verzerrungen.

Damit steht man im Zeichen des Integrationsproblems der Elastizitätstheorie für den Fall des Gleichgewichtes (IV 24, Nr. 2, *Tedone*) und hat also mit Differentialgleichungen zu tun, in denen im allgemeinen mindestens zwei unabhängige Variable vorkommen. Die Technik, die durch das Bedürfnis nach schneller Erledigung getrieben wird, reduziert nun häufig den mathematischen Apparat gewaltsam durch

Einführung *willkürlicher* Annahmen über die erst zu berechnende Spannungsverteilung, auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen oder gar elementare Aufgaben. Diese willkürlichen Annahmen sind meist so beschaffen, dass sie in gewissen Spezialfällen wirklich zutreffen und also vermuten lassen, dass sie in verwandten Fällen ein ungefähr richtiges Bild der Spannungsverteilung liefern.

Mauerwerk besitzt nur eine geringe oder doch wenigstens als nicht zuverlässig angesehene Zugfestigkeit. Zugspannungen müssen also möglichst vermieden werden. Dadurch bekommen viele Untersuchungen über Steinbauten ihr charakteristisches Gepräge gegenüber denen bei andern Baukonstruktionen.

7. Historisches über die Statik der Gewölbe. Die im sog. gotischen Stil erbauten grossen Kirchen zeigen eine bei der Schwerfälligkeit des Materials besonders auffallende Zierlichkeit und Kühnheit der Konstruktion. Die eigentlichen tragenden Glieder rufen fast den Eindruck eines steinernen Fachwerkes hervor, so dass man unwillkürlich auf den Gedanken kommt, eine so kühne Bauweise müsse Hand in Hand mit einer genauen Kenntnis statischer Gesetze gegangen sein. Indessen scheint diese Frage schwer zu entscheiden. So ist es z. B., wie es scheint, zweifelhaft, ob das charakteristische statische Merkmal des *Spitzbogens* (der ja wohl erst in der Gotik seine volle Verwendung als konstruktives Element gefunden hat), nämlich seine besondere Eignung, *im Scheitel konzentrierte* Lasten zu tragen, bei seiner Einführung und Verwendung eine entscheidende Rolle gespielt hat.[28])

Verhältnismässig früh scheint man auf den Gedanken gekommen zu sein, einen Gewölbebogen mit einer Kette zu vergleichen. Man wusste, dass eine an beiden Enden befestigte Kette unter bestimmter Belastung eine bestimmte Gleichgewichtsform annimmt, und hielt es deshalb, zunächst wohl ganz naiv, für zweckmässig, einem Gewölbebogen ebenfalls diese Form zu geben, wenn er hauptsächlich diese Belastung zu tragen hatte. Erst viel später, als man bereits die Notwendigkeit eingesehen hatte, den Gewölbebogen als elastischen Körper aufzufassen, konnte man versuchen, diesen Gedanken zu präzisieren (Nr. **10**).

Auch noch nachdem *L. Navier* seine grundlegenden Untersuchungen zur Elastizitätstheorie angestellt hatte (IV 23, Nr. 2, *Müller-Timpe*), pflegte man ein gewöhnliches, zylindrisches Gewölbe (sog. „*Tonnengewölbe*“) als einen Haufen lose aufeinander geschichteter starrer Steine

28) Zentralblatt der Bauverwaltung 1885, mehrere Abhandlungen. Vgl. auch Zeitschr. f. Arch. u. Ing., Wochenausgabe 1900, p. 246.

aufzufassen, welche in den Fugen reibend aufeinander drücken. Bei dieser Auffassung mussten, wegen der statischen Unbestimmtheit der Konstruktion, zwar der Spannungszustand und im allgemeinen auch die Stützwiderstände, Biegungsmomente usw. ganz unbekannt bleiben, aber immerhin gelangte *C. H. Moseley*[29]) auf diesem Wege zu dem anschaulichen und bei technischen Gewölbeuntersuchungen wichtigen Begriff der *Stützlinie* (Nr. 8).

Es stellt sich heraus, dass die Stützlinie meist statisch unbestimmt ist (Nr. 8). Bevor man nun in der Annahme der (elastischen) Deformierbarkeit der Körper das Universalmittel zur Bestimmung aller statisch unbestimmten Grössen erkannt hatte, ermittelte man die Stützlinie gern mit Hilfe gewisser „Prinzipe", die ad hoc erfunden wurden.[30])

Kuppelgewölbe zerschnitt man durch zahlreiche vertikale Meridianebenen in viele schmale Streifen, die dann als ebensoviele Tonnengewölbe betrachtet wurden. Da man hierbei zunächst die senkrecht zu den Schnittflächen wirkenden Ringspannungen nicht beachtete, kam man vorübergehend zu ganz falschen Ansichten über das Wesen der Kuppeln; mit dem Ausbau der Elastizitätstheorie wurde dann aber die Ansicht plausibel, dass in einer Kuppel nur unbeträchtliche Biegungsmomente auftreten; seitdem wurden und werden häufig die obengenannten Ringspannungen so bestimmt, dass überall das Biegungsmoment verschwindet. Eine wirklich rationelle Begründung dieses Verfahrens wurde aber erst neuerdings gegeben.

8. **Die Stützlinie.** Der Einfachheit wegen wird vorausgesetzt, dass man mit der Betrachtung eines Systems von Kräften auskommt, die *in einer* (vertikalen) *Ebene* liegen.

Wird eine Anzahl keilförmig zugeschnittener Steine aufeinander geschichtet (Fig. 8), auf zwei Fundamente gelagert und irgendwie belastet, so führt die Betrachtung des Kräftespieles am einzelnen Stein zur Definition der *Stützlinie* als desjenigen geradlinig gebrochenen Linienzuges, dessen Ecken in den Fugenflächen liegen, und zwar dort, wo die Resultierende aus den in der Fuge von Stein zu Stein übertragenen Druck- und Schubspannungen (Reibungsspannungen) die Fuge schneidet.

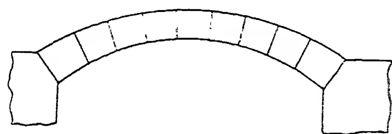


Fig. 8.

29) *C. H. Moseley*, The mechanical principles of engineering and architecture. London 1843, p. 403.

30) Zusammenstellung bei *A. Föppl*, Vorlesungen über techn. Mechanik 2, Leipzig 1900, p. 403. Vgl. insbesondere: *C. H. Moseley*, On a new principle in statics, called the principle of least pressure, Phil. Mag. 3 (1833), p. 285.

Gesetzt, man hätte sich irgendwie die Kenntnis der Stützlinie verschafft (s. unten), so würde man in folgender Weise zu einer brauchbaren Abschätzung der hauptsächlich interessierenden Druckspannungen (um die Schubspannungen kümmert man sich in erster Linie nicht) gelangen: Man macht über sie die einfachste Annahme, welche noch jeder Grösse und Lage des resultierenden Fugendruckes angepasst werden kann, nämlich die einer *linearen* Verteilung über die Fugenfläche, jedoch mit der folgenden, wegen der losen Schichtung der Steine, erforderlichen Modifikation: Sollte nur ein Teil der Fugenfläche an der Druckübertragung beteiligt sein, so ist die Trennungslinie zwischen dem „wirksamen" und „unwirksamen" Teil eine Gerade, und die Druckspannungen im wirksamen Teil sind proportional mit dem Abstande der betreffenden Stelle von dieser Geraden, während im unwirksamen Teil die Druckspannungen Null sind.

Hieraus folgt mit Benutzung der Theorie vom „Zentralkern" ebener Flächen (IV 5, *Henneberg*, Nr. 23), dass nur dann die ganze Fugenfläche zur Druckübertragung ausgenutzt wird, wenn der Angriffspunkt des resultierenden Fugendruckes innerhalb des Zentralkerns der Fugenfläche liegt. (Bei dem am häufigsten vorkommenden rechteckigen Querschnitt muss hiernach der Angriffspunkt im „mittleren Drittel" der Gewölbedicke liegen.) Auf Grund dieser Zusammenhänge wird ein Gewölbe nur dann als *richtig* konstruiert angesehen, wenn bei jeder in Betracht kommenden Belastung jede Ecke der jeweiligen Stützlinie innerhalb des Zentralkerns der zugehörigen Fugenfläche liegt, und als *besonders günstig* dann, wenn bei der vorwiegend in Betracht kommenden Belastung jede Ecke der Stützlinie mit dem Schwerpunkte der zugehörigen Fugenfläche zusammenfällt, denn dann ist überall die Druckspannung in der Fuge konstant, so dass das Material gewissermassen gleichmässig ausgenutzt erscheint.

Diese Überlegungen führen die Aufgabe, ein Gewölbe zu berechnen, im wesentlichen auf die Ermittlung der Stützlinie zurück. Diese freilich begegnet grossen Schwierigkeiten. Vor allem weiss man nämlich a priori eigentlich gar nicht, worin die Belastung des Gewölbebogens besteht, mit andern Worten, welche Kräfte infolge des Gewichtes der auf dem Bogen lastenden Massen, Aufschüttung und Verkehrslast, auf die obere Gurtung des Bogens übertragen werden: Grenzt z. B. der Bogen an eine Aufschüttung von Erde, so hätte man, um diese Frage beantworten zu können, zunächst einmal die ganzen Schwierigkeiten der Theorie des Erddrucks (IV 28, *Reissner*) zu überwinden; handelt es sich aber um eine feste Aufmauerung, so bliebe eigentlich nichts anderes übrig, als das ganze System — Bogen

plus Aufmauerung — als einheitlichen, festen, elastischen Körper zu betrachten, an welchem ausser seinem eigenen Gewicht als Massenkraft, die Verkehrslast als Oberflächenkraft angreift, und nun zu versuchen, mit den äussersten mathematischen Hilfsmitteln den Spannungszustand dieses „Gewölbes" zu finden. Statt dessen verfährt man ganz summarisch: Man rechnet einfach so, als wenn jedes Stück der Gurtung durch das Gewicht aller gerade vertikal über ihm befindlichen Massen belastet würde, und dies Verfahren scheint wenigstens insofern berechtigt, als ein auf dieser Grundlage berechneter Gewölbebogen vermutlich nicht zu schwach ausfällt. Die Belastung des Gewölbebogens wird im folgenden als in diesem Sinne bekannt angesehen.

Zu einer gegebenen Belastung giebt es nun noch eine dreiparametrige Schar möglicher Stützlinien: die Stützlinie ist bei gegebener Belastung im allgemeinen (wie z. B. bei der Anordnung der Fig. 8) noch dreifach statisch unbestimmt. Durch besondere Anordnung kann sie statisch bestimmt werden (wie z. B. beim „Dreigelenkbogen" der Fig. 9 a; hier sind von vornherein von ihr die drei Punkte A, B und C bekannt). Bei der Anordnung von Fig. 9 b („Zweigelenkbogen")

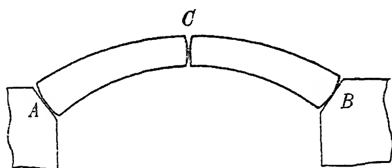


Fig. 9 a.



Fig. 9 b.

sind von ihr von vornherein die beiden Punkte A und B bekannt, so dass sie noch *einfach* statisch unbestimmt ist. (In diesem Falle wird als diejenige statisch unbestimmte Grösse, welche die ∞^1 bei gegebener Belastung jetzt noch statisch möglichen Stützlinien charakterisiert, gern die beiderseits entgegengesetzt gleiche Horizontalkomponente H der Stützenwiderstände, der sog. „*Horizontalschub*" des Gewölbes, gewählt.)

Ist nun die Stützlinie statisch bestimmt, so kann sie natürlich auch ohne weiteres konstruiert werden (s. unten); ist sie aber noch statisch unbestimmt, so verfährt man gewöhnlich so: Entweder macht man sich die Mühe, alle statisch unbestimmten Grössen mit Hilfe der Elastizitätstheorie, meist in Form der sog. „technischen Gewölbetheorie" (Nr. **9**), zu bestimmen oder aber: Man beschränkt sich darauf, unter den unendlich vielen statisch möglichen Stützlinien, durch Probieren und ev. Änderung der Bogenform, eine ausfindig zu machen, welche alle Fugenflächen in möglichster Nähe von deren Schwerpunkten

schneidet, und nimmt dann an, dass die wirkliche Stützlinie ungefähr mit dieser statisch möglichen zusammenfällt. Auch dieses gewiss einfache, aber scheinbar absurde Verfahren lässt sich einigermaßen rechtfertigen (Nr. **10**).

Eine gewisse Schwierigkeit liegt noch darin, dass, wenn der Gewölbebogen nicht mehr unter dem Bilde einer losen Aneinanderreihung von Steinblöcken gesehen werden kann, sondern als einheitlicher, fester Körper aufgefasst werden muss, die Stützlinie nicht ohne weiteres definiert ist, weil der Begriff „Fuge" keinen klaren Sinn mehr hat. Man hilft sich dann so, daß man auf eine plausible Weise künstliche Fugen, „Querschnitte" definiert (im Falle der Fig. 10 etwa mit *J. Résal*[31]) so, dass man die Gleichheit der Winkel α und β verlangt.) Da die Querschnitte in unendlicher Zahl vorhanden sind, ist die analog wie oben definierte Stützlinie eine im allgemeinen stetig gekrümmte Kurve. Man hält das Gewölbe für um so besser konstruiert, je weniger sich die Stützlinie von der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Querschnitte, der „Mittellinie" oder „Axe" des Gewölbes unterscheidet.

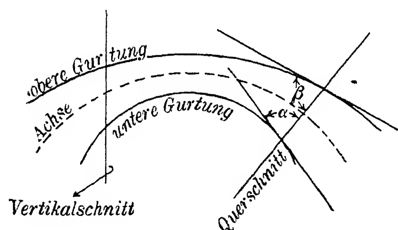


Fig. 10.

Immerhin ist jede solche Definition der Querschnitte willkürlich, und es steht daher nichts im Wege, diese Willkürlichkeit gegebenenfalls auszunutzen. Handelt es sich insbesondere um die häufig vorkommende Aufgabe, eine zu einer gegebenen Belastung gehörige Stützlinie zu *zeichnen*, so wird man am besten *Vertikalschnitte* als Querschnitte wählen (Fig. 10), wie unmittelbar einleuchtet.[32]) Übri-

31) *E. Degrand* et *J. Résal*, Ponts en maçonnerie. Vol. 1: *J. Résal*, Stabilité des voutes, Paris 1887, p. 104 (zitiert nach: Ann. d. ponts et chaussées 16 (1888), p, 76.)

32) Die in bezug auf die Vertikalschnitte genommene Stützlinie hat übrigens die besondere Eigenschaft, gleichzeitig eine „*Drucklinie*" der betreffenden Belastung zu sein, wenn man mit diesem Namen eine Kurve bezeichnet, deren Berührende durch ihre Richtung die Richtung der über den Schnitt resultierenden Spannkräfte anzeigt. Natürlich lässt sich auch für die Querschnitte eine Drucklinie zeichnen; sie geht aber im allgemeinen nicht durch die Angriffspunkte der resultierenden Spannkräfte. Eine vollständige Übersicht über alle einschlägigen Verhältnisse giebt *M. Milankovitsch*: Theorie der Druckkurven, Zeitschr. Math. Phys. 55 (1907), p. 1. Zu bemerken ist, dass das, was hier, dem allgemeineren Sprachgebrach entsprechend, Stützlinie genannt wird, dort „Druckkurve" heisst, und dass unter „Stützlinie" dort eine solche „Druckkurve"

gens ändern sich bei einer Variation der Querschnitte Axe und Stützlinie unter normalen Verhältnissen nur wenig.[33])

9. Das Tonnengewölbe als krummer Stab. Die sog. technische Theorie des Tonnengewölbes. Wenn die Stützlinie statisch unbestimmt ist, so muß man, um sie zu finden, auf die elastische *Deformation* des Gewölbebogens eingehen. Dabei tritt folgende neue und wesentliche Schwierigkeit auf: Spannungen und Deformationen eines elastischen Körpers sind bekanntlich erst dann eindeutig bestimmt, wenn außer den Massenkräften noch für jeden Punkt der Oberfläche von den drei Verrückungskomponenten des Punktes und den drei dort wirkenden Spannungskomponenten drei Grössen gegeben sind (allgemeiner: wenn zwischen den sechs Grössen drei Beziehungen gegeben sind.) Somit muß man, wenn die Stützlinie statisch unbestimmt ist, wenn man also, mit anderen Worten, die Oberflächen*spannungen* an den „Kämpfern" (Fundamentflächen des Gewölbebogens) nicht oder doch nicht vollständig kennt, annehmen, daß man etwas über die Kämpfer*verrückungen* weiss. Dies Wissen ist aber sehr problematisch, weil ja Fundament und Untergrund selbst wieder deformierbar und verrückbar sind. Es hat deshalb auch nur den Sinn einer mehr oder weniger rohen Annäherung, wenn hiervon abgesehen und demgemäss z. B. eine feste Einmauerung des Bogens (Fig. 8) dadurch charakterisiert wird, dass man alle Kämpferverrückungen Null setzt, eine gelenkige Auflagerung (Fig. 9) dadurch, dass man den Gelenkpunkt A bezw. B als unverrückbar betrachtet usw.

Die technische Gewölbetheorie stellt sich nun die Aufgabe, auf möglichst einfache Weise die statisch unbestimmten Grössen des Gewölbebogens unter der Voraussetzung zu finden, dass die Massenkräfte und die an der Längsoberfläche wirkenden Oberflächenkräfte gegeben sind und dass man über die Kämpferverrückungen so viel weiss, wie im Sinne der obigen Ausführungen notwendig ist.

Sofern die Querdimensionen des Bogens noch einigermassen klein gegen seine Länge sind, wird man dabei den Bogen als *elastischen, von Hause aus krummen Stab* behandeln dürfen, und da dieser auch in andern Gebieten der Mechanik verwandt wird, ergeben sich für den Inhalt dieser Nummer mancherlei Beziehungen zu folgenden Artikeln: IV 25, Nr. **19** (*Tedone-Timpe*), IV 27, Nr. **4** a u. b (*v. Kármán*), IV 29a, Nr. **27** (*Grüning*) nebst den dort gegebenen Litteraturnachweisen.

verstanden wird, welche hier Drucklinie genannt wird. Übrigens ist nicht nur der Gebrauch der Wörter in der Litteratur sehr schwankend, sondern es sind auch die beiden Arten von Kurven häufig für allgemein identisch gehalten worden.

33) Vgl. *A. Föppl*, Vorl. üb. techn. Mechanik. Leipzig 1900, Bd. 2, p. 399.

Die folgende Darstellung ist so gewählt, dass sie eine neuerdings von *F. Engesser*[34]) gegebene, zuweilen wichtige Erweiterung der älteren Ansätze umfasst. Während nämlich gewöhnlich eine Belastung angenommen wird, welche symmetrisch angeordnet ist zu der die undeformiete Gewölbeaxe enthaltenden Ebene (wobei dann die Axe in der Ebene bleibt und die ganze Deformation symmetrisch zu ihr ausfällt), hat *Engesser* diese Annahme fallen lassen und dadurch eine rationellere Berücksichtigung exzentrischer Belastungen ermöglicht, wie sie z. B. vorliegen, wenn ein Gewölbe zwei parallele Gleise trägt und von diesen nur eines belastet ist.

Seien Gewölbeaxe und Querschnitt geeignet[35]) definiert (Nr. 8) und werde angenommen, dass im undeformierten Zustande die Gewölbeaxe eine ebene Kurve[35a]) sei, und, der Einfachheit wegen, dass die Querschnitte auf ihr senkrecht stehen.

Ein raumfestes, rechtwinkliges XYZ-Koordinatensystem (s. Fig. 11, die Y-Axe nach hinten) und ein körperfestes $\Xi \mathrm{H} \mathrm{Z}$-System (ebenfalls rechtwinklig, Ursprung der Schwerpunkt eines Querschnittes, Ξ-Axe in der XZ-Ebene gelegen, H-Achse senkrecht dazu nach hinten, wobei angenommen ist, dass beide die Hauptträgheitsaxen des undeformierten Querschnittes sind, Z-Axe Tangente an die undeformierte Gewölbeaxe) definieren die Koordinaten x, $y=0$, z eines Punktes der undeformierten Gewölbeaxe und die Winkel:

Fig. 11.

$$\vartheta = \sphericalangle \mathrm{Z}Z, \quad \psi = \sphericalangle [\mathrm{Z}Z,\ XZ] = 0, \quad \varphi = \sphericalangle [\Xi \mathrm{Z},\ \mathrm{Z}Z] = 0.$$

Nimmt man nun willkürlich an, dass die Querschnitte bei einer Deformation Ebenen bleiben und in sich keine Verzerrung erfahren, so

34) *F. Engesser,* Das elastische Tonnengewölbe als räumliches System betrachtet. Zeitschr. f. Bauwesen 1909, p. 107.

35) Es ist eigentlich nur mit Beziehung auf das Folgende möglich, einigermassen klar zu sagen, welches hier die „geeigneten" Querschnitte sind; jedenfalls muss die nachher eingeführte Annahme, sie blieben bei der Deformation Ebenen, einigermassen plausibel sein, und ferner wird man dafür sorgen, dass auch die Kämpferflächen Querschnitte sind.

35a) Für den Fall, dass schon die undeformierte Gewölbeaxe eine Raumkurve ist, haben die technische Theorie entwickelt: *B. Johann,* Studie üb. die Elastizität u. Festigkeit der doppelt gekrümmten Träger. Allg. österr. Bauztg. 63 (1898), p. 27 und später: *H. Seipp,* Beiträge zur Theorie u. Berechnung doppelt gekrümmter Freiträger. Wien 1910. Die Schlussformeln sind äusserst kompliziert.

erzielt man die fundamentale Vereinfachung, dass die Deformation des Gewölbes vollständig charakterisiert wird durch die Änderungen der sechs Grössen: $x, y, z; \vartheta, \psi, \varphi$, die mit $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\vartheta, \delta\psi, \delta\varphi$ bezeichnet werden sollen, oder mit Einführung der Verrückungen u, v, w, die ein Punkt der Mittellinie in Richtung der *körperfesten* Axen erfährt, durch:

$$u, v, w;\quad \delta\vartheta,\ \delta\psi,\ \delta\varphi,$$

wobei:

$$u = \cos\vartheta\cdot\delta x + \sin\vartheta\cdot\delta z,\quad v = \delta y,\quad w = -\sin\vartheta\cdot\delta x + \cos\vartheta\cdot\delta y$$

ist. Aus der Dehnung, die ein irgendwie orientiertes Längenelement des Gewölbes bei dieser Deformation erfahren würde, berechnen sich die sechs, nach den körperfesten Axen orientierten Verzerrungskomponenten zu:

$$\text{(27)}\qquad \begin{aligned} e_{\xi\xi} &= 0 & e_{\zeta\zeta} &= \frac{1}{1-k\xi}(W + \Psi\cdot\eta - \theta\cdot\xi) \\ e_{\eta\eta} &= 0 & e_{\eta\zeta} &= \frac{1}{1-k\xi}(V + \Phi\cdot\xi) \\ e_{\xi\eta} &= 0 & e_{\zeta\xi} &= \frac{1}{1-k\xi}(U - \Phi\cdot\eta). \end{aligned}$$

Hier sind ξ, η die Koordinaten des betreffenden Punktes im Querschnitt s, $k = \frac{d\vartheta}{ds}$ ist die Krümmung der undeformierten Gewölbeaxe, und es gelten die Abkürzungen:

$$\text{(28)}\qquad \begin{aligned} U &= \frac{du}{ds} + k\cdot w - \delta\vartheta & \Psi &= k(\delta\varphi + \cos\vartheta\cdot\delta\psi) - \frac{d(\sin\vartheta\cdot\delta\psi)}{ds} \\ V &= \frac{dv}{ds} - \sin\vartheta\cdot\delta\psi & \theta &= \frac{d\,\delta\vartheta}{ds} \\ W &= \frac{dw}{ds} - k\cdot u & \Phi &= k\sin\vartheta\cdot\delta\psi + \frac{d(\delta\varphi + \cos\vartheta\cdot\delta\psi)}{ds}. \end{aligned}$$

In diesen Formeln wird nun zwar meist $k\xi$ gegen 1 vernachlässigt; indessen geschieht es neuerdings bei dicken Gewölben von starker Krümmung nicht[35b]; $k\xi$ mag deshalb hier beibehalten werden.

Diesen sechs Verzerrungskomponenten würden nach der allgemeinen Elastizitätstheorie im Querschnitt die drei Spannungskomponenten entsprechen (IV 24, *Tedone*, Nr. 2 c)

$$\text{(29)}\qquad \text{Normalspannung}\quad \sigma = \frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}\cdot E\cdot e_{\zeta\zeta}$$

$$\text{Schubspannung}\quad \begin{cases} \tau_\xi = \dfrac{m}{2(m+1)}\cdot E\cdot e_{\zeta\xi} \\ \tau_\eta = \dfrac{m}{2(m+1)}\cdot E\cdot e_{\zeta\eta}. \end{cases}$$

35b) Vgl. z. B. *J. Weyrauch*, Elastische Bogenträger usw. Stuttgart 1911, p. 15 ff.

Durch Integration dieser Ausdrücke über den Querschnitt F würden sich die zugehörigen „Spannungsresultanten" und „Spannungsmomente"[36]) wie folgt, ergeben:

$$
(30)\quad
\begin{array}{lll}
\text{Schubkraft parallel} & \Xi: & N = C_2(F' \cdot U - n_1 \cdot \Phi) \\
\quad\text{„}\qquad\text{„} & \mathsf{H}: & N' = C_2'(F' \cdot V + n_1 \cdot \Phi) \\
\text{Normalkraft}\quad\text{„} & \mathsf{Z}: & T = C_1(F' \cdot W + n_2 \cdot \Psi - n_3 \cdot \theta) \\
\text{Biegungsmoment um} & \Xi: & G = C_1'(n_2 \cdot W + J_\xi' \cdot \Psi - n_3 \cdot \theta) \\
\quad\text{„}\qquad\text{„} & \mathsf{H}: & G' = C_1''(-n_1 \cdot W - n_3 \cdot \Psi + J_\eta' \cdot \theta) \\
\text{Drillungsmoment}\;\text{„} & \mathsf{Z}: & H = C_2''(-n_2 \cdot U + n_1 \cdot V \\
 & & \qquad + (J_\xi' + J_\eta') \cdot \Phi),
\end{array}
$$

wobei natürlich:

$$C_1 = C_1' = C_1'' = \frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)} \cdot E$$

und

$$C_2 = C_2' = C_2'' = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E$$

wäre und im übrigen die Abkürzungen

$$
(31)\quad
\begin{array}{ll}
F' = \int \frac{dF}{1-k\xi} & n_1 = \int \frac{\xi\, dF}{1-k\xi} \\
J_\eta' = \int \frac{\xi^2 dF}{1-k\xi} & n_2 = \int \frac{\eta\, dF}{1-k\xi} \\
J_\xi' = \int \frac{\eta^2 dF}{1-k\xi} & n_3 = \int \frac{\xi\eta\, dF}{1-k\xi}
\end{array}
$$

und die Beziehungen:

$$n_1 = k \cdot J_\eta', \quad F' = F + k^2\ J_\eta'$$

gelten.

Diese Gl. (30) haben offenbar zunächst keine weitere Bedeutung, als dass sie unter ganz speziellen Voraussetzungen über die Verteilung der Massen- und Oberflächenkräfte und Oberflächenverrückungen genau richtig sind. Obwohl nun diese Voraussetzungen bei Gewölben im allgemeinen keineswegs gegeben sind, behält die technische Theorie die Gl. (30) allgemein bei, sucht sich aber durch geeignete Wahl der sechs Konstanten $C_1\ C_1'\ C_1''$; $C_2\ C_2'\ C_2''$ durchschnittlichen Verhältnissen möglichst anzupassen. So wird

$$C_1 = C_1' = C_1'' = E$$

gesetzt. Dies würde exakt sein, wenn $\sigma_{\xi\xi}$ und $\sigma_{\eta\eta}$ überall Null wären, was freilich den Gl. (27) widersprechen würde und ohnehin in einem

36) Bezeichnung nach *A. E. H. Love,* Lehrbuch d. Elastizität, deutsch von *A. Timpe,* Leipzig und Berlin 1907, p. 445.

belasteten Gewölbebogen unmöglich ist; aber immerhin werden ja diese Spannungen im Vergleich zu den Spannungen $\sigma_{\zeta\zeta}$ im Durchschnitt nur klein sein. C_2, C_2', C_2'' werden je nach der Querschnittsform verschieden gewählt; aber eine wirkliche Begründung ist kaum möglich. Vgl. IV 29a, Nr. **33** (*Grüning*).

Zu den Gl. (30) kommen noch hinzu die *statischen* Gleichungen, welche ausdrücken, dass an jedem Scheibchen, das zwischen den Querschnitten s und $s + ds$ liegt, Gleichgewicht herrscht:

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\frac{dN}{ds} + k \cdot T + \Xi = 0 \qquad &&\frac{dG}{ds} + k \cdot H + \mathsf{M}_\xi = 0 \\ &\frac{dN'}{ds} + \mathsf{H} = 0 &&\frac{dG'}{ds} + N + \mathsf{M}_\eta = 0 \\ &\frac{dT}{ds} - k \cdot N + \mathsf{Z} = 0 &&\frac{dH}{ds} - k \cdot G + \mathsf{M}_\zeta = 0, \end{aligned}$$

wo die Ξ, H, Z und M_ξ, M_η, M_ζ die auf die Längeneinheit der Gewölbeaxen bezogenen Einzelkräfte und Kräftepaare bedeuten, welche nach Massgabe der Belastung auf das Scheibchen wirken.

Diese sechs Gleichungen enthalten ebenso viele unbekannte Funktionen. Wären also an einem der beiden Kämpfer ihre Werte bekannt, so wären sie nach Integration von (32) überall bekannt. In der technischen Litteratur ist an Stelle der Gl. (32) meist gleich das Ergebnis ihrer Integration angegeben, weil man dies auch dadurch gewinnen kann, dass man die Gleichgewichtsbetrachtung nicht an einem Scheibchen des Gewölbes anstellt, sondern an dem vom einen, etwa linken Ende bis zu einem beliebigen Querschnitte s reichenden Teil. Man findet so, wenn der Index 0 den Wert bezeichnet, den eine Grösse am linken Kämpfer annimmt:

$$(33)\qquad \begin{aligned} N &= N_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) - T_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) + (\Xi) \\ N' &= N_0' + (\mathsf{H}) \\ T &= N_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) + T_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + (\mathsf{Z}) \\ G &= G_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) - H_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) \\ &\qquad + N_0[(x - x_0)\sin\vartheta + (z - z_0)\cos\vartheta] + (\mathsf{M}_\xi) \\ G' &= G_0' - N_0[(x - x_0)\sin\vartheta_0 + (z - z_0)\cos\vartheta_0] \\ &\qquad + T_0[(x - x_0)\cos\vartheta_0 - (z - z_0)\sin\vartheta_0] + (\mathsf{M}_\eta) \\ H &= G_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0) + H_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) \\ &\qquad - N_0'[(x - x_0)\cos\vartheta - (z - z_0)\sin\vartheta] + (\mathsf{M}_\zeta). \end{aligned}$$

Hier sind (Ξ), (H), (Z); (M_ξ), (M_η), (M_ζ) die (im Schwerpunkt des Querschnittes s anzubringenden) Einzelkräfte und die Kräftepaare, die man an den von 0 bis s reichenden Teil des Gewölbes wirken

lassen muss, um ihn mit der Belastung allein (ohne die $T_0 N_0 N_0' G_0 G_0' H_0$) ins Gleichgewicht zu setzen.

Es kommt nun darauf an, aus den Gl. (33), (30) und (28) die sechs Randwerte $T_0 N_0 N_0' G_0 G_0' H_0$ durch die gegebene Belastung und die Kämpferwerte von $u, v, w; \delta\vartheta, \delta\psi, \delta\varphi$ auszudrücken. Dies geschieht durch eine geschickte Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

Kombiniert man irgendein den Gl. (28) genügendes System von Grössen, etwa $U_1 \ldots \delta\varphi_1$ mit irgendeinem den statischen Gl. (32) genügenden System von Grössen $N \ldots H$ (wobei aber zwischen beiden Systemen gar keine Zusammenhänge, insbesondere also auch die Gl. (30) nicht zu bestehen brauchen), zu dem über das ganze Gewölbe erstreckten Integral:

$$(34)\quad A_i = \int_{\text{links}}^{\text{rechts}} (N U_1 + N' V_1 + T W_1 + G \Psi_1 + G' \theta_1 + H \Phi_1)\, ds$$

und wendet hierauf die Regel der partiellen Integration an, so kommt:

$$(35)\quad A_i = \Big| N u_1 + N' v_1 + T w_1 - G \sin\vartheta_1 \cdot \delta\psi_1 + G' \delta\vartheta_1 + H(\delta\varphi_1 + \sin\vartheta \cdot \delta\psi_1) \Big|_{\text{links}}^{\text{rechts}}$$
$$+ \int_{\text{links}}^{\text{rechts}} [\Xi \cdot u_1 + \mathsf{H} \cdot v_1 + \mathsf{Z} w_1 - \mathsf{M}_\xi \sin\vartheta_1\, \delta\psi_1 + \mathsf{M}_\eta \delta\vartheta_1 + \mathsf{M}_\zeta(\delta\varphi_1 + \cos\vartheta \cdot \delta\psi_1)]\, ds$$

eine Gleichung, die sich als Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen auffassen lässt, insofern als A_i als „virtuelle Arbeit der inneren Kräfte", die beiden Ausdrücke rechts bzw. als virtuelle Arbeit der Kämpferkräfte und der Belastung bezeichnet werden können. Durch Anwendung der Gl. (35) auf dieselbe Belastung, dasselbe System $U_1 \ldots \delta\varphi_1$, aber ein irgendwie gemäss den statischen Gleichungen variiertes System: $N + \delta N_1 \ldots H + \delta H$, ergiebt sich:

$$\int_{\text{links}}^{\text{rechts}} (U_1 \cdot \delta N + V_1 \cdot \delta N' + W_1 \cdot \delta T + \Psi_1 \cdot \delta G + \theta_1 \cdot \delta G' + \Phi_1 \cdot \delta H)\, ds$$
$$(36)\quad = \Big| u_1 \cdot \delta N + v_1 \cdot \delta N' + w_1 \cdot \delta T - \sin\vartheta_1 \cdot \delta\psi_1 \cdot \delta G + \delta\vartheta_1 \cdot \delta G' + (\delta\varphi_1 + \sin\vartheta \cdot \delta\psi_1) \cdot \delta H \Big|_{\text{links}}^{\text{rechts}} \cdot$$

Hier können die Variationen gemäss den Gl. (33) alle durch die sechs voneinander unabhängigen Variationen:

$$\delta N_0 \;\; \delta N_0' \;\; \delta T_0 \;\; \delta G_0 \;\; \delta G_0' \;\; \delta H_0$$

ausgedrückt werden. Somit gewinnt man, wenn man noch durch Umkehrung der Gl. (30) das zu dem System $U_1 \ldots \delta\varphi_1$ *wirklich zugehörige* System $N_1 \ldots H_1$ einführt und dieses vermöge der Gl. (33) durch die Belastung und die linken Randwerte von $N_1 \ldots H_1$, etwa $N_{10} \ldots H_{10}$ ausdrückt, aus der Gl. (36) sechs voneinander unabhängige lineare Gleichungen, in welchem die sechs Grössen $N_{10}\; N_{10}' \ldots H_{10}$ in Beziehung zu den zwölf Randwerten von $u v w \delta\psi \delta\vartheta \delta\varphi$ gesetzt sind und aus welchem also diese sechs Grössen berechnet werden können, wenn die zwölf Randverrückungen bekannt sind.

Natürlich steht diese Überlegung auch in engem Zusammenhang mit den bekannten Sätzen von *F. Menabrea* und *A. Castigliano* (IV 29 a, Nr. 9, *Grüning*). Die Bauart der Gl. (30) lässt erkennen, dass, wenn $C_1 = C_1' = C_1''$ und $C_2 = C_2' = C_2''$ gesetzt wird, die sechs Grössen $U \ldots \Phi$ die Differentialquotienten des homogenen quadratischen Ausdruckes

$$\tfrac{1}{2}(U \cdot N + V \cdot N' + W \cdot T + \Psi \cdot G + \theta \cdot G' + \Phi \cdot H)$$

sind, wenn man darin die $U \ldots \Phi$ als eben durch (30) gegebene Funktionen der $N \ldots H$ auffasst. Die Umkehrung der Gl. (30) hat nun das Ergebnis:

$$(37)\qquad \begin{aligned} C_1 \cdot W &= a_{11} \cdot T + a_{12} \cdot G + a_{13} \cdot G' \\ C_1 \cdot \Psi &= a_{12} \cdot T + a_{22} \cdot G + a_{23} \cdot G' \\ C_1 \cdot \theta &= a_{13} \cdot T + a_{23} \cdot G + a_{33} \cdot G' \\ C_2 \cdot U &= b_{11} \cdot N + b_{12} \cdot N' + b_{13} \cdot H \\ C_2 \cdot V &= b_{12} \cdot N + b_{22} \cdot N' + b_{23} \cdot H \\ C_2 \cdot \Phi &= b_{13} \cdot N + b_{23} \cdot N' + b_{33} \cdot H, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} \Delta \cdot a_{11} &= J_\xi' J_\eta' - n_3^2 & \Delta' \cdot b_{11} &= (J_\xi' + J_\eta') F' - n_1^2 \\ \Delta \cdot a_{12} &= -(J_\eta' n_2 - n_1 n_3) & \Delta' \cdot b_{12} &= -n_1 n_2 \\ \Delta \cdot a_{13} &= J_\xi' n_1 - n_2 n_3 & \Delta' \cdot b_{13} &= F' n_2 \\ \Delta \cdot a_{22} &= J_\eta' F' - n_1^2 & \Delta' \cdot b_{22} &= (J_\xi' + J_\eta') F' - n_2^2 \\ \Delta \cdot a_{23} &= F' n_3 - n_1 n_2 & \Delta' \cdot b_{23} &= -F' n_1 \\ \Delta \cdot a_{33} &= F' J_\xi' - n_2^2 & \Delta' \cdot b_{33} &= F'^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta &= F' J_\xi' J_\eta' - F' n_3^2 + 2 n_1 n_2 n_3 - n_1^2 J_\xi' - n_2^2 J_\eta' \\ \Delta' &= F'[F'(J_\xi' + J_\eta') - n_1^2 - n_2^2], \end{aligned}$$

so dass also die Gleichungen bestehen:

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial N}, \quad V = \frac{\partial \omega}{\partial N'}, \quad W = \frac{\partial \omega}{\partial T}, \quad \Psi = \frac{\partial \omega}{\partial G}, \quad \theta = \frac{\partial \omega}{\partial G'}, \quad \Phi = \frac{\partial \omega}{\partial H},$$

wenn

$$(38) \quad \omega = \frac{1}{2C_1}[a_{11}T^2 + a_{22}G^2 + a_{33}G'^2 + 2a_{12}GT + 2a_{23}GG' + 2a_{13}G'T]$$
$$+ \frac{1}{2C_2}[b_{11}N^2 + b_{22}N'^2 + b_{33}H^2 + 2b_{12}NN' + 2b_{23}N'H + 2b_{13}NH]$$

gesetzt wird.

Somit ist die linke Seite (36), wenn man darin die Systeme $U_1 \ldots \Phi_1$, $N \ldots H$ als im Sinne der Gl. (30) einander zugehörig ansieht, gleich der Variation der „Formänderungsarbeit", nämlich von

$$(39) \qquad \Omega = \int_l^r \omega\, ds.$$

Diese ist, bei konstant gehaltener Belastung, nach (33) eine Funktion der sechs Grössen $N_0 \ldots H_0$; ihre sechs Differentialquotienten nach diesen Grössen sind also bzw. gleich den Faktoren von $\delta N_0 \ldots \delta H_0$ auf der rechten Seite von (36). Ist insbesondere das Gewölbe beiderseits fest eingespannt, so dass alle zwölf Randverrückungen verschwinden, so ist:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial N_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial N_0'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial T_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial G_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial G_0'} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial H_0} = 0.$$

(Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.)

Diese *Castigliano*sche Umdeutung des Prinzips der virtuellen Verrückungen wird sich aber nur dann empfehlen, wenn Ω als Funktion seiner im allgemeinen sechs Argumente bequem aufgestellt werden kann, also dann, wenn infolge besonderer Verhältnisse die Gl. (30) und (28) sich vereinfachen, sei es, dass die Gewölbeaxe eine ebene Kurve und ungedrillt bleibt, sei es, dass der Einfluss der Schubkräfte auf die Deformation vernachlässigt wird, sei es, dass man durch Vernachlässigung von $k\xi$ gegen 1 die Integrale $n_1 n_2 n_3$ zum Verschwinden bringt usw.

Nachdem die Spannungsresultanten und -momente gefunden sind, bleiben noch vor allem die Spannungen zu berechnen. Gewöhnlich interessiert man sich nur für die „Biegungsspannungen" σ. Ist

$$C_1 = C_1' = C_1''$$

und macht man die nicht gerade sehr spezielle Voraussetzung, dass die Ξ-Axe nicht nur eine Hauptträgheitsaxe, sondern auch eine Sym-

metrieaxe des Querschnittes ist $[n_2 = 0,\ n_3 = 0]$, so findet man:

$$\sigma = \frac{T}{F} + \left(\frac{k}{F} - \frac{\xi}{1-k\xi} \cdot \frac{1}{J'_\eta}\right) \cdot G' + \frac{\eta}{1-k\xi} \cdot \frac{G}{J'_\eta},$$

ein Ausdruck, der sich natürlich in speziellen Fällen noch vereinfacht.

Auch die Verrückungen uvw und die Winkeländerungen $\delta\psi\delta\vartheta$ $\delta\varphi$ können, nachdem die Spannungsresultanten und -momente bestimmt sind, für jeden Querschnitt gefunden werden. Man muss nur in (36) die Integration vom einen Ende bis zu dem betreffenden Querschnitt hin erstrecken.

Die bisherigen Entwicklungen setzen voraus, dass im Gewölbe eine solche Temperatur herrscht, dass bei fehlender Belastung sämtliche Spannungen verschwinden. Der Einfluss einer etwa vorhandenen Temperaturerhöhung $t(s)$ eines Querschnittes über diese Normaltemperatur wird dadurch berücksichtigt, dass man die dritte Gl. (30) durch folgende ersetzt:

$$T = C_1 [F' \cdot W + n_2 \Psi - n_1 \theta] - C_1 F\alpha \cdot t,$$

wo α der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient des Materials ist. Die Gl. (36) ändert sich nicht; wohl aber muss man, wenn man die Sätze von *Menabrea* und *Castigliano* anwenden will, die frühere Funktion ω durch

$$\omega' = \omega + \alpha F \cdot t [a_{11} T + a_{12} G + a_{13} G'] + W(t)$$

ersetzen, wo W noch eine willkürliche Funktion der Temperatur ist. An die Stelle der früher so genannten Formänderungsarbeit Ω tritt also jetzt die Funktion:

$$\Omega'(N_0 \ldots H_0) = \Omega(N_0 \ldots H_0) + \alpha \cdot \int_l^r Ft[a_{11} T + a_{12} G + a_{13} G'] ds$$
$$+ \int_l^r W(t)\, ds,$$

welche in den hier allein wesentlichen Gliedern, als „innere Energie" im Sinne der Thermodynamik aufgefasst werden kann.

W. Schachenmeier[36a]) entwickelt die technische Theorie für *mehrfache* Gewölbe (Viadukte). Naturgemäss sind die Schlussformeln sehr kompliziert.

Eine unübersehbare technische Einzellitteratur beschäftigt sich mit der praktischen Frage, wie man im einzelnen Fall den Rechnungs-

---

36a) *W. Schachenmeier,* Über mehrfache elastische Gewölbe. Fortschritte d. Ingenieurwissenschaften 2. Gruppe, 23. Heft, Leipzig 1910.

gang nach Möglichkeit vereinfachen könne. Zur Auswertung der vorkommenden Integrale bedient man sich gern graphischer Methoden. *H. Ritter*[37]) hat ein bemerkenswertes Verfahren angegeben, nach welchem in einfachen Fällen die ganze Untersuchung graphisch erledigt werden kann; es beruht auf einer Anwendung der von *W. Ritter* definierten „Elastizitätsellipse" (IV 29a, *Grüning*, Nr. **32**).

10. Das Tonnengewölbe als krummer Stab; der sog. Winklersche Satz. Die Anwendung der Elastizitätstheorie ist selbst in der summarischen Art der technischen Gewölbetheorie (Nr. **9**) beschwerlich; es wurde schon gesagt, wie man sie häufig umgeht (Nr. **8**). Dem dort geschilderten einfachen Verfahren liegt zunächst offenbar nichts weiter zugrunde als der naive Vergleich des Gewölbebogens mit einer Kette, etwa so: Wenn die Gewölbeaxe eine Kettenlinie der Belastung ist, so könnte eine vollkommen biegsame Kette von der Form der Gewölbeaxe bei ebenderselben Belastung im Gleichgewicht sein, folglich wird in diesem Falle die Biegungsfestigkeit des Gewölbes gar nicht in Anspruch genommen. Es leuchtet ein, dass diese Überlegung der Präzisierung bedarf, vor allem, weil man nicht ohne weiteres wissen kann, welchen Einfluss die Art der Stützung des Gewölbes haben mag.

Beschränkt man sich auf das ebene Problem, so hat man bei gegebener Belastung und Auflagerung an Unbekannten die Spannungsresultanten T und N (Nr. **9**), das Biegungsmoment G', die Verrückungen u, w und die Winkeländerung $\delta\vartheta$. Die statischen Gleichungen (32) lauten:

$$(40) \qquad \frac{dN}{ds} + k \cdot T + \Xi = 0, \; \frac{dT}{ds} - k \cdot N + \mathsf{Z} = 0, \; \frac{dG'}{ds} + N = 0$$

(wenn angenommen wird, dass die Belastung auf die einzelnen Scheibchen ds nur die Wirkung von Einzelkräften, aber nicht von Kräftepaaren hat.) Die ersten beiden dieser Gleichungen lassen erkennen, dass, wenn die Belastung der „Kettenlinienbedingung":

$$(41) \qquad \mathsf{Z} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\Xi}{k}\right)$$

genügt, die Schubkraft N und damit nach der dritten Gl. (40) auch $\frac{dG'}{ds}$ im ganzen Gewölbe verschwinden kann, dass also dann insbesondere im ganzen Gewölbe gelten kann:

$$(42) \qquad N = 0, \; G' = 0.$$

---

37) *H. Ritter*, Zur Berechnung von eingespannten Gewölben, Schweiz. Bauzeitung 57 (1911), p. 161.

Ob aber diese Lösung wirklich gilt oder nicht, hängt wesentlich von der Art der Auflagerung ab. Denn, wenn eine der Kettenlinienbedingung (41) genügende Belastung Ξ, Z vorliegt, so sind, damit die Gl. (42) bestehen, die drei Funktionen u, w, $\delta\vartheta$ nach (28) aus den Gleichungen:

$$\frac{dw}{ds} - ku = -\frac{\Xi}{kC_1F}, \quad \frac{du}{ds} + kw - \delta\vartheta = 0, \quad \frac{d\delta\vartheta}{ds} = 0$$

zu bestimmen (n_1, Gl. (31), ist dabei vernachlässigt). Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen enthält drei willkürliche Konstante, so dass zwischen den sechs Grössen $u_0 w_0 \delta\vartheta_0$, $u_1 w_1 \delta\vartheta_1$, welche die Art der Auflagerung an den beiden Kämpfern charakterisieren, drei Beziehungen bestehen müssen. Nur wenn diese erfüllt sind, garantiert also das Erfülltsein der Kettenlinienbedingung das Bestehen des Spannungszustandes (42). Wie gross im anderen Falle die Biegungsmomente sind, ist schwer allgemein abzuschätzen; höchstens kann man aus den Gl. (28) und (30) noch ablesen, dass sie um so kleiner sein werden, je dünner der Bogen ist.

Dass die so häufig angenommene beiderseits feste Einspannung:

$$u_0 = w_0 = \delta\vartheta_0 = u_1 = w_1 = \delta\vartheta_1 = 0$$

im allgemeinen die obigen drei Beziehungen *nicht* erfüllt, zeigt das einfache Beispiel des gleichförmig normal mit $\Xi = \text{const.}$, $Z = 0$ belasteten Kreisbogens vom Halbmesser $r = \frac{1}{k}$, der von $\vartheta = -\alpha$ bis $\vartheta = +\alpha$ reichen möge. Die einzige zu $\vartheta = 0$ symmetrische Auflagerung, die hier ein Nullwerden des Biegungsmomentes bedingt, ist:

$$u_0 = u_1 = \frac{r^2\Xi}{C_1F}, \quad w_0 = w_1 = \delta\vartheta_0 = \delta\vartheta_1 = 0,$$

also gerade nicht die feste Einspannung.

Solche Betrachtungen orientieren über die Berechtigung des in Frage stehenden Verfahrens besser als der sog. „*Winkler*sche Satz", wonach, wenn die Gewölbeaxe eine statisch mögliche Stützlinie ist, die wirkliche Stützlinie „*ungefähr*" damit zusammenfällt. *E. Winkler*[38]) braucht bei seiner Ableitung[39]) so viele Vernachlässigungen, dass jedes Urteil darüber fehlt, wie grosse Abweichungen noch mit der „ungefähren" Übereinstimmung verträglich sein mögen.

Über analoge Überlegungen bei Kuppelgewölben s. Nr. **14**.

---

38) *E. Winkler,* Die Lage der Stützlinie im Gewölbe, Deutsche Bauzeitung 13 (1879), p. 117ff.

39) Präzis dargestellt bei *A. Föppl,* Vorlesungen über techn. Mechanik, Leipzig 1900, Bd. 2, p. 409.

11. Tonnengewölbe mit geschlossener Mittellinie (Tunnelgewölbe). Auf solche Gewölbe ist natürlich die technische Theorie (Nr. **9**) oder der Winklersche Satz (Nr. **10**) ebenfalls anwendbar. Aber die schon in Nr. 8 erwähnte Unkenntnis der Gewölbebelastung ist hier — wenigstens bei Tunnelbauten tief im Gebirge — besonders störend, weil willkürliche Annahmen nach Art der in Nr. 8, Abs. 5 geschilderten, Gewölbestärken ergeben, welche sehr viel grösser sind als diejenigen, die sich bei wirklichen Tunnelbauten als ausreichend erwiesen haben. Man hat daher verschiedene andere Annahmen über die Belastung eingeführt; da diese ebenfalls mehr oder weniger willkürlich sind, mag ein allgemeiner Hinweis auf die im Litteraturverzeichnis genannten Werke genügen[39a]).

Man wird zunächst auch daran denken, das System: Gebirge plus Tunnel als einheitlichen, elastischen Körper aufzufassen, der nur durch sein eigenes Gewicht belastet ist. Indessen geht aus einem gewissen, von *G. Kirsch*[40]) gegebenen Spannungszustande einer unendlichen elastischen und kreisförmig durchlochten Ebene hervor, dass in einem solchen System am Scheitel und an der Sohle des Tunnels starke *Zug*spannungen auftreten müssten, denen das Material kaum gewachsen sein dürfte, so daß also schon aus diesem Grunde die ganze Auffassung nicht zulässig erscheint.

12. Schiefe Tonnengewölbe. Das den schiefen Gewölben eigentümliche Problem des „Steinschnitts" ist vorwiegend geometrisch (vgl. III AB 6, *Papperitz*, Nr. **20**). Es handelt sich darum, die Steine so zu schneiden, dass einerseits die gewünschten Begrenzungsflächen des Gewölbes herauskommen, anderseits in den Fugenflächen keine solchen Schubkräfte wirken, die während des Baues, wo der noch nasse Mörtel ein gegenseitiges Gleiten der Steine begünstigt, den Zusammenhang des Bauwerkes gefährden könnten. Das fertige schiefe Gewölbe kann ebenso wie das gewöhnliche als einheitlicher fester Körper betrachtet werden, so dass wesentliche Unterschiede in der theoretischen Behandlung beider nicht bestehen.

13. Das Tonnengewölbe als zylindrische Schale. Auf ein Tonnengewölbe im engsten Wortsinn, dessen Querschnitt also in der

---

39a) *O. Kommerell* giebt insbesondere eine Zusammenstellung der bisher vorgebrachten Ansichten über Art und Wirkung des Gebirgsdruckes. Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk, Berlin 1912. p. 42ff.

40) *G. Kirsch,* Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 42 (1898), p. 797. Es handelt sich bei *Kirsch* nicht um Belastung durch Eigengewicht, aber die Betrachtung ist leicht entsprechend zu modifizieren, wobei die Spannungen in der Nähe des Loches merklich ungeändert bleiben.

Richtung der H-Axe Abmessungen hat, die mit der Länge des Gewölbes vergleichbar sind, lässt sich natürlich die technische Theorie (Nr. **9**) nur dann mit einigem Recht anwenden, wenn in allen zur Ebene der Gewölbeaxe parallelen Ebenen wenigstens annähernd dasselbe Kräftespiel herrscht. Sonst hat man die allgemeine Näherungstheorie dünner Schalen (IV 25, *Tedone-Timpe*, Nr. **20**) auf den Fall der zylindrischen Schale zu spezialisieren, um die nötigen Unterlagen für eine theoretische Behandlung derartiger Gewölbe zu gewinnen. An die Stelle der früheren Mittellinie tritt eine zylindrische Mittelfläche, an die Stelle der ebenen und im allgemeinen zur Mittellinie senkrechten Querschnitte die zur Mittelfläche senkrechten geraden Linien, an die Stelle der über jene Querschnitte genommenen Spannungsresultanten und -momente treten ähnliche über diese geraden Linien genommenen Grössen. Nennen wir auch diese wieder „Spannungsresultanten und -momente“, so ist nur zu beachten, dass sie im Gegensatz zu der früheren, welche Kräfte waren, die Dimension Kraft: Länge haben. An Stelle der früheren, auf die Längeneinheit der Mittellinie bezogenen Kraft- und Kräftepaarkomponenten der Belastung treten jetzt von der Belastung herrührende Kraftkomponenten Ξ, H, Z, bezogen auf die Einheit der Mittelfläche.

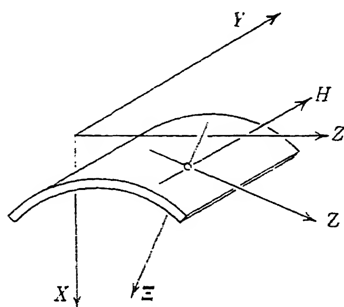


Fig. 12.

Wir haben dann folgende statischen Grössen (Fig. 12):

Normalspannungsresultanten: T_1 parallel zur Z-Axe wirkend,

" T_2 " " H " " ,

Schubspannungsresultanten: S senkrecht zur Ξ-Axe und in den Flächenelementen bzw. senkrecht zur Z- und H-Axe wirkend,

N_1 parallel zur Ξ-Axe und am Flächenelement senkrecht zur Z-Axe wirkend,

N_2 parallel zur Ξ-Axe und am Flächenelement senkrecht zur H-Axe wirkend,

Biegungsmomente: G_1 in einer Ebene senkrecht zur H-Axe und am Flächenelement senkrecht zur Z-Axe wirkend,

G_2 in einer Ebene senkrecht zur Z-Axe und am Flächenelement senkrecht zur H-Axe wirkend,

Drillungsmoment: H in den Flächenelementen bzw. senkrecht zur H- und Z-Axe wirkend.

Diese acht Grössen genügen den den Gl. (32) in Nr. 9 entsprechenden fünf statischen Gleichungen (die sechste, welche das Gleichgewicht der Momente um die Ξ-Axe ausdrückt, liefert nichts):

$$(43)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial N_1}{\partial s} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + k \cdot T_1 + \Xi = 0, && \frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial y} + N_1 = 0, \\ &\frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \mathrm{H} = 0, && -\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + N_2 = 0, \\ &\frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial y} - k \cdot N_1 + \mathrm{Z} = 0, \end{aligned}$$

wo k die nicht-verschwindende Hauptkrümmung der zylindrischen Mittelfläche bedeutet.

Die Gleichungen, welche diese statischen Grössen mit den Deformationen verbinden, werden ähnlich gewonnen wie die analogen Gl. (30). Man geht von der Idee aus, dass die ursprünglich zur Mittelfläche senkrecht stehenden Geraden bei der Deformation Gerade bleiben, die in sich keine Verzerrung erfahren, und bestimmt in den damit erhaltenen Beziehungen die den früheren Konstanten $C_1 \ldots$ analogen Faktoren auf plausible Weise. Wenn man hierbei noch den Einfluss der Schubkräfte N_1 und N_2 auf die Deformation in der Weise vernachlässigt, dass man annimmt, dass jene geraden Linien auch noch nach der Deformation auf der (verzerrten) Mittelfläche senkrecht stehen, so erzielt man die grosse Vereinfachung, dass die obigen statischen Grössen sich allein durch die drei Verrückungkomponenten u, v, w der Mittelfläche und deren Differentialquotienten ausdrücken lassen. Man findet:[41])

$$(44)\qquad \begin{aligned} &T_1 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \delta \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{m}\varepsilon_2\right) && G_1 = D \cdot \left(k_1 + \frac{1}{m} k_2\right) \\ &T_2 = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \delta \cdot \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{m}\varepsilon_1\right) && G_2 = D \cdot \left(k_2 + \frac{1}{m} k_1\right) \\ &S = \frac{m E}{2(m+1)} \cdot \delta \cdot \omega && H = \frac{m-1}{m} \cdot D \cdot \tau, \end{aligned}$$

wo

$$D = \frac{1}{12} \cdot \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \delta^3,$$

δ die Dicke der Schale ist. Die übrigen Grössen bestimmen die Verzerrung der Mittelfläche. ε_1 und ε_2 sind ihre Dehnungen bezüglich der Z- und H-Axe; ω ist die Änderung, die der ursprünglich

41) *A. E. H. Love,* Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe,* Leipzig und Berlin 1907, p. 604 f.

rechte Winkel zwischen den Hauptkrümmungslinien der Mittelfläche ($s =$ const. und $y =$ const.) erfährt, k_1, k_2, τ sind die Krümmungsänderungen bezüglich der H, Z, Ξ-Axe. Diese Grössen hängen mit u, v, w so zusammen[42]):

$$(45)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial w}{\partial s} - k\cdot u & k_1 &= \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + k\cdot\frac{\partial w}{\partial s} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} & k_2 &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \omega &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} & \tau &= \frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial y}. \end{aligned}$$

Nach Elimination der Zwischenglieder $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega k_1 k_2 \tau$ hat man also $5 + 6 = 11$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten $(8 + 3)$.

Relativ am leichtesten sind solche Lösungen dieser Gleichungen zu gewinnen, welche dehnungslosen Deformationen entsprechen. Sie haben für die Gewölbetheorie nur geringes Interesse.

14. Doppelt gekrümmte Gewölbe (Kuppeln). Kuppeln werden einer exakten Behandlung dadurch zugänglich, dass man sie als dünne Schalen auffasst und auf sie die in Nr. **13** erwähnte Näherungstheorie anwendet. Einen ersten Schritt in dieser Richtung macht *W. Schwedler*[43]). Er betrachtet Rotationskuppeln, hauptsächlich Kugelkuppeln, bei rotationssymmetrischer Belastung, beschränkt sich aber auf die *statischen* Gleichungen, in denen er überdies, ohne nähere Begründung, von vornherein jene beiden Biegungsmomente und jene Schubkraft, die bei rotationssymmetrischer Belastung an sich noch möglich sind, Null setzt, womit dann die Anzahl der Unbekannten auf die der Gleichungen reduziert ist (s. unten). Dies Verfahren ist insofern das räumliche Analogon zu dem früher (Nr. **10**) besprochenen naiven Vergleich eines krummen Stabes mit einer Kette, als auch dabei nur auf das Erfülltsein der *statischen* Gleichungen geachtet wurde, und bedarf daher ebenso der Präzisierung. Die weitere Betrachtung knüpft deshalb besser an *H. Reissner*[44]) an. Mit ihm beschränken wir uns auf die Kugelkuppel.

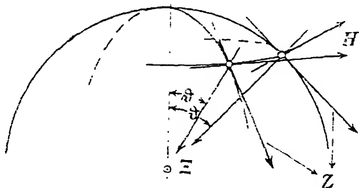


Fig. 13.

42) *A. E. H. Love,* Lehrbuch der Elastizität, § 326.

43) *W. Schwedler,* Die Konstruktion der Kuppeldächer. Zeitschr. f. Bauwesen 1866, p. 7.

44) *H. Reissner,* Spannungen in Kugelschalen (Kuppeln); vgl. *H. Müller-Breslau*-Festschrift, Leipzig 1912, p 181. Vgl. auch: *E. Meissner,* Phys. Zeitschr. 14 (1913), p. 343.

Der Halbmesser der Mittelfläche sei a, die Dicke des Gewölbes δ. Die Breitenkreise $\vartheta = \text{const.}$ und die Meridiane $\varphi = \text{const.}$ orientieren uns auf der Mittelfläche (Fig. 13). Die Spannungsresultanten und -momente sind, den Umständen entsprechend modifiziert, so zu definieren wie in Nr. **13**. Die fünf statischen Gleichungen lauten[45]):

$$(46)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial \vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta \cdot N_1 + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial N_2}{\partial\varphi} + T_1 + T_2 + a\cdot \Xi = 0,\\
&\frac{\partial S}{\partial \vartheta} + 2\operatorname{cotg}\vartheta \cdot S + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial T_2}{\partial\varphi} - N_2 + a\cdot \mathsf{H} = 0,\\
&\frac{\partial T_1}{\partial \vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\,(T_1 - T_2) + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial S}{\partial\varphi} - N_1 + a\cdot \mathsf{Z} = 0,\\
&\frac{\partial G_1}{\partial \vartheta} + \operatorname{cotg}\vartheta\,(G_1 - G_2) + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial H}{\partial\varphi} + a\cdot N_1 = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial \vartheta} + 2\operatorname{cotg}\vartheta \cdot H + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial G_2}{\partial\varphi} + a\cdot N_2 = 0.
\end{aligned}$$

Die Gl. (44) von Nr. **13** bleiben bestehen, dagegen treten an Stelle der Gl. (45) die folgenden[46]):

$$(47)\quad \begin{aligned}
&a\cdot\varepsilon_1 = \frac{\partial w}{\partial\vartheta} - u \qquad\qquad a^2\cdot k_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial w}{\partial\vartheta}\\
&a\cdot\varepsilon_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \operatorname{cotg}\vartheta\cdot w - u\\
&a^2\cdot k_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right) + \operatorname{cotg}\vartheta\left(w + \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)\\
&a\cdot\omega = \frac{\partial v}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \operatorname{cotg}\vartheta\cdot v \qquad a^2\cdot\tau = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Wie man sieht, gestatten die statischen Gl. (46) *immer* eine Lösung, bei welcher die beiden Biegungsmomente G_1, G_2, das Drillungsmoment H und die Schubkräfte N_1, N_2 verschwinden. *Reissner* zeigt, dass man diese Lösung ohne weiteres hinschreiben kann, wenn $\Xi \mathsf{H} \mathsf{Z}$ nach φ in Fouriersche Reihen entwickelt sind. Bei der weiteren Frage, ob und wann diese Lösungen wirklich eintreten, beschränkt er sich auf rotationssymmetrische Fälle:

$$v,\ S,\ N_2,\ H,\ \mathsf{H} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0.$$

Bezeichnet man die Differentiation nach ϑ durch einen Strich, so hat man statt der allgemeinen Gleichungen (46) und (47) die folgenden:

$$(48)\quad \begin{aligned}
&N_1' + \operatorname{cotg}\vartheta\cdot N_1 + T_1 + T_2 + a\cdot\Xi = 0,\\
&T_1' + \operatorname{cotg}\vartheta\cdot(T_1 - T_2) - N_1 + a\cdot \mathsf{Z} = 0,\\
&G_1' + \operatorname{cotg}\vartheta\cdot(G_1 - G_2) + a\cdot N_1 = 0,
\end{aligned}$$

45) u. 46) *A. E. H. Love,* Lehrbuch der Elastizität, deutsch von *A. Timpe,* Leipzig u. Berlin 1907, Kap. XXIV.

$$(49)\qquad \begin{aligned} a\cdot\varepsilon_1 &= w' - u & a^2 k_1 &= u'' + w' \\ a\cdot\varepsilon_2 &= \operatorname{cotg}\vartheta\cdot w - u & a^2 k_2 &= \operatorname{cotg}\vartheta\,(w + u') \end{aligned}$$

also nach Elimination der $\varepsilon_1\varepsilon_2 k_1 k_2$ zusammen sieben Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten: N_1, T_1, T_2, G_1, G_2, u, w.

Die Gl. (49) zusammen mit den Gl. (44) lassen erkennen, dass, wenn die rechten Seiten von (49) alle von derselben Grössenordnung sind, die Grössen G_1/a, G_2/a im Verhältnis $(\delta/a)^2$ kleiner sind als die Grössen T_1, T_2. Man wird also, wenn nicht zufällig die Dehnungen $\varepsilon_1\varepsilon_2$ verschwinden sollten, vielleicht eine annähernd richtige Lösung des obigen Gleichungssystems bekommen, wenn man G_1 und G_2 Null setzt Die Gl. (48) reduzieren sich dann auf zwei mit den beiden Unbekannten T_1 und T_2. Im Falle der lediglich durch ihr eigenes Gewicht (Einheitsgewicht γ) belasteten und im Scheitel ($\vartheta = 0$) geschlossenen Kuppel findet man so:

$$(50)\qquad T_1 = -\gamma a\delta\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}},\quad T_2 = -\gamma a\delta\left(\cos\vartheta - \frac{1}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\right).$$

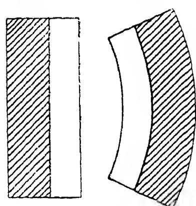
Um zu prüfen, wieweit diese Lösung zutrifft, setzt *Reissner* zunächst voraus, dass der Auflagerrand der Kuppel quer zur Randlinie frei verschieblich ist, so dass also G_1, G_2 jedenfalls am Rande verschwinden müssen. Er findet dann auf Grund eines Verfahrens sukzessiver Näherung, dass die Lösung mit sehr guter Annäherung richtig ist. Um aber weiterhin zu entscheiden, bis zu welchem Grade die eingeführten Randbedingungen hierzu notwendig sind, setzt er jetzt Ξ und Z gleich Null und nimmt nur am Rande irgendwelche rotationssymmetrisch verteilte Kräfte und Kräftepaare an. Das vorhin benutzte Näherungsverfahren erweist sich jetzt als unbrauchbar, aber mit Hilfe eines von *O. Blumenthal*[46a]) angegebenen Verfahrens asymptotischer Integration findet er, dass hierbei nur *in der Nähe des Randes* nennenswerte Spannungsresultanten und -momente auftreten.

Dies Ergebnis ist von Interesse, weil beim krummen Stabe die Verhältnisse in doppelter Beziehung anders liegen: Einmal war dort die *statische* Möglichkeit eines von Biegungsmomenten freien Spannungszustandes an eine von der Belastung zu erfüllende Bedingung geknüpft; dann aber war die Frage, wieweit dieser Zustand wirklich eintritt, viel mehr von dem Erfülltsein bestimmter Randbedingungen abhängig (schon die einfache Tatsache, dass dort der Zustand $G' = \text{const.}$, aber $\gtrless 0$, möglich ist, zeigt, dass dort ein am Rande angreifendes Kräftepaar beliebig weit ins Innere fortwirken kann).

46a) *O. Blumenthal,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62 (1914), p. 343.

Weiterhin erfährt durch die Resultate von *Reissner* eine in der Technik übliche einfache Methode der Kuppelberechnung eine gewisse Rechtfertigung. Unter der Voraussetzung rotationssymmetrischer Belastung und Auflagerung schneidet man aus der Kuppel ein zwischen zwei benachbarten Meridianschnitten gelegenes Stück heraus und bestimmt die an diesem als äussere Kräfte wirkenden Ringspannkräfte T_2 so, dass die Mittellinie zur Stützlinie (Nr. 8) wird. — Man findet übrigens dabei, dass im unteren Teil der Kuppel [bei der Kugelkuppel, wie die zweite Gl. (50) erkennen lässt, etwa für $\vartheta \geqq 52^0$] T_2 positiv wird. Sofern man nun dem Material Zugfestigkeit nicht zutraut, schliesst man daraus entweder, dass man im unteren Teil Eisenbänder um die Kuppel schlingen muss, oder aber, dass man die Dicke der Kuppel dort so wählen müsse, dass die mit der Annahme $T_2 = 0$ dort konstruierte Stützlinie im mittleren Drittel der Gewölbedicke verläuft.

15. Stützmauern, Talsperrenmauern u. dgl. Solche Mauern sind in der Hauptsache dadurch beansprucht, dass auf die eine (vertikale oder geneigte, ebene oder gekrümmte) Wand eine Verteilung von Wasser- oder Erddruck wirkt, während die andere Wand und die obere Begrenzungsfläche im allgemeinen als kräftefrei angesehen werden können. Die auf die gedrückte Wand übertragenen Kräfte können — wenigstens, wenn es sich um Wasserdrucke handelt — als von vornherein gegeben gelten; an den noch nicht erwähnten Begrenzungsflächen dagegen können die Kräfte nicht als von vornherein bekannt angesehen werden, eher noch die Verrückungen, etwa mit demselben Rechte, wie man bei Gewölben die Verrückungen an den Kämpfern als durch die Art der Auflagerung gegeben betrachten kann. Speziell würde der Annahme einer absolut festen Auflagerung auf starren Unterlagen entsprechen, dass man alle diese Oberflächenverrückungen Null setzt. Das Problem ist nun, den in der Mauer durch die Belastung und durch das Eigengewicht hervorgerufenen Spannungszustand zu ermitteln. Dies ausgesprochen räumliche Problem bietet aber naturgemäss einer Lösung erhebliche Schwierigkeiten, so dass man sich bisher im wesentlichen darauf beschränkt hat, an seiner Stelle folgende zwei ebenen Probleme zu behandeln[46b]):


Fig 14.

1. Man schneidet die Mauer durch eine horizontale Ebene (Fig. 14), ignoriert alle etwaigen Vertikalkomponenten der äusseren Kräfte, alle vertikalen Spannungen und damit auch die in dieser Ebene wirken-

46b) Vlg. aber *H. Ritter,* Berechnung von bogenförmigen Staumauern. Diss. Karlsruhe 1913.

den Schubspannungen. Was übrig bleibt, ist im wesentlichen das Problem des beiderseits eingespannten Balkens oder einfach gekrümmten Gewölbes, je nachdem die Wände Ebenen oder nach der Wasserseite hin gewölbt sind, um das Auftreten von Zugspannungen an der Luftseite zu verhindern. Wegen dieser Probleme vgl. Nr. **9** und IV 25, *Tedone-Timpe* Nr. **13**.

2. Man schneidet die Mauer durch eine senkrecht zu den Wänden verlaufende vertikale Ebene (Fig. 15) und ignoriert die Schubspannungen, die in dieser Ebene wirken, sowie die Zug- und Druckspannungen, welche senkrecht dazu wirken. Man behält dann das durch die Fig. 15 angedeutete ebene Problem übrig, wobei der Einfachheit halber an eine Belastung durch Wasserdrucke gedacht ist.

Dies ebene Spannungsproblem, dessen allgemeiner Charakter in IV 25, *Tedone-Timpe*, Nr. **11** b geschildert ist, ist bis zu einem gewissen Grade gelöst. Es ist *M. Lévy*[47]) gelungen, für einige Mauer-

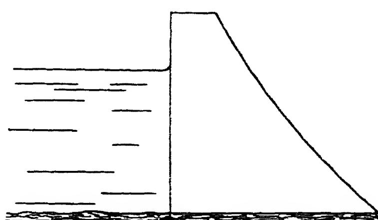


Fig. 15.

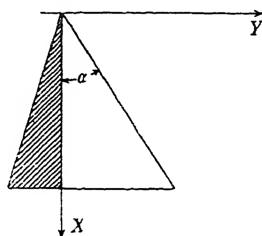


Fig. 16.

profile Spannungszustände zu finden, welche den Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie genügen und die gegebenen Oberflächenkräfte richtig wiedergeben. Es genügt, auf das einfachste seiner Resultate einzugehen.

Das Profil sei ein Dreieck (Fig. 16), die Wasserwand vertikal, die andere dagegen unter dem Winkel α geneigt. Das Wasser reiche bis an die Spitze des Dreiecks heran. γ und γ' seien die spezifischen Gewichte vom Mauermaterial und Wasser.

Die Spannungen:

$$\sigma_x = -(\gamma - \gamma' \cdot \operatorname{cotg}^2 \alpha) \cdot x + (\gamma - 2\gamma' \cdot \operatorname{cotg}^2 \alpha) \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot y$$

$$\sigma_y = -\gamma' \cdot x$$

$$\tau = -\gamma' \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot y$$

47) *M. Lévy*, Paris C. R. 126 (1898), p. 1235 und 127 (1898), p. 10. Vgl. auch *P. Fillunger*, Über die Anwendung des Trapezgesetzes zur statischen Berechnung von Talsperren. Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst 1913, Heft 45.

genügen den Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie und den Oberflächenbedingungen $\sigma_y = -\gamma' x$, $\tau = 0$, an der Wasserwand und $\cos\alpha \cdot \sigma_y - \sin\alpha \cdot \tau = 0$, $\sin\alpha \cdot \sigma_x - \cos\alpha \cdot \tau = 0$ an der Luftwand.

Hiernach wären die Spannungen σ_y überall Druckspannungen, *die Spannungen σ_x wären über jeden Schnitt $x =$ const. linear verteilt;* das Mauermaterial müsste, damit nirgends positive σ_x auftreten, der Bedingung: $\gamma > \gamma' \cdot \operatorname{cotg}^2 \alpha$ genügen. Die Verrückungen u, v mögen der Einfachheit wegen nur für den Spezialfall $\gamma = 2\gamma'$, $\alpha = 45^0$ hingeschrieben werden:

$$u = c_1 - c_2 y - \gamma' \cdot \frac{(m+1)(m-2)x^2 + (m+2)y^2}{2m^2 E}$$

$$v = c_3 + c_2 x - \gamma' \cdot \frac{(m+1)(m-2)xy}{m^2 E},$$

die willkürlichen Konstanten $c_1 c_2 c_3$ entsprechen in bekannter Weise einer Verschiebung der ganzen Mauer, wie sie bei einem starren Körper möglich wäre.

Es ist nun allerdings zweifelhaft, ob die dabei herauskommenden Verrückungen an der Fundamentfläche als die wirklich zu erwartenden angesehen werden können oder auch nur eine typische Ähnlichkeit mit ihnen haben. Nach dem *St. Venantschen Prinzip* (IV 25, *Tedone Timpe,* Nr. **13** a) wäre dies freilich für die Spannungen in einiger Entfernung vom Fundament einigermassen belanglos, aber wegen der grossen Breite der Fundamentfläche erscheint die Anwendung dieses Prinzips nicht unbedenklich. Unter diesen Umständen haben Versuche an Modellen von Staumauern erhöhtes Interesse. *L. W. Atcherley*[48]) gelangt dabei, wohl infolge noch ungeeigneter Anordnung (Benutzung lose geschichteter schmaler Streifen an Stelle eines kompakten Körpers, mangelhafte Nachahmung der wirklichen Wasserdruckverteilung) allerdings zu dem unwahrscheinlichen Ergebnis, daß in der Staumauer horizontale *positive* Zugspannungen σ_y in der Nähe der Luftwand, unten, nicht weit von der Sohle, auftreten. Aber eben dadurch wurden die sorgfältigeren Versuche von *J. W. Ottley* und *A. W. Brightmore*[49]) sowie von *J. S. Wilson* und *W. Gore*[50]) angeregt. Dabei hat

---

48) *L. W. Atcherley,* with some assistance from *K. Pearson,* On some disregarded points in the stability of masonry dams. Drapers company research memoirs. London 1904.

49) u. 50) *J. W. Ottley* a. *A. W. Brightmore,* Experimental investigations of the stresses in masonry dams subjected to water-pressure und *J. S. Wilson* and *W. Gore,* Stresses in dams: an experimental investigation by means of india-rubber models, Minutes of proceedings of the Institution of Civil Engineers 172 (1908), p. 89 u. 107.

sich gezeigt, dass die obige *Lévy*sche Lösung ziemlich gut stimmt, abgesehen von den Punkten in nächster Nähe der Sohle. Zugspannungen wurden innerhalb des Mauerprofils überhaupt nicht beobachtet, wohl allerdings in der Sohle selbst, etwa in der Fortsetzung der Wasserwand nach unten hin, was ja auch verständlich ist.

Die Resultate von *Lévy* rechtfertigen die in der Technik übliche Regel, die Spannungen σ_x einfach unter der Annahme linearer Verteilung über die Horizontalschnitte $x = \text{const.}$ zu berechnen (*règle du trapèze*).

Neuerdings hat *K. Wolf*[50a]), indem er als Spannungsfunktion χ (IV 25, *Tedone-Timpe*, Nr. **11** b) ein höheres Polynom wählt als *Lévy*, für obiges Dreieckprofil einen Spannungszustand mit plausibleren Sohlenverrückungen gefunden. (Die Randbedingung: $\sigma_y = -\gamma' \cdot x$ an der Wasserwand ist dabei nicht genau, aber mit grosser Annäherung erfüllt.) Auch hierbei herrschen in einiger Entfernung von der Sohle wieder merklich die *Lévy*schen Spannungen.

P. Fillunger[50b]) versucht, den Einfluss des eventuell in die Mauer einsickernden Wassers auf den Spannungszustand durch Einführung äquivalenter Massenkräfte zu berücksichtigen.

16. Schornsteine. In einem Schornstein rufen das Eigengewicht, der Winddruck und die bedeutenden örtlichen Temperaturunterschiede einen Spannungszustand hervor, dessen Ermittelung selbst bei Nichtbeachtung der durch den Wind hervorgerufenen Schwankungen und bei Beschränkung auf stationäre Temperaturen bisher nur unvollkommen gelungen ist.

a) *Eigengewicht und Winddruck*, soweit sie oberhalb eines beliebigen, horizontalen „Querschnittes“ des Schornsteins wirken, haben eine Resultierende, deren horizontale Komponente gleich der Summe der oberhalb wirkenden Winddrucke ist (um ihre Wirkung auf die Materialbeanspruchung kümmert man sich gewöhnlich nicht) und deren vertikale Komponente K, nämlich das Gewicht der auf dem Querschnitt ruhenden Mauermassen, infolge des Winddruckes am Querschnitt mit einer gewissen Exzentrizität e angreift. Denkt man sich die dadurch erzeugten Normalspannungen σ *linear* über den Querschnitt verteilt, so kann man diese leicht ermitteln, wenn K und e

50a) *K. Wolf*, Zur Integration d. Gl. $\Delta\Delta F = 0$ durch Polynome im Falle des Staumauerproblems. Wien. Ber. 123 IIa (1914).

50b) *P. Fillunger*, Der Auftrieb in Talsperren. Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst, 1913, Heft 31 ff.

bekannt sind. Hierbei ergiebt sich, dass, solange

$$e \leqq \frac{r_a^2 + r_i^2}{4 r_a}$$

ist, die σ sämtlich Druckspannungen sind, während andernfalls auch Zugspannungen vorkommen. (Theorie des Zentralkerns ebener Flächen; vgl. die analogen Entwicklungen in Nr. 8.) Da die Zugfestigkeit des Materials als unzuverlässig angesehen wird, aber anderseits die Schornsteine unmöglich so dick gebaut werden können, dass die obige Bedingung immer und für alle Querschnitte erfüllt ist, so berechnet man in denjenigen Querschnitten, für welche sie nicht besteht, die Spannungen so, als wenn der Querschnitt durch eine gerade Linie, „neutrale Linie", in einen unwirksamen Teil mit den Spannungen Null und einen „wirksamen" Teil zerfiele, in welchem die Druckspannung σ proportional dem Abstande ihres Angriffspunktes von jener Geraden ist. Es ergiebt sich dann die Aufgabe, aus gegebenem K und e die Lage dieser neutralen Linie und die grösste vorkommende Druckspannung, $\sigma_{\max}$, zu berechnen. *H. Keck*[51]) zeigt, dass sich der die neutrale Linie charakterisierende Winkel φ (Fig. 17) bzw. seine trigonometrischen Funktionen, nicht explizit durch K und e ausdrücken lassen, dass man aber e und $\sigma_{\max}$ explizit durch K und φ ausdrücken kann. Die Formeln sind sehr kompliziert; wenn man aber die Dicke δ des Schornsteins gegen r_i oder r_a vernachlässigen kann, ergiebt sich einfach

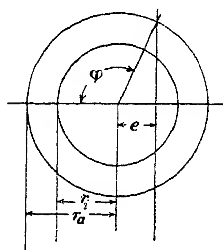


Fig. 17.

$$e = \frac{1}{2} r \cdot \frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}, \quad \sigma_{\max} = \frac{K}{2\delta r} \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}.$$

Keck hat Tabellen berechnet, aus denen man auch für den Fall, dass δ mit r_i und r_a vergleichbar ist, bei gegebenem K und e die Werte von φ und $\sigma_{\max}$ ablesen kann. *O. Mohr*[52]) hat ein graphisches Verfahren angegeben. Später ist die Betrachtung verschiedentlich auf andere Querschnittformen übertragen worden.

b) *Wärmespannungen.* Um möglichst einfache Verhältnisse zu bekommen, denkt man sich den Schornstein als unendlich langen[52a]) Hohlzylinder, an dessen Innen- und Aussenwand je die konstanten

51) *H. Keck,* Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Ver. Hannover 28 (1882), p. 627.

52) *O. Mohr,* Zeitschr. d. Arch. u. Ing.-Ver. Hannover 29 (1883), p. 163.

52a) Für ein freies Zylinder*ende* giebt *A. Föppl,* Vorlesungen über techn. Mechanik, Leipzig 1907, Bd. 5, p. 247, eine bei *dünnwandigen* Rohren geltende Näherungsrechnung.

Temperaturen s_i und s_a herrschen; der Zustand sei stationär Es wird dann die Temperatur s lediglich eine Funktion von r sein, die sich sofort zu:

$$s = s_i - (s_i - s_a)\frac{\log\frac{r}{r_i}}{\log\frac{r_a}{r_i}}$$

ergiebt (s. V 4, *Hobson* und *Diesselhorst*, Nr. 9). Dieser logarithmische Temperaturabfall kann im allgemeinen mit genügender Annäherung durch den linearen:

$$s = s_m + (s_i - s_a)\frac{r_m - r}{r_a - r_i}$$

ersetzt werden, wo s_m die Temperatur für den „mittleren" Halbmesser

$$r_m = \tfrac{1}{2}(r_a + r_i)$$

bedeutet.

Die sich hiermit ergebenden Wärmespannungen des unendlich langen Hohlzylinders wurden von *A. V. Leon*[53]) und, mit Beibehaltung der logarithmischen Formel, von *M. T. Huber*[53a]) berechnet. Da dabei nur für die zylindrischen Wände $r = r_i$ und $r = r_a$ Randbedingungen bestehen ($\sigma_r = 0$), so ist die vertikale Zugspannung σ_z, die „axiale" Spannung, welche die Praxis gerade am meisten interessiert, nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmbar. *Leon* hat sie, um den bei Schornsteinen von endlicher Länge eintretenden Bedingungen, soweit eben möglich, gerecht zu werden, einmal so bestimmt, dass $\sigma_z = 0$ für $r = r_m$, ein zweites Mal entsprechend der Gleichung $\int_{r_i}^{r_a} \sigma_z\, dr = 0$. An einem Zahlenbeispiel[54]) vergleicht er die jedesmaligen Ergebnisse und findet die Unterschiede gering. Die Spannungen fallen etwas grösser aus als nach einer früher von *G. Lang*[55]) angegebenen Näherungsformel:

$$\sigma_z = \frac{r_m - r}{r_a - r_i}\cdot E\cdot\alpha\cdot(s_i - s_a),$$

wo α der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient ist.

Zu bemerken ist, dass die in Betracht kommenden physikalischen Konstanten für Mauerwerk noch wenig bekannt sind.

53) *A. V. Leon*, Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), p. 174.

53a) *M. T. Huber*, Czasopismo technizne. Lemberg, 1906, Nr. 2. Vgl. auch: *R. Lorenz*, Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 51, 1 (1907), p. 743 u. *A. Leon*, ebenda 51, 2 (1907), p. 1315.

54) *A. V. Leon*, Über die Wärmespannungen in runden Schornsteinen, Wien u. Leipzig 1906, p. 69.

55) *G. Lang*, Der Schornsteinbau, Hannover 1896.

III. Statik der Balken und Gewölbe aus Eisenbeton.

17. Vorbemerkung. Die Theorie wird sich, wenigstens vorläufig, auf die in der technischen Litteratur zuweilen so genannte „erste Phase" des gespannten und deformierten Körpers beschränken, wo der Beton noch ein zusammenhängender Körper ist. Bei allmählich zunehmender Belastung gelangt nämlich der Körper in eine „zweite Phase", in welcher der Beton sehr zahlreiche, feine Risse aufweist, ohne dass doch die Konstruktion zusammenbräche. Es ist vorläufig nicht recht zu sehen, wie man einen im einzelnen zerrissenen, aber im ganzen noch zusammenhaltenden Körper in die Elastizitätstheorie einführen soll.

Die Indizes $^{(b)}$ und $^{(e)}$ deuten im folgenden immer an, dass sich die betreffende Grösse bzw. auf den Beton und das Eisen bezieht.

18. Mathematische Formulierung der physikalischen Eigenschaften des Eisenbetons. Nicht nur das in den Beton eingebettete Eisen, sondern auch der Beton selbst soll im folgenden als homogener, elastisch-isotroper Körper aufgefasst werden, der dem verallgemeinerten *Hooke*schen Gesetz gehorcht, so dass er, ebenso wie das Eisen, durch Angabe der zwei Materialkonstanten E und m hinreichend definiert ist. In der Theorie des Eisenbetons spielt der *Quotient der beiden Elastizitätsmoduln*:

$$E^{(e)} : E^{(b)} = n \qquad (n \text{ ungefähr } 10 \text{ bis } 15) \tag{51}$$

eine Hauptrolle. Was die *beiden Poissonschen Konstanten* angeht, so setzen wir sie im folgenden einfach *gleich*, also

$$m^{(e)} = m^{(b)} = m, \tag{52}$$

und zwar aus folgenden Gründen: 1. Eine einwandfreie experimentelle Bestimmung von m für Körper wie Beton ist schwierig, 2. im folgenden wird plausibel, dass unter normalen Verhältnissen eine eventuelle, nicht gar zu grosse Verschiedenheit beider Grössen zwar nicht alle Spannungen, wohl aber die vor allem interessierenden merklich unbeeinflusst lässt, 3. die Gleichsetzung beider Grössen erleichtert wesentlich die Lösung des Integrationsproblems (Nr. **19**).

Nachdem so jeder Teilkörper hinreichend charakterisiert ist, erübrigt noch die Erörterung der Verhältnisse an den *Übergangsflächen*, wo Eisen und Beton in Berührung sind. Es kann als experimentell festgestellt gelten, dass es bei einem fertigen, ausgetrockneten Eisenbetonkörper äusserst grosser Kräfte bedarf, um die Eiseneinlagen herauszuziehen, selbst wenn diese einfache Zylinder mit gerader Axe sind; man wird also, wenigstens annähernd, annehmen dürfen, dass bei jeder

Gebrauchsbelastung an den Übergangsflächen ein vollkommenes *Haften*[56]) stattfindet, so dass relative Verschiebungen von Eisen und Beton dort nicht vorkommen, was sich mathematisch durch die Gleichungen:

(53) $$u^{(b)} = u^{(e)}, \quad v^{(b)} = v^{(e)}, \quad w^{(b)} = w^{(e)}$$

an jeder Übergangsfläche formulieren lässt. Um weiterhin das Verhalten der *Spannungen* an den Übergangsflächen bequem schildern zu können, denken wir uns durch irgendeinen Punkt einer solchen Fläche ein rechtwinkliges Koordinatensystem $AB\Gamma$ gelegt derart, dass etwa die B-Axe auf der Fläche senkrecht steht, während die beiden andern in der Tangentialebene liegen. Es wirken dann auf das entsprechende Element der Übergangsfläche eine Zug(Druck)spannungskomponente σ_β und zwei Schubspannungskomponenten τ_α und τ_γ (vgl. die in IV 29a, *Grüning* eingeführten Bezeichnungen). Das Gleichgewicht an einem den Flächenpunkt in sich enthaltenden unendlich kleinen Teilchen Eisenbeton verlangt dann das Erfülltsein der Gleichungen:

(54) $$\tau_\alpha^{(b)} = \tau_\alpha^{(e)}, \quad \tau_\gamma^{(b)} = \tau_\gamma^{(e)}, \quad \sigma_\beta^{(b)} = \sigma_\beta^{(e)}$$

an jeder Übergangsfläche.

Das Verhalten der übrigen drei Spannungskomponenten σ_α, σ_γ und τ_β in unmittelbarer Nachbarschaft der Übergangsflächen folgt dann schon vermöge des verallgemeinerten *Hooke*schen Gesetzes aus den „*Wandbedingungen*“ (53) und (54), zu:

(55) $$n \cdot \sigma_\alpha^{(b)} - \sigma_\alpha^{(e)} = \frac{n-1}{m-1} \cdot \sigma_\beta, \quad n \cdot \sigma_\gamma^{(b)} - \sigma_\gamma^{(e)} = \frac{n-1}{m-1}\, \sigma_\beta, \quad \tau_\beta^{(e)} = n \cdot \tau_\beta^{(b)}$$

an jeder Übergangsfläche.

19. Das Integrationsproblem der Statik des Eisenbetons. Das Integrationsproblem der Elastizitätstheorie für Gleichgewicht (IV 24, Nr. 2a, *Tedone*) erfährt, wie leicht zu sehen, die Modifikation, dass die dort für das Innere des ganzen Körpers postulierten Differentialgleichungen jetzt für das Innere jedes Teilkörpers mit den ihm zukommenden elastischen Konstanten zu gelten haben, und dass zu den früheren Randbedingungen noch die für die Übergangsflächen geltenden „Wandbedingungen“ (53) und (54) hinzukommen.

---

56) Trotz zahlloser Experimente herrschen immer noch Meinungsverschiedenheiten darüber, ob das Haften wesentlich nur der Reibung verdankt wird oder ob es eine eigentliche *Haftfestigkeit* von nennenswertem Betrage giebt. Im ersten Falle würde aus einem beträchtlichen Haften folgen, dass der Eisenbetonkörper von vornherein einen starken *Selbstspannungszustand* mitbringt, den man in der Theorie natürlich berücksichtigen müsste. Im folgenden ist von derartigen Komplikationen abgesehen.

Ganz ähnlich wie früher kann — einen spannungslosen Anfangszustand vorausgesetzt — die *Eindeutigkeit* der Lösung dieser Aufgabe dargetan werden. Ein allgemeiner *Existenzbeweis* wäre erst noch zu führen.

Für den Fall, dass der Körper nur *eine einzige Eiseneinlage*, und zwar *in Form eines geraden Kreiszylinders* besitzt, sind einige einfache Lösungen von *K. Wieghardt*[57]) und *A. Leon*[58]) angegeben worden, wobei zunächst $m^{(e)}$ und $m^{(b)}$ verschieden angenommen wurden. Aus diesen Lösungen kann man schliessen, dass eine eventuelle Verschiedenheit beider Grössen bei normaler Belastung die vor allem in Betracht kommende Zug- und Druckspannung in Richtung der Zylinderaxe nur wenig beeinflusst. Entschliesst man sich dementsprechend dazu, beide gleich zu setzen, so gewinnt man leicht einige weitere einfache Lösungen, die sich den technisch wichtigen Fällen eines 1. rein auf Zug oder Druck, 2. rein auf Biegung beanspruchten geraden Balkens anpassen lassen.[59])

20. Frage der Reduktion auf zweidimensionale Probleme. Zu dieser Frage regt vor allem die Schwierigkeit an, allgemeinere Lösungen des Integrationsproblems zu finden. Zunächst ist leicht zu sehen, dass auch für Eisenbetonkörper die sogen. *ebene Verzerrung* (IV 25, Nr. **11**a, *Tedone-Timpe*) möglich ist; denn setzt man für den ganzen Körper:

$$w = 0, \quad u = u(xy), \quad v = v(xy)$$

und nimmt ferner an, daß die Übergangsflächen Zylinderflächen sind, deren Erzeugende parallel zur Z-Axe ist, so reduzieren sich die Wandbedingungen (53) und (54) bei geeigneter Wahl des $AB\Gamma$-Systemes auf folgende:

$$(56) \qquad u^{(b)} = u^{(e)}, \quad v^{(b)} = v^{(e)}, \quad \sigma_\beta^{(b)} = \sigma_\beta^{(e)}, \quad \tau_\gamma^{(b)} = \tau_\gamma^{(e)},$$

während die übrigen von selbst befriedigt sind. Als unbekannte Spannungen bleiben in den Differentialgleichungen nur σ_α, σ_β und τ_γ übrig; hinterher liefert das verallgemeinerte *Hooke*sche Gesetz noch σ_γ zu:

$$(57) \qquad \sigma_\gamma = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{m}.$$

Indessen ist die Bedeutung dieser Lösungen bei Eisenbetonkörpern geringer als bei homogenen Körpern. Denn während bei diesen jeder so gefundene Spannungszustand leicht in einen in einer dünnen Platte

57) *K. Wieghardt,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56 (1908), p. 119.

58) *A. Leon,* Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst 15 (1909), p. 19 u. 32.

59) *K. Wieghardt,* wie in Fussnote 57, p. 127 u. 131.

herrschenden „verallgemeinerten ebenen Spannungszustand" umgedeutet werden kann (IV 25, Nr. **11**b, *Tedone-Timpe*), ist dies bei jenen nicht allgemein der Fall, sondern wie die zweite Gleichung (55) erkennen lässt, nur dann, wenn zufällig längs der Übergangsflächen überall σ_β verschwindet (da beim verallgemeinerten ebenen Spannungszustand überall σ_γ verschwinden muss).

21. Einfache Lösungen des zweidimensionalen Problems. Einige zweidimensionale Lösungen sind leicht zu gewinnen.[60]) Die folgenden beiden sind, soweit möglich, den Fällen des 1. eingespannten und 2. des gleichförmig belasteten Balkens angepasst.

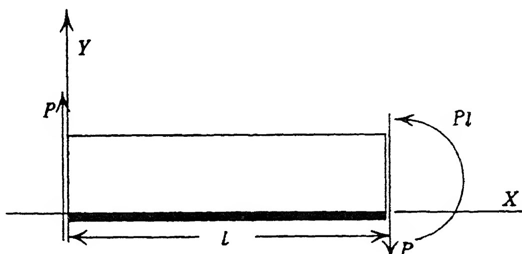


Fig. 18.

I. *Der eingespannte Balken* (Fig. 18) hat die Länge l, die Höhe $h = \varepsilon + \beta$ (ε Eisenhöhe, β Betonhöhe). Links wirkt die Schubkraft P nach oben, rechts nach unten, rechts überdies ein das Gleichgewicht herstellendes Kräftepaar $P.\,l$. Die X-Axe geht durch die Übergangsfläche, die Y-Axe durch das linke Kopfende.

Ersetzt man in den Formeln:

$$\frac{m^2 E}{m+1}\cdot u = (m-1)[a_{12}(x^2 - 2y^2) + a_{13}(3x^2 y - 2y^3)] - [a_{11}y + a_{12}y^2 + a_{13}y^3],$$

$$\frac{m^2 E}{m+1}\cdot v = -(m-1)[2a_{11}x + a_{13}x^3] - [a_{11}x + 2a_{12}xy + 3a_{13}xy^2].$$

$$\sigma_x = 2x(a_{12} + 3a_{13}y) \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau = -[a_{11} + 2a_{12}y + 3a_{13}y^2]$$

einmal die Grösse E durch $E^{(e)}$ und die a_{ik} durch folgende Grössen e_{ik}:

$$\Delta \cdot e_{11} = 6\eta\beta\varepsilon(\beta + \varepsilon)\cdot P,$$
$$\Delta \cdot e_{12} = 3(\eta\beta^2 - \varepsilon^2)\cdot P,$$
$$\Delta \cdot e_{13} = -2(\eta\beta + \varepsilon)\cdot P,$$

wobei

$$\eta = \frac{1}{n} \quad \text{und}$$
$$\Delta = \varepsilon^4 + 4\eta\cdot\varepsilon^3\beta + 6\eta\cdot\varepsilon^2\beta^2 + 4\eta\cdot\varepsilon\beta^3 + \eta^2\beta^4$$

ist, ein zweites Mal E durch $E^{(b)}$ und die a_{ik} durch folgende Grössen b_{ik}:

$$b_{11} = e_{11} \qquad b_{12} = \eta\cdot e_{12} \qquad b_{13} = \eta\cdot e_{13},$$

60) S. Fußnote 57 und 59.

so bekommt man die Zustände des Eisens und des Betons. Die Ergebnisse sind in Fig. 19 graphisch dargestellt; die gestrichelten Linien stellen zum Vergleich den Zustand dar, wie er in einem reinen Betonbalken von der Höhe $\varepsilon + \beta$ herrschen würde.

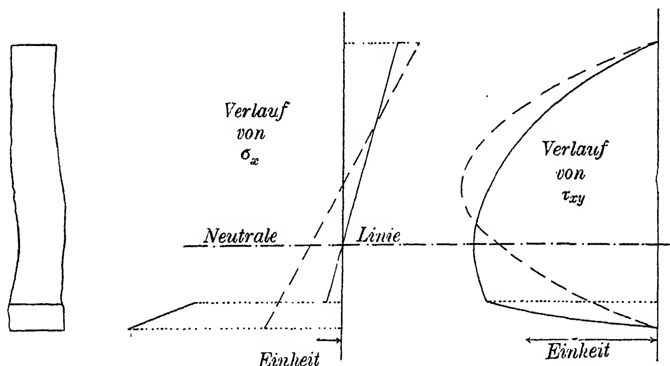


Fig. 19.

Zu beachten ist, dass für jeden Querschnitt $x =$ const. die Spannung σ_x über den Betonteil einerseits und den Eisenteil anderseits je einen linearen Verlauf nimmt, und dass an der Übergangsfläche das Verhältnis beider gleich dem Verhältnis der Elastizitätsmodule ist:

$$\sigma_x^{(e)} = n \cdot \sigma_x^{(b)},$$

was nach (55) immer dann und nur dann der Fall ist, wenn an der Übergangsfläche die dazu senkrechte Zugspannung, (hier σ_y) verschwindet.

Der gefundene Spannungszustand kann sowohl als zu einem ebenen Verzerrungszustand gehörig gelten in einem in Richtung der Z-Axe ausgedehnten Balken, wo dann aber noch ein σ_z nach (57) hinzuzufügen ist, oder auch als verallgemeinerter ebener Spannungszustand in einem in Richtung der Z-Axe schmalen Balken, da hier zufällig längs der ganzen Übergangsfläche (und sogar überhaupt) σ_y verschwindet.

II. In ganz analoger Weise entsprechen die folgenden Formeln und die Figuren 20 u. 21 dem Fall eines *gleichförmig* mit p pro Längeneinheit *belasteten Balkens* von der Länge $2l$ und der Höhe $h = \varepsilon + \beta$.

Es ist:

$$\sigma_x = 2(l^2 - x^2)(a_2 + 3a_3 y) + 2(a_4 + 3a_5 y + 2a_2 y^2 + 2a_3 y^3),$$
$$\sigma_y = -2(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3),$$
$$\tau = 2x(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2).$$

Die Verrückungen sind durch längere Ausdrücke dargestellt, auf deren Wiedergabe verzichtet werden kann, da sie ja leicht aus den Spannungen abzuleiten sind. Wird der Einfachheit halber $\eta = 1:10$

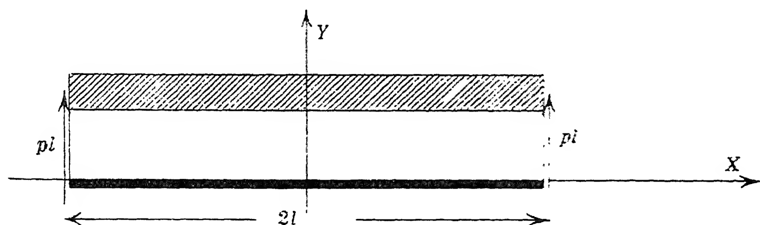


Fig. 20.

und $\varepsilon : \beta = 1 : 10$ angenommen, so bekommt man die Spannungen bzw. im Eisen und Beton, wenn man bzw. die a_i durch folgende e_i und b_i ersetzt:

$$e_0 = 0{,}031 \cdot p, \qquad b_0 = 0{,}031 \cdot p,$$
$$\beta \cdot e_1 = 0{,}584 \cdot p, \qquad \beta \cdot b_1 = 0{,}584 \cdot p,$$
$$\beta^2 \cdot e_2 = 2{,}390 \cdot p, \qquad \beta^2 \cdot b_2 = 0{,}239 \cdot p,$$
$$\beta^3 \cdot e_3 = -\ 3{,}540 \cdot p, \qquad \beta^3 \cdot b_3 = -\ 0{,}354 \cdot p,$$
$$e_4 = -\ 0{,}550 \cdot p, \qquad b_4 = -\ 0{,}064 \cdot p,$$
$$\beta \cdot e_5 = -\ 3{,}536 \cdot p, \qquad \beta \cdot b_5 = +\ 0{,}055 \cdot p.$$

In einiger Entfernung von den Kopfenden des Balkens ist der Verlauf von σ_x über den Querschnitt annähernd linear je im Eisen und im Beton. Da an der Übergangs-

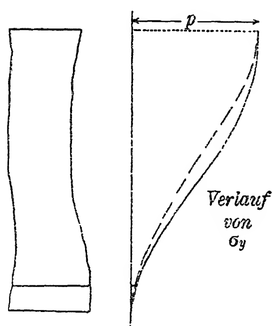


Fig. 21.

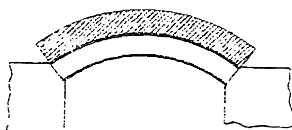


Fig. 22.

fläche σ_y nicht verschwindet, kann der Spannungszustand, streng genommen, nicht als verallgemeinerter ebener Spannungszustand aufgefasst werden.

III. Eine dritte Lösung dieser Art endlich, die halbwegs einem *gleichförmig belasteten Eisenbetongewölbe* entspricht, bekommt man, wenn man aus einem von aussen gleichförmig belasteten Kreisring das „Gewölbe“ der Fig. 22 ausschneidet. Es ist nur eine einzige (radiale)

Verrückungskomponente

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}$$

vorhanden, welche den Rand- und Wandbedingungen leicht angepasst werden kann. Der Spannungszustand wird durch die Fig. 23 genügend dargestellt.

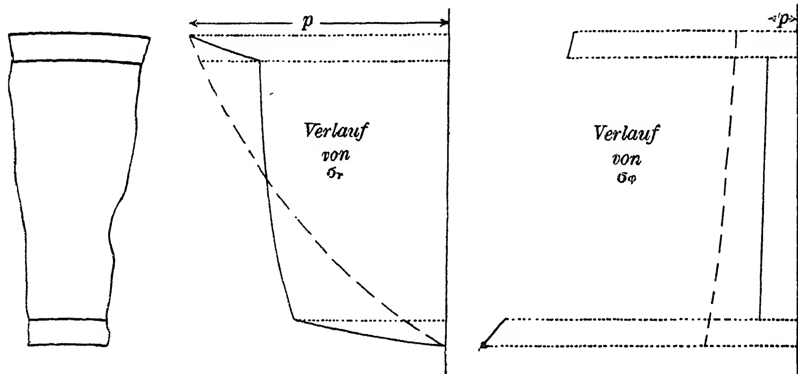


Fig. 23.



Fig. 24.

Sehr erwünscht wäre wegen der grossen praktischen Bedeutung der abgeschrägten Eiseneinlagen (Fig. 24) eine entsprechende Lösung des Integrationsproblems.

22. Technische Ansätze. Die technischen Ansätze verzichten von vornherein darauf, eine exakte Lösung des Integrationsproblems zu geben; sie dienen dem unabweislichen Bedürfnis der täglichen Praxis, welches für alle praktisch vorkommenden Belastungen eine wenigstens schätzungsweise zutreffende, vor allem aber schnell und bequem zu gewinnende Beurteilung des Spannungszustandes verlangt. Im wesentlichen handelt es sich dabei um eine einfache Übertragung der sogenannten technischen Balken- und Gewölbetheorie; (vgl. oben Nr. 9 und IV 29 a, Nr. 27, *Grüning*).

Betrachten wir z. B. den *geraden Balken* mit geradlinigen Eiseneinlagen, deren Axe parallel zur Balkenaxe verläuft. Diese sei X-Axe, die Y-Axe sei vertikal. Um nun die hauptsächlich interessierenden, in der Richtung der Balkenaxe verlaufenden „Biegungsspannungen" σ_x zu finden, nimmt man willkürlich an, dass die Dehnung ε_x in Richtung der Balkenaxe im einzelnen Querschnitte $x = \text{const.}$ eine lineare Funktion von y sei:

$$\varepsilon_x = a + b \cdot y \tag{58}$$

und dass zwischen ε_x und σ_x einfach der Zusammenhang:

(59) $$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

bestehe, eine Festsetzung, die natürlich eigentlich die weitere in sich schliesst, dass überall:

$$\sigma_y + \sigma_z = 0$$

ist. Dass diese Gleichung bei belasteter Gurtung im allgemeinen nicht befriedigt sein kann, ist ein kleiner Widerspruch, den man in Kauf nimmt (vgl. Nr. **9**); man setzt sogar, wie früher:

$$\sigma_y = 0, \qquad \sigma_z = 0.$$

Findet nun an den Übergangsflächen vollkommenes Haften statt, so folgt aus (55) ohne weiteres, dass dort:

(60) $$\sigma_x^{(e)} = n \cdot \sigma_x^{(b)}$$

ist, dass sich also, wie man sagt, „die beiden Materialien Eisen und Beton an der Spannungsübertragung *nach Massgabe ihrer Elastizitätszahlen* beteiligen".

Der Vergleich mit den obigen Lösungen des Integrationsproblems (vgl. Nr. **21**) lässt vermuten, dass diese Ansätze unter ziemlich allgemeinen Bedingungen brauchbare Abschätzungen zwar nicht aller, wohl aber der hauptsächlich interessierenden Spannungen liefern. Was insbesondere die gern benutzte Gleichung (60) angeht, so wird man sie auch dann, wenn sie nach Lage der Dinge nicht zutreffen kann, verwenden, wenn nur dabei für den *Beton* eine ungünstigere Beanspruchung herausgerechnet wird, als tatsächlich stattfindet. Die Gleichungen (55) lassen erkennen, dass dies immer der Fall ist, sobald σ_α und σ_γ einerseits und σ_β anderseits verschiedenes Vorzeichen haben. Ein solcher Fall dürfte z. B. bei den abgeschrägten Eiseneinlagen der Fig. 24 vorliegen[61]).

Im Falle des *Gewölbes* dagegen (Lösung III in Nr. **21**) haben $\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma$ als Druckspannungen alle gleiches Vorzeichen; entsprechend ist der Beton an der Übergangsfläche in Wirklichkeit stärker beansprucht, als der Formel (60) entspricht. Immerhin lassen die Figuren (23) erkennen, dass der Unterschied nur gering ist.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass die Spannungsverteilung häufig unter allgemeineren Voraussetzungen diskutiert wird, als sie der Gleichung (59) bei konstantem E entsprechen. So wird z. B. im Beton für Zug ein anderer konstanter Elastizitätsmodul angenommen als für Druck, oder es wird E als Funktion von σ_x angesetzt. Sehr oft wird auch, um einer eventuell im Beton herrschenden „zweiten Phase" (Nr. **17**) nach Möglichkeit gerecht zu werden, angenommen, dass der Betonteil des

61) Vgl. *L. Hotopp*, Beton u. Eisen 9 (1910).

Querschnittes in zwei Teile zerfällt, in deren einem gar keine Spannungen, und in deren anderem nur Druckspannungen übertragen werden (vgl. die ganz analogen Überlegungen in Nr. 8 und **16**).

Die Hauptaufgabe ist immer, die Spannungsverteilung σ_x auszudrücken als Funktion der über den Querschnitt resultierenden Normalkraft und des resultierenden Biegungsmomentes, insbesondere auch die Lage der neutralen Axe $\sigma_x = 0$ zu finden. Wenn, wie oben angedeutet, die „zweite Phase" berücksichtigt wird, so führt schon diese einfache Aufgabe auf die Auflösung nicht-linearer algebraischer Gleichungen. Vereinfachungen im Rechnungsgange werden dann erhalten, wenn man berücksichtigt, dass die Eisenteile eines Querschnitts nur einen geringen Teil des ganzen Querschnittes ausmachen, oder dadurch, dass man versucht, komplizierte, mit Wurzelzeichen behaftete Funktionen durch einfache Polynome zu approximieren, oder endlich durch Heranziehung graphischer Methoden. Wir müssen uns in dieser Beziehung mit einem allgemeinen Hinweis auf die im Litteraturverzeichnis genannten Eisenbetonzeitschriften begnügen.

---

23. Schlußwort. Während man in der Fachwerktheorie fast mühelos von Ergebnis zu Ergebnis schreitet, steht man in der Theorie der Stein- und Eisenbetonbauten nach jedem Schritt vor neuen Hindernissen verschiedenster Art. Das vorliegende Referat konnte entsprechend nicht mehr sein, als eine möglichst präzise Darstellung einerseits der wenigen sicheren Resultate, anderseits der vielen unerledigten Fragen und Zweifel.

Wie soll man weiterkommen? Gewiß werden Beobachtung und Experiment, die unentbehrlichen Ratgeber für alle praktischen Fragen, auch viele wertvolle Anhaltspunkte für eine rationelle Theorie liefern, aber ein rechter Aufschwung der Theorie wird so lange nicht möglich sein, als es nicht gelingt, die Integrationsprobleme der Mechanik der Kontinua in viel weiterem Umfange zu lösen als bisher. Dabei wird man auf die Dauer noch andere Kontinua betrachten müssen als den festen, elastischen Körper; so das Kontinuum sei es losen Sandes, sei es mehr oder weniger kohärierender Erde, vielleicht aber auch Kontinua von einer gewissen Plastizität, wie man sie z. B. einem noch nicht absolut trocken gewordenen Mörtel zuschreiben kann[62]).

62) Vgl. etwa die Schlussausführungen bei *O. Mohr*, Der Spannungszustand einer Staumauer. Zeitschr. d. Österr. Ing. u. Arch. Ver. 60 (1908), p. 641 u. 661. Im übrigen vgl. das Referat IV 31 über die physikalischen Grundlagen der Festigkeitslehre (*v. Kármán*).

(Abgeschlossen im März 1914.)

IV 30. DIE ALLGEMEINEN ANSÄTZE DER MECHANIK DER KONTINUA.

Von

E. HELLINGER

IN MARBURG A. L.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Spezielle den vorliegenden Gegenstand betreffende Lehrbücher und Monographien liegen z. Z. in der Litteratur nicht vor. Von den wiederholt zu nennenden Werken seien hier folgende besonders zusammengestellt:

A. v. Brill, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig 1909.

E. und *F. Cosserat,* Théorie des corps déformables, Paris 1909. Ursprünglich als Appendix zur französischen Ausgabe von *O. D. Chwolson,* Traité de physique, t. II, Paris 1909 erschienen. Ein Auszug ist als Note an *P. Appell,* Traité de mécanique rationelle, t. III, 2. éd. (Paris 1909) beigefügt.

P. Duhem, Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale, 3 vols, Paris 1911.

G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig u. Berlin 1912.

J. L. Lagrange, Mécanique analytique, 4. éd. = Oeuvres complètes, Bd. 11 u. 12, (éd. par *G. Darboux*), Paris 1888/89.

W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik. Bd. 1 u. 2. Leipzig 1895/96.

Vgl. ausserdem die entsprechenden Abschnitte in den Lehrbüchern der Mechanik (s. die Übersichten in IV 1, *Voss,* IV 6, *Stäckel,* IV 11, *Heun,* IV 23, *Müller-Timpe).*

---

1. Einleitung. Das vorliegende Referat soll unter einheitlichem Gesichtspunkte einen zusammenfassenden Überblick über die verschiedenen *Formen* der Ansätze geben, durch die man in den einzelnen Gebieten der „Mechanik der Kontinua“ im weitesten Sinne, d. h. der Mechanik und Physik kontinuierlich ausgedehnter Medien, den zeitlichen Ablauf oder auch den Gleichgewichtszustand der zu untersuchenden Vorgänge bestimmt; dabei wird immer nur an solche Kontinua gedacht, die nicht vermöge irgendwelcher einschränkender

Bedingungen speziell endlich viele Freiheitsgrade besitzen. Die Möglichkeit, die Grundgleichungen verschiedener Disziplinen in analoge Formen zu bringen, hat man früh bemerkt: die „mechanischen“ Theorieen der Physik, die das physikalische Geschehen auf Bewegungserscheinungen der Materie zurückführen wollen, haben formal-mathematisch betrachtet geradezu den Inhalt, dass sie die Gleichungen der Physik als Sonderfälle der Gleichungen eines allgemeinen Systems bewegter Massen bzw. Massenpunkte erscheinen lassen; sie müssen also jene Analogien in Evidenz treten lassen.

Neben den eigentlichen mechanischen Theorien, die mehr oder weniger detaillierte Bilder vom Aufbau der Materie voran stellen, hat man zum Teil schon in den Anfängen, besonders aber seit der Mitte des 19. Jahrhunderts einen andern an *J. L. Lagrange*s analytischer Mechanik orientierten Weg eingeschlagen; so wie dort sämtliche zur Untersuchung kommenden Probleme wenigen sehr allgemeinen Prinzipien untergeordnet werden, so bemühte man sich die Grundansätze immer weiterer physikalischer Disziplinen in die Formen jener Prinzipien zu bringen, indem man die in ihnen auftretenden Grössen — Energie, Kräfte usw. — von rein phänomenologischen Gesichtspunkten aus mit gewissen physikalischen Grössen identifizierte. Für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden knüpft diese Entwicklung namentlich an die von *W. Thomson* (*Lord Kelvin*), *J. J. Thomson* und *H. v. Helmholtz* inaugurierten Untersuchungen über zyklische Systeme und deren Anwendungen und über die Reziprozitätssätze der Mechanik an.

Nun wendete bereits Lagrange seine Prinzipien direkt auf gewisse kontinuierliche Systeme (Flüssigkeiten, biegsame Fäden und Platten u. dgl.) an[1]; im Anschluss an die weitere Ausbildung dieser Ansätze, besonders durch die an *A. L. Cauchy*[2]) anknüpfende Entwicklung der Elastizitätstheorie, sowie unter der Einwirkung des Ausbaues anderer physikalischer, speziell optischer Theorien gewöhnte man sich immer mehr, auch ein kontinuierliches System als ein selbständiges Objekt der Mechanik (mit unendlich vielen Freiheitsgraden) zu betrachten, das sich seinerseits zwar in formaler Analogie zu der altbekannten Punktmechanik, aber doch völlig unabhängig von ihr behandeln lässt. Die so als selbständige Disziplin entwickelte „Mechanik des deformierbaren Kontinuums“ umfaßt den formalen Ansätzen nach neben der gewöhnlichen Elastizitätstheorie und Hydrodynamik sämtliche hier in

1) Vgl. insbesondere 1. part., sect. IV, § II der „Mécanique analytique“.

2) Entscheidend waren hier seine Untersuchungen über den Spannungsbegriff vom Jahre 1822 (Bull. de la Soc. philom. 1823, p. 9). Nähere Angaben s. in IV 23, Nr. **3**a, *Müller-Timpe*.

Betracht zu ziehende physikalischen Erscheinungen in kontinuierlich ausgedehnten Medien. Die Fortbildung dieser Betrachtungen wurde wesentlich beeinflusst durch die *Thermodynamik*, die prinzipiell das Gesamtgebiet der Physik zu umfassen strebt, und die dadurch, daß sie überall die Energiefunktion bzw. das Potential voranstellt, naturgemäss die Grundgleichungen der verschiedenen Einzelgebiete in analogen Formen liefert.

Alle diese Beziehungen sind in der mechanischen und physikalischen Literatur vielfach behandelt worden; vieles, was ausdrücklich nur in der Punktmechanik bzw. für Systeme von endlich vielen Freiheitsgraden ausgesprochen ist, lässt sich unmittelbar auf kontinuierliche Systeme ausdehnen. Es seien hier vorweg nur die Namen einiger Autoren genannt, die die hier in Betracht kommenden Beziehungen besonders berücksichtigt haben und die daher auch im folgenden häufig zur Geltung kommen: *W. Voigt*[3]), *P. Duhem*[4]) und *E.* und *F. Cosserat.*[5]) [6])

Der Zweck dieses Referates bedingt es, dass im folgenden das rein *formal*-mathematische Moment im Vordergrund steht: die Formulierung des *Ansatzes* der verschiedenen Probleme sowie ihre Zusammenfassung in eine einheitliche möglichst einfache und bequeme Formel. Sowohl die Untersuchung der *mechanischen* und *physikalischen* Bedeutung der Grössen und Gleichungen als auch die eigentlich *analytisch*-mathematische Theorie ist in den verschiedenen Referaten der Bände IV und V über die besonderen Disziplinen enthalten.

Als einheitliche *mathematische Form*, der sich die sämtlichen Einzelansätze am leichtesten einfügen, wird die des *Variationsprinzipes* verwendet. Allerdings genügt nicht die Gestalt, die in der eigentlichen Variationsrechnung in der Regel betrachtet wird, wo die unbekannten Funktionen so zu bestimmen sind, dass ein gewisses sie enthaltendes bestimmtes Integral einen Extremwert annimmt. Vielmehr handelt es sich hier vorzugsweise um diejenige Form, die die Variationsrechnung als notwendiges Kriterium des Extremums ergiebt, und in

3) Neben vielen einzelnen Arbeiten besonders in seinem Kompendium der theoretischen Physik, 2 Bde., Leipzig 1895/96.

4) In zahlreichen späterhin zu zitierenden Arbeiten; vgl. auch seinen Traité d'énergétique ou de thermodynamique génerale, t. I. II, Paris 1911.

5) Vgl. die als Appendix zur französischen Ausgabe von *O. D. Chwolson,* Traité de physique erschienene „théorie des corps déformables" (Paris 1909), von der ein Auszug der 2. Aufl. des 3. Bds. von *P. Appell,* Traité de mécanique rationnelle (Paris 1909) als Note beigefügt ist.

6) Auch von Entwicklungen ähnlicher Art, die *D. Hilbert* in einigen seiner Göttinger Vorlesungen gab, ist das folgende vielfach beeinflusst.

der man von altersher das *Prinzip der virtuellen Arbeit* ausdrückt: „Gegeben sind eine Reihe von Grössen $X, \ldots, X_a, \ldots$ in ihrer Abhängigkeit von den unbekannten Funktionen $x, \ldots$ von $a, \ldots, c$ und deren Ableitungen; diese Funktionen sollen der Bedingung genügen, dass ein bestimmtes Integral einer mit jenen $X, \ldots, X_a, \ldots$ als Koeffizienten gebildeten linearen Form der willkürlichen Funktionen $\delta x, \ldots$ von $a, \ldots c$ und ihrer Ableitungen

$$\int \cdots \int \left\{ X\, \delta x + \cdots + X_a \frac{\partial\, \delta x}{\partial a} + \cdots \right\} da \cdots dc$$

— oder eine Summe solcher Integrale — identisch für alle (oder doch für alle gewissen Nebenbedingungen genügenden) $\delta x, \ldots$ verschwindet."

Der Vorteil, den die Verwendung eines solchen Variationsprinzipes als Grundlage gegenüber anderen möglichen Formulierungen oder auch der direkten Inbetrachtnahme der Grundgleichungen gewährt, besteht ganz besonders darin, dass das Variationsprinzip im Stande ist, in *einer* Formel das Verhalten des betrachteten Mediums an *allen* Stellen und zu *jedem* Zeitpunkt zu bestimmen, speziell also auch neben den Gleichungen für das Innengebiet die *Randbedingungen* und die *Anfangsbedingungen* zu umfassen. Es ist zudem in seiner prägnanten Kürze in gewisser Hinsicht übersichtlicher als die Gleichungen und hat infolgedessen für die Behandlung neuer Gebiete, für die Aufstellung weiterer Verallgemeinerungen u. dgl. wesentliche *heuristische* Bedeutung; diese wird besonders betont durch die innige Beziehung des Variationsprinzipes zur Thermodynamik, durch deren Anspruch auf Allgemeingültigkeit es für die Begründung physikalischer Theorien beweisenden Wert bekommt. Auch bei der Durchführung von *Koordinatentransformationen* ist das Variationsprinzip gegenüber den expliziten Gleichungen im Vorteil; es lässt vielfach die *invariantentheoretische Natur* des betrachteten Problems, die Frage nach den Transformationsgruppen, die es ungeändert lassen, bequemer erkennen, ohne daß es der Einführung einer besonderen Symbolik bedarf. —

Nach einigen einleitenden Erörterungen über den Begriff des Kontinuums und seine Kinematik werden in dem *ersten* Abschnitt des Referates die Grundansätze der *Statik*, im *zweiten* die der *Kinetik* behandelt, jedesmal ohne Rücksicht darauf, was für Kraftwirkungen im einzelnen es sind, die das Kontinuum beeinflussen. Die Natur dieser Kraftwirkungen, speziell ihre Abhängigkeit von der Lage und Bewegung des Kontinuums (*Dynamik*) wird im *dritten* Abschnitt erörtert, wobei dann die einzelnen Disziplinen einzuordnen sind; hierbei kommen schliesslich auch in einer kurzen Skizze einerseits die Beziehungen zu den Ansätzen der *Thermodynamik*, andererseits das Verhalten der ein-

zelnen Wirkungsgesetze gegen Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten und damit auch die Auffassungen der *Relativitätstheorie der Elektrodynamik* zur Geltung.

2. Der Begriff des Kontinuums.

2a. Das Kontinuum und seine Deformation. Das allgemeine *dreidimensional ausgedehnte kontinuierliche Medium*, auf das sich die folgenden Betrachtungen beziehen, bedeutet — unter Abstraktion von allen individuellen Eigenschaften der Materie — eine Gesamtheit von materiellen Teilchen, die erstens voneinander *unterscheidbar* sein und zweitens den Raum bzw. einen stetig begrenzten Raumteil *stetig ausfüllen* sollen. Die erste Eigenschaft kommt darin zum Ausdruck, dass jedes Teilchen durch Angabe dreier Parameterwerte a, b, c identifiziert wird, derart, dass verschiedene Teilchen in jedem Zustand, in dem man das Kontinuum etwa betrachtet, stets verschiedene Lagen haben; der von stetigen geschlossenen Flächen S_0 begrenzte Variabilitätsbereich V_0 dieser a, b, c charakterisiert das Quantum der Materie, das in Betracht gezogen wird. Die zweite Forderung besagt, dass die Lagen aller Teilchen einen von stetigen geschlossenen Flächen S begrenzten Raumteil V erfüllen. Bestimmt man die Lage eines Teilchens durch seine kartesischen Koordinaten, so wird ein solcher Zustand analytisch gegeben durch drei Funktionen von a, b, c

$$(1) \qquad x = x(a, b, c), \quad y = y(a, b, c), \quad z = z(a, b, c),$$

die V_0 auf V abbilden, und deren Funktionaldeterminante

$$(2) \qquad \Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}$$

innerhalb V_0 von Null verschieden, etwa positiv, ist. Man kann für a, b, c die Koordinaten einer fest gewählten Ausgangslage nehmen; dann sind $x - a$, $y - b$, $z - c$ die Komponenten der Verschiebung, die jedes Teilchen beim Übergang zur Lage (1) erleidet, und die Funktionen (1) werden *stetige* Funktionen von a, b, c, sofern man die übliche Annahme macht, dass ursprünglich benachbarte Teile stets benachbart bleiben. Wir werden darüber hinaus stets voraussetzen, dass die Funktionen (1) hinreichend viele stetige Differentialquotienten nach ihren Argumenten haben; nur an einzelnen Punkten, Linien oder Flächen sollen Unterbrechungen dieser Stetigkeit stattfinden können (vgl. IV 1, Nr. 9, *Voss*). Die gleichen Voraussetzungen werden wir im allgemeinen stillschweigend für die weiterhin auftretenden, physikalische Vorgänge darstellenden Funktionen zu machen haben.

Jedes Funktionensystem (1) beschreibt vollständig einen bestimmten *Deformationszustand* des Kontinuums; im allgemeinen gilt *jeder* De-

formationszustand, d. h. jedes Funktionentripel (1), das nur den soeben charakterisierten Stetigkeitsvoraussetzungen genügt, als zulässig; Beschränkungen in der Art der möglichen Funktionen werden besondere Eigenschaften spezieller Medien zum Ausdruck bringen. In jedem Falle bestimmen die partiellen Ableitungen der Funktionen (1) in bekannter Weise die Verschiebungen, Verdrehungen und Formänderungen, die jedes sehr kleine Quantum (Volumelement) bei der Deformation erleidet (vgl. IV 14, Nr. **16**, *Abraham*).

Die Grundlage für die Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse irgendeines Deformationszustandes (1) erhalten wir, wenn wir ihn mit einer sog. *unendlichkleinen virtuellen Verrückung* überlagern, die *virtuell* heisst, insofern sie willkürlich zu dem reell stattfindenden Deformationszustand hinzutritt.[7]) Um diesen Begriff in mathematiscn präziser Form zu erhalten, ohne die bequeme übliche Bezeichnung und Verwendung der „unendlichkleinen" Grössen aufzugeben, betrachte man zunächst eine der Deformation (1) übergelagerte noch von einem Parameter σ abhängige und mit $\sigma = 0$ verschwindende Deformation, die das ursprünglich an der Stelle (x, y, z) befindliche Teilchen an die Stelle

$$\bar{x} = x + \xi(x, y, z; \sigma) \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{pmatrix}^{8)}$$

überführt; dabei sind ξ, η, ζ gegebene Funktionen von x, y, z und von dem Parameter σ, der in einem (beliebig kleinen) $\sigma = 0$ umgebenden Bereich variieren kann. Vermöge (1) kann man auch unter Elimination von x, y, z die so entstehenden neuen Deformationen in der alten Gestalt schreiben:

$$(3) \qquad \bar{x} = \bar{x}(a, b, c; \sigma), \quad \text{wo} \quad \bar{x}(a, b, c; 0) = x \qquad (x, y, z).$$

Ist f irgendein von den Deformationsfunktionen (1) und ihren Ableitungen abhängiger Ausdruck, so bezeichnen wir allgemein als seine „Variation" den Ausdruck

$$\delta f(x, \ldots, x_a, \ldots) = \left\{\frac{\partial}{\partial \sigma} f(\bar{x}, \ldots, \bar{x}_a, \ldots)\right\}_{\sigma = 0}, \quad \text{wo } x_a = \frac{\partial x}{\partial a}, \cdots;$$

---

7) So in Übereinstimmung mit der Terminologie von *Voss* (IV 1, Nr. **30**), die auch in den Lehrbüchern vielfach üblich ist. Andere (z. B. *Voigt*, Kompendium I, p. 27) sprechen von „virtuellen" Verrückungen erst dann, wenn die sonst beliebigen Verrückungen mit den für das System etwa bestehenden Bedingungen verträglich sind; *C. Neumann* (Ber. Ges. Wiss. Leipzig 31 (1879), p. 53 ff.) hat gelegentlich den Vorschlag von *Gauss* aufgenommen, dann von *fakultativen* Verrückungen zu reden.

8) Diese Signatur und die analogen in der Folge bedeuten, dass neben der angeschriebenen Gleichung auch diejenigen gelten, die durch gleichzeitige zyklische Vertauschung von x, y, z und ξ, η, ζ aus ihr entstehen.

dabei bleiben während der Differentiation a, b, c konstant; die Operation δ ist daher mit der Differentiation nach a, b, c vertauschbar:

$$\delta \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial\, \delta f}{\partial a}.$$

Verschwinden die 3 Funktionen

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \delta x(x, y, z) \qquad (x, y, z),$$

die vermittels (1) als Funktionen von x, y, z angesehen werden können, nicht identisch in x, y, z, so kann man unter den üblichen Stetigkeitspostulaten setzen

(3′) $$\bar{x} = x + \sigma\, \delta x(x, y, z) \qquad (x, y, z),$$

falls σ so klein gewählt ist, dass σ^2 hinreichend klein gegenüber σ wird; die so gegebene unendlich kleine virtuelle Verrückung des Kontinuums ist also bis auf den Faktor σ durch die 3 Funktionen δx, δy, δz von x, y, z bestimmt. Man kann diese Verrückung unmittelbar dem Begriff der in der Kinematik elastischer Medien betrachteten „unendlichkleinen Deformationen“ einordnen (vgl. IV 14, Nr. **18**, *Abraham*) und findet insbesondere, dass die durch sie bedingte *„virtuelle Formänderung“* jedes Volumelements durch die 6 Grössen

(4) $$\frac{\partial\, \delta x}{\partial x},\ \frac{\partial\, \delta y}{\partial y},\ \frac{\partial\, \delta z}{\partial z},\ \frac{\partial\, \delta y}{\partial z} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial y},\ \frac{\partial\, \delta z}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta x}{\partial z},\ \frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x},$$

ihre *„virtuelle Rotation“* durch

(4′) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \delta z}{\partial y} - \frac{\partial\, \delta y}{\partial z}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial z} - \frac{\partial\, \delta z}{\partial x}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \delta y}{\partial x} - \frac{\partial\, \delta x}{\partial y}\right)$$

bestimmt wird — jedesmal abgesehen von dem Faktor σ.

Eine *Bewegung des Kontinuums* wird als eine vom Zeitparameter t abhängige Folge von Deformationszuständen aufgefasst und demgemäss durch die drei nun noch von t abhängigen Deformationsfunktionen

(5) $$x = x(a, b, c; t), \quad y = y(a, b, c; t), \quad z = z(a, b, c; t)$$

dargestellt, die als Funktionen aller vier Variablen im notwendigen Umfange stetig und differenzierbar sind; bei festem a, b, c stellt (5) die Bahn eines bestimmten Teilchens dar.

Ganz wie oben betrachtet man dann, indem man in die Formeln nur die Variable t hineinnimmt, neben der Bewegung (5) noch die für $\sigma = 0$ in (5) übergehende Schar von Bewegungen

(6) $$\bar{x} = \bar{x}(a, b, c; t; \sigma) = x + \sigma\, \delta x(x, y, z; t) \qquad (x, y, z)$$

für kleine Werte des Parameters σ und bezeichnet δx, δy, δz als Bestimmungsstücke dieser der Bewegung (5) übergelagerten *virtuellen Verrückung.*

2b. Adjunktion physikalischer Parameter, insbesondere Dichte und Orientierung. Jede physikalische Eigenschaft eines Mediums wird durch eine oder mehrere Funktionen von a, b, c, t beschrieben, die zu den Deformationsfunktionen hinzutreten.

Von einer solchen Eigenschaft wird im folgenden allgemein Gebrauch gemacht werden: der Existenz einer *unveränderlichen Masse* m für jedes Quantum V_0' des Mediums, die sich als über V_0' erstrecktes Integral einer für das Medium charakteristischen *Dichtefunktion* $\varrho_0 = \varrho_0(a, b, c)$ ausdrückt. Durch Übergang zur deformierten Lage (1) ergibt sich als *wirkliche Massendichte* ϱ der Verteilung des Mediums

$$(7) \qquad \varrho = \frac{\varrho_0}{\Delta},$$

und die Masse im Teil V' von V ist

$$m = \iiint\limits_{(V')} \varrho \, dx \, dy \, dz = \iiint\limits_{(V_0')} \varrho_0 \, da \, db \, dc.$$

Veränderungen der Lage des Kontinuums legen an sich bezüglich des Verhaltens eines solchen adjungierten physikalischen Parameters noch nichts fest; man lässt indessen stets die Masse eines jeden Quantums, d. h. die Funktion $\varrho_0(a, b, c)$ bei einer virtuellen Verrückung ungeändert und ersetzt daher die Dichte ϱ derart durch

$$(8) \qquad \bar{\varrho} = \bar{\varrho}\,(x, y, z; \sigma) = \varrho + \sigma \delta \varrho (x, y, z),$$

dass (entsprechend der Kontinuitätsbedingung, vgl. IV 15, Nr. 7, p. 59f. *A. E. H. Love*):

$$(8') \qquad \delta \varrho_0 = \delta(\varrho \Delta) = 0 \text{ oder } \delta \varrho + \varrho \frac{\partial(\delta x)}{\partial x} + \varrho \frac{\partial(\delta y)}{\partial y} + \varrho \frac{\partial(\delta z)}{\partial z} = 0.$$

Entsprechendes soll bei einer Bewegung gelten, d. h. $\varrho_0(a, b, c)$ soll von t unabhängig und ϱ alsdann durch (7) gegeben sein.

Noch von einer hierhin gehörigen Begriffsbildung wird häufig Gebrauch zu machen sein, der Annahme nämlich, *dass für jedes Teilchen des Kontinuums die verschiedenen von ihm ausgehenden Richtungen charakteristisch verschiedene Bedeutung besitzen, und dass daher die Angabe seiner Orientierung wesentlich zur Beschreibung der Situation des Kontinuums gehört.* Solche Vorstellungen sind in der Molekulartheorie entstanden, indem man sich Körper von kristallinischer Struktur als Moleküle dachte, und bereits *S. D. Poisson*[9]) hat sie zur Gewinnung einer besseren Molekulartheorie der Elastizität zu verwenden versucht. Neuerdings haben *E.* und *F. Cosserat*[10]) ohne Heranziehung von Mole-

9) Paris, Mém. de l'Acad. 18 (1842), p. 3, sowie in einigen vorangehenden Arbeiten; vgl. die ausführlichen Angaben in IV 23, Nr. 4c, p. 39 (*Müller-Timpe*).

10) Paris C. R. 145 (1907), p. 1409; 146 (1908), p. 68. Eine zusammen-

kularvorstellungen solche in jedem Teilchen mit einer bestimmten Orientierung behafteten Kontinua weitgehend behandelt.

In allgemeinster Weise kann dieser Begriff der orientierten Teilchen des Kontinuums analytisch formuliert werden[11]), indem man sich jedem Teilchen a, b, c des Kontinuums ein *rechtwinkliges Axenkreuz* angeheftet denkt, dessen 3 Axen jeweils die Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ haben; drei unabhängige Parameter λ, μ, ν (z. B. die Eulerschen Winkel), die die Orientierung eines solchen Dreikants in bezug auf das x-y-z-Koordinatensystem bestimmen, müssen neben den Funktionen (1) als Funktionen von a, b, c bekannt sein:

$$(9) \qquad \lambda = \lambda(a, b, c), \quad \mu = \mu(a, b, c), \quad \nu = \nu(a, b, c),$$

um den Zustand eines solchen Mediums völlig zu beschreiben.

Mit jeder virtuellen Verrückung des Kontinuums wird man jetzt eine *virtuelle Drehung* dieser Dreikante verbinden, indem man eine von einem Parameter σ abhängige und für $\sigma = 0$ verschwindende Schar von Drehungen aus der Lage (9) heraus zugrunde legt und λ, μ, ν unter Beschränkung auf hinreichend kleine Werte von σ durch

$$(10) \qquad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(a, b, c; \sigma) = \lambda + \sigma \delta \lambda(a, b, c) \qquad (\lambda, \mu, \nu)$$

ersetzt. Dabei kann man übrigens sowohl λ, μ, ν als $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ stets entweder als Funktionen von a, b, c oder mit Hilfe von (1) als solche von x, y, z auffassen. Die Variationen $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\gamma_3$ der Richtungskosinus der 3 Axen selbst sind lineare homogene Funktionen der $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$, die man aus den expliziten Ausdrücken von $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ durch Differentiation nach σ erhält; die Komponenten $\delta\pi, \delta\varkappa, \delta\varrho$ der Winkelgeschwindigkeit der virtuellen Drehung nach den 3 Axen, die mit $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\gamma_3$ durch die Formeln

$$(11) \; \delta\pi = \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3 = -(\gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3) \begin{pmatrix}\pi, \varkappa, \varrho\\ \alpha, \beta, \gamma\end{pmatrix},$$

$$(11') \qquad \delta\alpha_i = \gamma_i\delta\varkappa - \beta_i\delta\varrho \qquad \left(i = 1, 2, 3; \; \begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma\\ \pi, \varkappa, \varrho\end{matrix}\right)$$

zusammenhängen und die übrigens, im Gegensatz zu dem bisherigen Gebrauch des Zeichens δ, nicht Variationen bestimmter Funktionen von a, b, c sind, werden also gleichfalls lineare homogene Funktionen von $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$; wir setzen

$$(12) \qquad \delta\lambda = l_1\delta\pi + m_1\delta\varkappa + n_1\delta\varrho \qquad \begin{pmatrix}\lambda, \mu, \nu\\ 1, 2, 3\end{pmatrix}.$$

---

fassende Darstellung haben sie in ihrer „théorie des corps déform."[5]) gegeben. Vgl. auch IV 11, II. Teil, *K. Heun.*

11) Vgl. eine Bemerkung von *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 206.

Daher bestimmen auch $\delta\pi$, $\delta\varkappa$, $\delta\varrho$ (als Funktionen von a, b, c oder x, y, z gegeben) die virtuelle Verdrehung des Kontinuums.[12])

Alle diese Formeln lassen sich durch Aufnahme des Zeitparameters t sofort auf den Fall der *Bewegung* ausdehnen.

2c. **Zwei- und eindimensionale Kontinua.** Durch Unterdrückung eines bzw. zweier der drei Parameter a, b, c erhält man endlich unmittelbar auch die Ansätze zur Behandlung *zwei- und eindimensionaler Kontinua*, die *im dreidimensionalen Raume* gelegen sind.[13]) Ihre Lage in jedem Zustand wird gegeben durch

(13) $$x = x(a, b) \quad \text{bzw.} \quad x = x(a) \qquad (x, y, z);$$

die Parameter variieren in einem Bereich S_0 bzw. C_0 der a-b-Ebene bzw. der a-Axe, welcher durch (13) auf eine Fläche S bzw. eine Kurve C abgebildet wird. Auch hier kann man jedem Teilchen ein Axenkreuz aus *drei* zueinander senkrechten Richtungen zugeordnet denken[14]), das durch die Funktionen bestimmt wird

(14) $$\lambda = \lambda(a, b) \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \lambda(a) \qquad (\lambda, \mu, \nu).$$

I. Die Grundansätze der Statik.

3. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

3a. **Kräfte und Spannungen.** Um auf diesem kinematischen Schema die dynamischen Eigenschaften des Kontinuums aufzubauen, knüpfen wir an den *Arbeitsbegriff* an. Der Gesamtheit der auf das Kontinuum infolge seines gegenwärtigen Deformationszustandes, infolge seiner Lage im Raume oder infolge irgendwelcher äusserer Umstände wirkenden Kräfte und Spannungen aller möglichen Arten — zunächst als Ganzes ohne Rücksicht auf ihren Ursprung betrachtet — ist gemeinsam, dass sie bei jeder virtuellen Verrückung eine „*virtuelle Arbeit*" δA leisten; diese sehen wir als primär an und bestimmen sie folgendermassen: *δA sei als lineare homogene Funktion der Gesamtheit der Werte der Verrückungskomponenten δx, δy, δz innerhalb des Kontinuums gegeben und sei eine skalare, von der Wahl des Koordinatensystems unab-*

12) Es sind die bekannten kinematischen Methoden der Flächentheorie (vgl. etwa III D 3, Nr. **10**, *R. v. Lilienthal* und *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces), die *E.* und *F. Cosserat* hier zur Anwendung bringen (s. die ausführliche Darstellung in den „corps déform.").

13) In gewissem Sinne sind diese Probleme einfacher als die dreidimensionale Medien betreffenden; in der Tat gehören einzelne von ihnen zu den am frühesten eingehend behandelten Aufgaben der Mechanik der Kontinua (vgl. IV, 6, Nr. **22—24**, *P. Stäckel* und IV 11, Nr. **19**, **20**, *K. Heun*).

14) Vgl. die beiden in 10) zitierten Pariser Noten von *E.* u. *F. Cosserat* und Cap. II, III ihrer „corps déform."

hängige Grösse. Die Koeffizienten, mit denen die Einzelwerte von $\delta x, \ldots$ in δA eingehen, sind die Bestimmungsstücke der einzelnen wirkenden Kraftsysteme; dass sie von den virtuellen Verrückungen selbst unabhängig sind (d. h. die Linearität des δA), bringt die Annahme zum Ausdruck, dass diese Verrückungen ihrer Kleinheit halber die auf jedes Teilchen ausgeübten Kraftwirkungen nicht modifizieren.

Um die sämtlichen Ansätze der Mechanik der Kontinua zu umfassen, ist es nicht notwendig, von dem allgemeinsten Ausdruck der beschriebenen Art für δA auszugehen, der aus einer Summe von linearen Funktionen der Werte von δx, δy, δz und ihren Ableitungen an irgendwelchen einzelnen Stellen des Kontinuums sowie von Linien-, Flächen- und Raumintegralen solcher Ausdrücke bestehen würde. Wir betrachten vielmehr zunächst einen Ausdruck — den wir später noch erweitern werden —, der aus einem über das ganze Gebiet V des Kontinuums erstreckten Raumintegral sowie einem über seine Oberfläche S erstreckten Flächenintegral besteht und dabei in dem ersteren noch eine Linearform der 9 Ableitungen der δx, δy, δz nach x, y, z enthält[15]):

$$\begin{aligned}
\delta A = & \iiint\limits_{(V)} \varrho (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dV && = \delta A_1 \\
(1) \qquad & - \iiint\limits_{(V)} \left(X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \cdots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dV && + \delta A_2 \\
& + \iint\limits_{(S)} (\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)\, dS && + \delta A_3
\end{aligned}$$

Die 15 hier auftretenden und sogleich näher zu diskutierenden Koeffizienten der Verrückungsgrössen sollen nun für jede Deformation des betrachteten Mediums bestimmte *überall endliche und nebst ihren Ableitungen, event. mit Ausnahme einzelner Flächen, stetige Funktionen* von

15) Solche Ansätze für die virtuelle Arbeit sind als naheliegende Verallgemeinerungen der Formeln der Punktmechanik bei vielen speziellen Problemen früh entwickelt worden. Fast selbstverständlich war die Form der Summanden δA_1, δA_3, die ja nur das Summenzeichen der Punktmechanik durch das Integral ersetzen (vgl. etwa *Lagrange,* Méc. an., 1. part., IV, 11); aber auch Terme von der Form δA_2, nur sehr spezialisiert, hat *Lagrange* schon z. B. bei der Behandlung des ausdehnbaren Fadens und der kompressiblen Flüssigkeit benutzt, Terme nämlich, die der Variation der Länge bzw. der Variation der Dichte proportional sind (s. Méc. an, 1. part., V, 42; VIII, 1). Darüber hinaus ist die Ausbildung des allgemeinen Ansatzes (5) jedenfalls durch die Auffassung der virtuellen Arbeit als Variation eines „Potentiales" (s. Nr. 7) angeregt worden, wie sie *C. L. Navier* in die Elastizitätstheorie einführte (s. IV 23, Nr. 5, *Müller-Timpe*).

x, y, z oder a, b, c sein; dann ist der anschauliche Sinn des Ansatzes (1), dass lediglich im allgemeinen stetig über den Raum sowie über einzelne Oberflächen verteilte *Kräfte* und stetig verteilte *Spannungen* berücksichtigt werden.

Zunächst sind nämlich der erste und letzte Summand von δA den bekannten Arbeitsausdrücken der Punktmechanik ganz analog gebaut, nur dass als Faktor die Masse eines Volumelementes $\varrho\, dV$ bzw. das Flächenelement dS auftritt; daher sind X, Y, Z als Komponenten der auf die Masseneinheit des Mediums und $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ als Komponenten der auf die Flächeneinheit der Oberfläche berechneten an der betr. Stelle wirkenden Kraft zu deuten. Da δx, δy, δz Axenprojektionen eines polaren Vektors sind, und da δA als Skalar bei Koordinatentransformationen invariant bleibt, substituieren sich diese Kraftkomponenten bei Änderungen des rechtwinkligen Koordinatensystemes wie δx, δy, δz[16]): *diese Kräfte sind polare Vektoren.*

Eigentlich für die Mechanik der Kontinua charakteristisch ist der Summand δA_2. Die 9 Koeffizienten $X_x, X_y, \ldots, Z_z$ — in der bekannten *Kirchhoff*schen[17]) Bezeichnung —, die die Einwirkung der einzelnen Bestimmungsstücke der virtuellen Deformation auf die Arbeitsleistung messen, wird man als die *Komponenten des Spannungszustandes* (*stress*) an der betr. Stelle deuten, berechnet nach seiner Wirkung auf die Volumeneinheit. Ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die 9 Ableitungen $\frac{\partial\, \delta x}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\, \delta z}{\partial z}$ von Vektorkomponenten sich bei orthogonalen Koordinatentransformationen wie die 9 Produkte aus den Komponenten zweier Vektoren (eine sog. *Dyade*[18]))

$$X_1 \cdot X_2, \quad X_1 \cdot Y_2, \quad \ldots, \quad Z_1 \cdot Z_2$$

16) Vgl. IV 14, Nr. 2, *Abraham.*

17) J. f. Math. 56 (1858) = *G. Kirchhoff,* Ges. Abhandl. (Leipzig 1882), p. 287.

18) Die hiermit angedeutete Definition der Dyade als Komplex von Grössen mit bestimmtem Verhalten gegenüber den rechtwinkligen Koordinatentransformationen („Hauptgruppe" der räumlichen Änderungen), die durchaus im Kreise der *F. Klein*schen Auffassung der Geometrie, Vektoranalysis usw. liegt (vgl. insbesondere Zeitschr. f. Math. Phys. 47 (1902), p. 237 und Math. Ann. 62 (1906), p. 419, die Darstellung in IV 14, *Abraham* sowie *F. Klein,* Elementarmath. v. höh. Standp. aus, Bd. 2, 2. Aufl., Leipzig 1913, p. 90 ff., p. 534) scheint bisher noch nicht zur Grundlage einer selbständigen Darstellung gemacht zu sein. Der Name „dyadics" stammt von *J. W. Gibbs* (s. *Gibbs* und *Wilson,* Vektor Analysis, New York 1901, p. 260 ff.), der sie aus sog. linearen Vektorfunktionen entstehen lässt; von hier aus sind sie auch in die deutsche Litteratur übergegangen (vgl. IV 11, Nr. 1c, *K. Heun*). Fasst man eine Dyade als Matrix von 3 · 3 Elementen auf, so ist der Dyadenkalkul in dem *Cayley*schen Matricenkalkul enthalten (vgl. über diesen I A 4, Nr. **10**[19]), *Study*).

verhalten, während das bilineare Aggregat $X_x \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \cdots$ invariant bleibt; daher müssen sich die Spannungskomponenten selbst wiederum wie Dyadenkomponenten transformieren, so dass man von einer *Spannungsdyade* spricht. Man kann diese, wie jede Dyade, zerspalten in einen (symmetrischen) Bestandteil von 6 Komponenten (ein *Tensortripel*[19]))

(2) $$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ \tfrac{1}{2}(Y_z + Z_y),\ \tfrac{1}{2}(Z_x + X_z),\ \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x)$$

und einen (schiefsymmetrischen) Bestandteil von 3 Komponenten

(2′) $$Z_y - Y_z,\ X_z - Z_x,\ Y_x - X_y,$$

der einen *axialen Vektor* darstellt. Diese Zerlegung entspricht der in Nr. 2 angegebenen Hervorhebung zweier gesonderter Bestandteile (4), (4′) der virtuellen Deformation des Kontinuums, und ist aus ihr direkt zu entnehmen, wenn man den Integranden von δA_2 so zerlegt:

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \end{smallmatrix}\right)} \left\{ X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{1}{2}(Y_z + Z_y)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + (Z_y - Y_z)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right\}.^{20)}$$

Vgl. die Entwicklung in IV 14, Nr. **19**, *Abraham.*)

Insbesondere folgt hieraus, dass die 6 Grössen (2) denjenigen Teil des Spannungszustandes bestimmen, der bei einer unendlichkleinen reinen Formänderung des Kontinuums Arbeit leistet, also die *eigentlichen elastischen Wirkungen*, der Vektor (2′) aber denjenigen, der bei einer virtuellen Drehung der Volumenelemente, auch ohne Formänderung, in Betracht kommt, also die durch den Spannungszustand bedingten *Drehmomente.* Aus dem negativen Vorzeichen in (1) ergibt sich weiter, dass bei positivem X_x positive Arbeit bei negativem $\frac{\partial \delta x}{\partial x}$ geleistet wird, dass also *Druck positiv* gemessen ist.

Um endlich die Bedeutung der Spannungskomponenten als *Flächenkräfte* aus dem Ansatz (1) zu gewinnen[21]), denke man sich den Teil der virtuellen Arbeit berechnet, den die Spannungen innerhalb eines von der geschlossenen Fläche S_1 begrenzten Teilbereiches

---

19) In der Bezeichnung von *W. Voigt*; vgl. darüber IV 14, Nr. **17**, *M. Abraham.*

20) Die Indizes am Summenzeichen und die analogen in der Folge bedeuten, daß die zu summierenden Ausdrucke durch gleichzeitige zyklische Vertauschung von x, y, z und X, Y, Z entstehen.

21) Das Folgende enthält die Überlegungen, die man seit *C. L. Navier* und *G. Green* macht, um aus dem Ansatz des elastischen Potentiales die Grundgleichungen nebst ihrer anschaulichen Bedeutung zu erhalten; man vergleiche das historische Referat in IV 23, Nr. **5** (*Müller-Timpe*) sowie z. B. die Darstellung in *H. v. Helmholtz,* Vorles. über theoret. Phys. II (Leipzig 1902), § 23.

V_1 des Kontinuums leisten, d. i. das über V_1 erstreckte Teilintegral von δA_2; sind die Spannungskomponenten innerhalb V_1 ausnahmslos stetig, so geht dies durch partielle Integration (Anwendung des „Gaussschen Satzes", s. IV 14, p. 12) über in

$$\iiint\limits_{(V_1)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \delta x \cdot dV$$
$$+ \iint\limits_{(S_1)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz) \delta x \cdot dS_1,$$

wo n die nach V_1 hin gewendete Normalenrichtung der Fläche S_1 an der Stelle des Elementes dS_1 bedeutet. Durch Vergleich mit (1) folgt also, dass der Spannungszustand in V_1 die gleiche virtuelle Arbeit leistet, d. h. gerade so wirkt, als ob neben Volumenkräften in V_1 auf das Flächenelement dS_1 von S_1 pro Flächeneinheit berechnet die Kraft

(3) $$X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz, \qquad (X, Y, Z)$$

wirkt. Dieses *Cauchy*sche „Drucktheorem" liefert dann bekanntlich durch Spezialisierung der Richtung von n unmittelbar die Bedeutung der 9 Komponenten (vgl. IV 23, Nr. 3a, *Müller-Timpe*).

3b. Aufstellung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Auf Grund dieser Begriffsbildungen lässt sich das *Prinzip der virtuellen Verrückungen*, das die Statik der diskontinuierlichen mechanischen Systeme beherrscht[22]), unmittelbar auf die Mechanik der Kontinua übertragen: *In einem bestimmten Deformationszustand ist ein kontinuierliches Medium, in dem gewisse Volumen- und Oberflächenkräfte $X, \ldots$ und $\overline{X}, \ldots$ und ein gewisser Spannungszustand $X_x, \ldots$ bestehen, dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die gesamte virtuelle Arbeit dieser Kräfte und Spannungen für jede virtuelle Verrückung, die mit den dem Kontinuum etwa auferlegten Nebenbedingungen verträglich ist, verschwindet:*

(4) $$\iiint\limits_{(V)} \left\{ \varrho \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} X \delta x - \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left(X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + X_z \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) \right\} dV$$
$$+ \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \overline{X} \delta x \cdot dS = 0.$$

Diese Übertragung hat tatsächlich bereits *J. L. Lagrange*[23]) vollzogen, nachdem er das *Bernoulli*sche Prinzip der virtuellen Verrückungen

22) Vgl. IV 1, Nr. 30, *Voss*.

23) Mécan. anal., 1. part., sect. IV. § II, sowie bei einer Reihe spezieller Probleme in sect. V—VIII.

zur Grundlage seiner analytischen Mechanik gemacht hatte; für ihn ist eine selbstverständliche Folge der Gültigkeit dieses Prinzips in der Punktmechanik seine Anwendbarkeit auf die ihm zugänglichen Probleme der Mechanik der Kontinua, wo immer er den Arbeitsausdruck durch einen Grenzübergang von diskontinuierlichen Systemen aus oder durch direkte Intuition aufzustellen vermag. Man hat seither auch auf den weiteren der Behandlung erschlossenen Gebieten der Mechanik der Kontinua das Prinzip der virtuellen Verrückungen zur Geltung gebracht und hat sich dabei häufig, wie *Lagrange*, auf die Vorstellung gestützt, dass man das Kontinuum durch Systeme von endlichvielen Massenpunkten, und gleichzeitig alle physikalischen Vorgänge im Kontinuum durch entsprechende Vorgänge in diesen approximierenden Systemen annähern kann; freilich scheint eine axiomatische Präzisierung dieses Zusammenhanges, die vor allem die zur Umwandlung jener Analogisierungen in strenge Deduktionen notwendigen Stetigkeitsforderungen zu postulieren hätte, bisher nicht gegeben worden zu sein. Man mag es daher inzwischen vorziehen, für die Mechanik der Kontinua das eingangs formulierte Prinzip selbst als *oberstes Axiom* an die Spitze zu stellen (vgl. IV 1, p. 72, *Voss*); man wird diesen Standpunkt um so lieber einnehmen, wenn man die Vorstellung kontinuierlich ausgedehnter Medien für naturgemässer hält als die abstrahierten „Massenpunkte“ der Punktmechanik.[24]) Die Gewissheit der Richtigkeit dieses Axioms liegt einerseits darin begründet, dass ein solcher Ansatz unsern allgemeinen physikalischen Anschauungen und Denkgewohnheiten entspricht, vor allem aber darin, dass er anpassungsfähig genug ist, um die Erfahrungstatsachen hinreichend gut darzustellen.

3 c. Anwendung auf stetig deformierbare Kontinua. Die bekannten formalen Operationen der Variationsrechnung gestatten es in jedem Falle leicht, das Prinzip der virtuellen Verrückungen in eine Anzahl von Gleichungen zwischen den Kräften und Spannungen umzusetzen.[25]) Betrachten wir zunächst nur als typisch das in keiner Weise durch Nebenbedingungen beschränkte *beliebig stetig deformierbare Medium*, so muß die Bedingung (4) für jedes System stetiger Funktionen δx, δy, δz erfüllt sein. Die Umformung von (4) durch

24) Diese Anschauung hat neuerdings besonders *G. Hamel* (Math. Ann. 66 (1908), p. 350 und Jahresb. d. Math.-Ver. 18 (1909), p. 357; vgl. auch sein Lehrbuch „Elementare Mechanik“, Leipzig 1912) vertreten; er giebt dort eine vollständige Axiomatik der Mechanik der Kontinua, die das eine Grundprinzip, wie es hier benutzt ist, in eine Reihe unabhängiger Sätze auflöst.

25) So ist schon *Lagrange* in der Méc. an. bei den dort behandelten Probleme vorgegangen; s. Anm. 23.

partielle Integration ergiebt dann, falls Kräfte, Spannungen und deren partielle Ableitungen überall in V stetig sind, die Gleichungen:

1) an jeder Stelle des Bereiches V

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X = 0 \qquad (X, Y, Z), \tag{5a}$$

2) an jeder Stelle der Oberfläche S mit der *äusseren* Normalenrichtung n

$$X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz = \overline{X} \qquad (X, Y, Z). \tag{5b}$$

Damit sind die sog. „Spannungsgleichungen" nebst den zugehörigen Oberflächenbedingungen gewonnen, die die *notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür geben, dass ein bestimmtes in einer gewissen Lage auf ein frei deformierbares Kontinuum wirkendes Kraft- und Spannungssystem im Gleichgewicht ist.*[26]) Freilich genügen diese Bedingungen keineswegs, um die Spannungs- und Kraftkomponenten zu *bestimmen*: dazu müssen noch die erst später zu behandelnden Relationen hinzutreten, die die Abhängigkeit der Kräfte und Spannungen von der wirklich stattfindenden Deformation des Kontinuums oder von irgendwelchen äusseren Ursachen zum Ausdruck bringen (vgl. IV 6, Nr. **26**, *Stäckel* und IV 23, Nr. **3**b, *Müller-Timpe*).

In (4), (5) sind die unabhängigen Variablen Koordinaten im *deformierten* Zustand des Kontinuums, und auch Kraft- und Spannungskomponenten finden ihre anschauliche Bedeutung als Wirkungen auf Massen- bzw. Flächeneinheiten des Mediums im *deformierten* Zustand. Demgegenüber verwendet man seit *S. D. Poisson*[27]) vielfach auch die a, b, c, aufgefasst als Koordinaten in der Ausgangslage des Mediums als unabhängige Variable; das führt zwar auf Kraftkomponenten von weniger unmittelbarer physikalischer Bedeutung, ist aber analytisch für viele Zwecke bequemer. Es wird nämlich, wenn

$$k \cdot dS_0 = dS \tag{6}$$

26) Die Gleichungen gehen auf *A. L. Cauchy* zurück, Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres 7, sér. II, p. 141. Vgl. die weiteren Angaben hierüber in IV 23, Nr. **3**b, *Müller-Timpe*.

27) Paris Mém. de l'Acad. 8 (1829), p. 387; J. éc. polyt. 20 (1831), p. 54. Dieser Unterschied ist vielfach übersehen worden, da er bei der Betrachtung unendlichkleiner Deformationen von einem spannungslosen Ruhezustande aus tatsächlich verschwindet; so ist er erst in der Entwicklung der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen recht zur Geltung gekommen (vgl. unten Nr. **7** und **9**).

gesetzt und Nr. 2, (7) berücksichtigt wird:

$$(7)\quad \delta A = \iiint\limits_{(V_0)} \Big[\varrho_0 \sum_{(xyz)} X\delta x - \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \Big(X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + X_b \frac{\partial \delta x}{\partial b} + X_c \frac{\partial \delta x}{\partial c}\Big)\Big] dV_0 + \iint\limits_{(S_0)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \overline{X} k \delta x \cdot dS_0,$$

wobei

$$(8)\quad \Delta \cdot X_x = X_a \frac{\partial x}{\partial a} + X_b \frac{\partial x}{\partial b} + X_c \frac{\partial x}{\partial c} \qquad (X, Y, Z;\ x, y, z).$$

Daher sind, wie durch Auflösung und Vergleich mit (3) folgt, X_a, Y_a, Z_a die Komponenten der Flächenkraft, die auf ein Element der Fläche $a =$ const. vermöge des Spannungszustandes in der nach der Seite wachsender a hin gelegenen Materie wirkt, berechnet auf die Einheit der Fläche in der Ausgangslage im a-b-c-Raum.[28]) Aus (7) entsteht eine *neue Form der Gleichgewichtsbedingungen*[28]) genau so wie (5a), (5b) aus (4) entstehen:

$$(9\text{a})\quad \frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} + \varrho_0 X = 0 \quad \text{innerhalb } V_0 \qquad (X, Y, Z),$$

$$(9\text{b})\quad X_a \cos n_0 a + X_b \cdot \cos n_0 b + X_c \cos n_0 c = k\overline{X} \quad \text{auf } S_0 \quad (X, Y, Z);$$

hierbei bedeutet n_0 die äussere Normalenrichtung des Flächenelementes dS_0 im a-b-c-Raum.

3d. Beziehungen zur Mechanik starrer Körper. Man kann die Gleichgewichtsbedingungen (5) noch in etwas anderer Weise aus dem Prinzip (4) herleiten und erhält dadurch den Zusammenhang mit dem nach dem Vorgange von *A. L. Cauchy*[29]) vielfach zu ihrer direkten Aufstellung benutzten *„Erstarrungsprinzip“*, dass jeder aus dem deformierten Kontinuum herausgeschnittene Teil unter der Einwirkung der in seinem Inneren angreifenden Volumkräfte und der an seiner Oberfläche angreifenden Kräfte (3) wie ein starrer Körper im Gleichgewicht sein muss. Zu diesem Ende braucht man nur gewisse *unstetige* Verrückungen zu betrachten, die freilich den Zusammenhang des stetig deformierbaren Kontinuums verletzen und für die δA daher zunächst

28) Vgl. IV 23, Nr. 6 (*Müller-Timpe*) und etwa die ausführliche Darstellung (die freilich Symmetrie der Spannungsdyade voraussetzt) bei *E.* und *F. Cosserat*, Ann. de Toulouse, X (1896), p. 146; die Schreibweise X_a, X_b, ... erscheint konsequenter als die dort gebrauchte A_x, B_x, ..., da sie grosse Buchstaben für die Bezeichnung der Komponenten, die Indizes aber für die Charakterisiernng des betrachteten Flächenelements beibehält.

29) Bull. soc. philomath. 1823, p. 9 und Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres, sér. II, t. 7, p. 141; vgl. die Angaben in IV 6, Nr. 26, *Stäckel* und IV 23, Nr. 3b, *Müller-Timpe*.

nicht zu verschwinden braucht; man kommt aber zum Ziele, wenn man sie durch eine Schar *stetiger* virtueller Verrückungen approximiert.

So werde eine Verrückung, die in einem Teilgebiet V_1 von V mit der Grenzfläche S_1 konstante Werte $\delta x = \alpha$, $\delta y = \beta$, $\delta z = \gamma$ hat, außerhalb V_1 aber 0 ist (d. i. eine *Translation* des Bereiches V_1), durch stetige virtuelle Verrückungen angenähert, indem V_1 mit einem beliebig kleinen Gebiete V_2 umgeben wird, innerhalb dessen δx, δy, δz von α, β, γ nach 0 stetig abfallen. Für eine solche virtuelle Verrückung folgt aus (4):

$$\iiint\limits_{(V_1)} \varrho(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\,dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} (X_n\alpha + Y_n\beta + Z_n\gamma)\,dS_1$$
$$+ \iiint\limits_{(V_2)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left(\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \delta x \cdot dV_2 = 0,$$

wo n die von V_1 fortzeigende Normale von dS_1 ist. Lässt man nun V_2 immer kleiner werden, so wird das zweite Integral beliebig klein, da die X, X_x, ... und ihre Ableitungen endlich bleiben, und es ergeben sich, da α, β, γ beliebig ist, drei Gleichungen

$$(10) \qquad \iiint\limits_{(V_1)} \varrho X\,dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} X_n\,dS = 0 \qquad (X, Y, Z).$$

Das sind genau die Gleichungen, die durch Anwendung des sog. *Schwerpunktsatzes* auf den im oben geschilderten Sinne starr gedachten und aus dem Kontinuum herausgeschnittenen Teil V_1 entstehen. Wegen der Willkür des Bereiches V_1 kann man dann bekanntlich aus (10) die Gleichungen (5a) gewinnen (vgl. IV 23, *Müller-Timpe*, p. 23).

Geht man in ähnlicher Weise von einer starren *Drehung* eines Teilbereiches V_1 mit den Komponenten $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$ aus, so folgen drei Gleichungen:

$$(11) \iiint\limits_{(V_1)} \{\varrho(Zy - Yz) + Y_z - Z_y\}\,dV_1 + \iint\limits_{(S_1)} (Z_n y - Y_n z)\,dS_1 = 0 \quad (X, Y, Z).$$

Das stimmt nur dann mit dem auf V_1 als starren Körper angewandten *Flächensatz* überein, wenn man den Momenten der räumlich verteilten Kräfte X, Y, Z und der Flächenkräfte X_n, Y_n, Z_n noch ein direkt am Volumelement angreifendes Drehmoment entgegengesetzt gleich dem Vektorbestandteil (2') der Spannungsdyade hinzurechnet. Postuliert man also den Flächensatz in der üblichen Form, dass die Summe der Momente der Volumen- und Flächenkräfte verschwindet, so folgt daraus unmittelbar die Symmetrie der Spannungsdyade.[30])

30) Diese Forderung hat *G. Hamel*[24]) als *„Boltzmannsches Axiom“* unter seine Axiome der Mechanik der Volumenelemente aufgenommen.

In nahem Zusammenhange mit diesen Tatsachen steht eine andere Auffassung des Prinzipes der virtuellen Verrückungen, die von vornherein nur die eigentlichen *Kräfte*, die Massenkräfte X, Y, Z und die Flächenkräfte $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, als gegeben betrachtet; es ist die folgende leichte Fortbildung der Formulierung von *G. Piola*[31]): *Für das Gleichgewicht ist notwendig, dass die virtuelle Arbeit der angeführten Kräfte*

$$\iiint\limits_{(V)}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dV + \iint\limits_{(S)}(\overline{X}\delta x + \overline{Y}\delta y + \overline{Z}\delta z)\,dS$$

verschwindet für alle rein translatorischen virtuellen Verrückungen des ganzen Bereiches V. Drückt man diese Nebenbedingung für die Verrückungen, nämlich durch die 9 partiellen Differentialgleichungen aus:

$$\frac{\partial\delta x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\delta x}{\partial y} = 0, \ldots, \frac{\partial\delta z}{\partial z} = 0,$$

so kann man nach dem bekannten Kalkül der Variationsrechnung 9 zugehörige Lagrangesche Faktoren $-X_x$, $-X_y$, ..., $-Z_z$ einführen und erhält dann genau die Gleichung (4) des alten Prinzips, wobei sich also die *Komponenten der Spannungsdyade als Lagrangesche Faktoren gewisser Starrheitsbedingungen* erweisen. Sie werden natürlich durch dieses Variationsprinzip nicht bestimmt, spielen vielmehr genau die gleiche Rolle wie die inneren Spannungen in den statisch unbestimmten Problemen der Mechanik starrer Körper.[32])

Stellt man die gleiche Forderung für *alle* starren Bewegungen von V überhaupt (statt nur für die Translationen), so erhält man genau den in IV 23, p. 23 wiedergegebenen *Piola*schen Ansatz, der gemäss den 6 Nebenbedingungen nur 6 Lagrangesche Faktoren und damit eine symmetrische Spannungsdyade, liefert.

3e. Zwei- und eindimensionale Kontinua im dreidimensionalen Raume. Alle diese Ansätze lassen sich unmittelbar auch für die am Ende von Nr. **2** berührten zwei- und eindimensionalen Kontinua, die im dreidimensionalen Raume gelegen sind, aufstellen.[33]) Die einzige Modifikation ist, dass sich die Dimension der Integrationsgebiete ändert, und dass statt der Ableitungen der virtuellen Verrückungen nach den drei Raumkoordinaten diejenigen nach den zwei bzw. der einen Koordinate innerhalb des deformierten Mediums eingehen.

---

31) Modena Mem. 24, parte 1 (1848), p. 1; vgl. IV 23, Nr. **3**b, *Müller-Timpe.*

32) Vgl. auch IV 6, Nr. **26** (*Stäckel*), p. 550 und IV 23, Nr. **3**b (*Müller-Timpe*), p. 24.

33) Für eine Reihe besonderer Probleme finden sich auch diese Ansätze schon in *Lagrange,* Mécan. anal.; s. 1. part, sect IV, Nr. 25ff.; sect. V, chap. III.

Betrachten wir im einzelnen zunächst ein *zweidimensionales Kontinuum*, das im deformierten Zustande ein einfach zusammenhängendes Flächenstück S mit der Randkurve C bildet; auf S sei ein — der Einfachheit halber — *orthogonales* Parametersystem u, v festgelegt, Längen- und Flächenelement sei durch

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \quad dS = h\,du\,dv, \quad h = \sqrt{EG}$$

gegeben, und es bezeichne ϱ die Flächendichte der Massenbelegung. Dann betrachten wir die virtuelle Arbeit:

$$(12)\quad \delta A = \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left\{ \varrho X \delta x - \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \frac{\partial \delta x}{\partial u} + \frac{X_v}{\sqrt{G}} \frac{\partial \delta x}{\partial v} \right) \right\} dS + \int\limits_{(C)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \overline{X}\, \delta x\, ds.$$

Hier bedeuten $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ die Komponenten der an der Masseneinheit innerhalb S bzw. an der Längeneinheit auf C angreifenden Kraft, über die Grössen $X_u, \ldots$ aber lassen sich ganz analoge Aussagen entwickeln, wie oben über $X_x, \ldots$; sie bewirken einerseits gewisse an den auf S gelegenen Massen angreifende Kräfte, andererseits einen innerhalb S herrschenden Spannungszustand derart, dass auf jedes in S gelegene Linienelement vermöge des Spannungszustandes auf einer Seite pro Längeneinheit eine Kraft

$$(13)\qquad X_\nu = X_u \cos(\nu, u) + X_v \cos(\nu, v)$$

wirkt; hierin bedeutet n die innerhalb S gelegene nach der betrachteten Seite hin weisende Normalenrichtung des Elementes.

Für ein Medium, das alle stetigen Verrückungen zulässt, kann man die Bedingung $\delta A = 0$ des Prinzips der virtuellen Verrückungen in 6 Gleichgewichtsbedingungen[34]) auflösen, indem man δA durch die bekannten Methoden der partiellen Integration umformt:

$$(14\text{a})\quad \frac{1}{h}\left(\frac{\partial \sqrt{G}\, X_u}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{E}\, X_v}{\partial v} \right) + \varrho X = 0 \quad \text{auf } S \qquad (X, Y, Z),$$

$$(14\text{b})\quad X_u \cos \nu u + X_v \cos \nu v = \overline{X} \quad \text{auf } C \qquad (X, Y, Z);$$

hier bedeutet ν diejenige Richtung, die innerhalb der Fläche S normal auf C steht und von dem betrachteten Flächenstück abgewandt ist. — Auch diese Gleichungen kann man leicht auf die Anfangsparameter a, b transformieren, wenn man von dem transformierten Aus-

34) Die allgemeine Form dieser Gleichungen unter den verschiedensten Auffassungen geben *E.* und *F. Cosserat,* Corps déform., chap. III, übrigens sogleich für den Fall orientierter Teilchen (s. Nr. **4** b; vgl. auch IV 11, Nr. **20**, *K. Heun*). Über die seit *Lagranges* Ansätzen[33]) behandelten speziellen Probleme vgl. ausserdem IV 6, Nr. **24**, *Stäckel.*

druck der virtuellen Arbeit

$$(15)\quad \delta A = \iint\limits_{(S_0)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left\{ \varrho_0 X - \left(X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} + X_b \frac{\partial \delta x}{\partial b} \right) \right\} da\, db + \int\limits_{(C_0)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \overline{X} \delta x \frac{ds}{ds_0} ds_0$$

ausgeht, wobei

$$(16)\qquad h \frac{\partial (u, v)}{\partial (a, b)} X_u = X_a \frac{\partial u}{\partial a} + X_b \frac{\partial u}{\partial b} \qquad (X, Y, Z;\ u, v);$$

durch Vergleich mit (13) ergiebt sich, dass $X_a, \ldots$ die vermöge des Spannungszustandes auf Linienelemente $a = \text{const}$, $b = \text{const}$ wirkenden Kräfte bedeuten, berechnet auf Längeneinheiten in der a-b-Ebene.

Ganz analog gestaltet sich alles bei *eindimensionalen Kontinuis.*[35]) Ist s $(0 \leqq s \leqq l)$ die Bogenlänge auf der in deformierter Gestalt gebildeten Kurve, so hat man

$$(17)\qquad \delta A = \int\limits_0^l \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left\{ \varrho X \delta x - X_s \frac{\partial \delta x}{\partial s} \right\} ds + \Big[\sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \overline{X} \delta x \Big]_{s=0}^{s=l},$$

wo die Bedeutung der einzelnen Größen sich ganz wie soeben ergiebt, und bei willkürlichen stetigen Variationen lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$(18\text{a})\qquad \frac{d X_s}{ds} + \varrho X = 0 \quad \text{für} \quad 0 < s < l \qquad (X, Y, Z)$$

$$(18\text{b})\qquad X_s = \overline{X} \quad \text{für} \quad s = 0,\ s = l \qquad (X, Y, Z).$$

Auch hier ist es mitunter zweckmässig, unter Benutzung der Formel

$$(19)\quad \delta A = \int\limits_0^{l_0} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left\{ \varrho_0 X \delta x - X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} \right\} da + \Big[\sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \overline{X} \delta x \Big]_{a=0}^{a=l_0}, \qquad X_s \frac{ds}{da} = X_a$$

den Anfangsparameter a als Unabhängige einzuführen.

4. Erweiterungen des Prinzipes der virtuellen Verrückungen.

4 a. Auftreten höherer Ableitungen der Verrückungen. Man kann an dem in Nr. 3 formulierten Ansatz des Prinzipes der virtuellen Verrückungen noch eine Reihe von Erweiterungen anbringen, die es erst in weitestem Masse befähigen, alle in der Mechanik der Kontinua auftretenden Gesetze zu umfassen. Am nächsten liegt es, in die virtuelle Arbeit pro Volumenelement eine Linearform der 18 *zweiten Ableitungen* der virtuellen Verrückungen $\frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2}, \ldots$ aufzunehmen. In der Tat haben Probleme, bei denen es sich als nötig erwies, die

35) Vgl. *E.* und *F. Cosserat,* Corps déformables, chap. II sowie IV 11, Nr. **19** (*K. Heun*) und IV 6, Nr. **23** (*P. Stäckel*).

Energiefunktionen von den *zweiten* Ableitungen der Deformationsfunktionen abhängen zu lassen, auf hierhin gehörende Ausdrücke geführt; in erster Linie kommt dies für die ein- und zweidimensionalen Kontinua (Drähte und Platten) in Betracht.[36])

Eine eingehende Behandlung dieses Ansatzes vom allgemeinen Standpunkte aus scheint nicht vorzuliegen, und sie erübrigt sich durch die Bemerkung, dass man durch partielle Integration die neuen Zusatzglieder des Volumenintegrals auf Glieder zurückführen kann, die lediglich die *ersten* Ableitungen der δx, δy, δz enthalten; die neuen Wirkungen im Innern des Körpers ordnen sich also dem alten Begriff der Spannungsdyade ein. Freilich tritt dabei ein *Oberflächenintegral* von der Gestalt

$$(1) \qquad \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \left(\overline{X}_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \overline{X}_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \overline{X}_z \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) dS$$

neu hinzu, das einmal das Vorhandensein einer *Oberflächenspannung* beweist, wie sie in Nr. **3** e bei einem selbständig existierenden zweidimensionalen Kontinuum betrachtet wurde, darüber hinaus aber im allgemeinen noch in (12) von Nr. **3** e nicht enthaltene Terme besitzt, die von den Ableitungen der $\delta x, \ldots$ *normal* zur Fläche abhängen. Diese neuen an der Oberfläche angreifenden Spannungswirkungen scheinen noch keine Anwendung gefunden zu haben, während jene anderen Glieder lediglich zu den alten Randbedingungen (5b) von Nr. **3** einen Beitrag von der Form der in (14a) auftretenden Glieder liefern und allenfalls an Grenzlinien oder Unstetigkeitslinien der Oberfläche noch Linienkräfte vom Typus (14b) ergeben.[37])

4 b. Medien mit orientierten Teilchen. Dehnen wir ferner unsere Betrachtungen auf die in Nr. **2** b definierten Medien mit orientierten Teilchen aus, so muss die neue Annahme in Kraft treten, *dass auch bei jeder virtuellen Rotation des Kontinuums eine virtuelle Arbeit geleistet wird, die eine lineare homogene Funktion der Gesamtheit der Werte der Rotationskomponenten $\delta\pi$, $\delta\varkappa$, $\delta\varrho$ ist,* und für die wir den Nr. **3**, (1) analogen Ansatz machen:

$$(2) \iiint\limits_{(V)} \varrho (L\delta\pi + M\delta\varkappa + N\delta\varrho)\, dV + \iint\limits_{(S)} (\overline{L}\delta\pi + \overline{M}\delta\varkappa + \overline{N}\delta\varrho)\, dS$$
$$- \iiint\limits_{(V)} \left(L_x \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} + L_y \frac{\partial \delta\pi}{\partial y} + \cdots + N_z \frac{\partial \delta\varrho}{\partial z} \right) dV.$$

---

36) Vgl. die Erörterungen der Potentialansätze in Nr. **7** a, p. 645 sowie auch Nr. **8** a, p. 660.

37) Vgl. unten Nr. **12**.

Hieran kann man völlig analoge Erörterungen wie in Nr. **3**a schliessen, wobei man als selbstverständlich wieder die Voraussetzung der Endlichkeit und Stetigkeit der 15 neu auftretenden Koeffizienten übernimmt. Zunächst stellen L, M, N bzw. $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ die Komponenten je eines *axialen Vektors* dar, der als das auf eine Stelle innerhalb des Körpers (pro Masseneinheit) bzw. auf eine Stelle der Oberfläche (pro Flächeneinheit berechnete) *Drehmoment* aufzufassen ist; denn in der Tat haben wir hier eine Kraftwirkung von genau der in der Mechanik starrer Körper so bezeichneten Art. Die 9 Grössen $L_x, \ldots, N_z$ weiterhin verhalten sich bei Koordinatentransformationen wie die Komponenten einer Dyade mit der Modifikation, dass sie bei Spiegelungen das Vorzeichen wechseln[38]); ihre Bedeutung kann man darin finden, dass

$$(3) \qquad L_n = L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz \qquad (L, M, Z)$$

die Komponenten des Drehmoments darstellt, das auf ein Flächenelement durch die auf der Seite der positiven Normalenrichtung n gelegene Materie ausgeübt wird, berechnet auf die Flächeneinheit.

Wir übernehmen nun das Prinzip der virtuellen Verrückungen für das neue Kontinuum in der erweiterten Form, *dass in der durch die 6 Funktionen* Nr. **2**, (1) *und* (9) *beschriebenen Gleichgewichtslage die durch* (2) *ergänzte virtuelle Arbeit für jedes zulässige System virtueller Verrückungen verschwinden soll.* Für das völlig frei stetig deformierbare Kontinuum, für das auch die Axenkreuze unabhängig voneinander und von der Grösse der Verrückungen drehbar sind, sind dann $\delta x, \ldots, \delta \pi, \ldots$ 6 völlig willkürliche stetige Funktionen, und durch Wiederholung der Überlegungen von Nr. **3**c findet man, dass die dort aufgestellten Bedingungen (5) ungeändert bleiben und nur durch folgende zuerst von *W. Voigt*[39]) aufgestellten und neuerdings in dem *Cosserat*schen Werke[40]) ausführlich betrachteten 2 Gleichungs-

---

38) Für Tensorkomponenten (d. h. bei einer symmetrischen Dyade) hat *W. Voigt* (vgl. Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, p. 132ff.) das entsprechende Verhalten durch das Beiwort *axial* ausgedrückt, gegenüber *polaren* Tensoren, deren Komponenten bei Inversion ihr Vorzeichen nicht wechseln. Man vergleiche über diese Klassifikation auch die in 18) zitierte Litteratur.

39) Gött. Abhandl. 34 (1887), p. 11, wo *Voigt* an die Poissonschen Vorstellungen[9]) anschliesst. Vgl. auch das Referat in *Voigts* Vortrag auf dem internat. Physiker-Kongress in Paris 1900 (Rapp. prés. au congr. T. I, p. 277 = Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1900, p. 117) und die von direkter Bezugnahme auf Molekularvorstellungen freie Darstellung in *Voigts* Kompendium I, p. 219ff.

40) *E.* u. *F. Cosserat,* Corps déform., chap. IV, inbes. p. 137. Vgl. auch IV 11, Nr. **21**, *K. Heun.*

tripel zu ergänzen sind[41]):

$$\text{(4a)}\qquad \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} + \varrho L = 0 \quad \text{in } V \qquad (L, M, N),$$

$$\text{(4b)}\quad L_x \cos nx + L_y \cos ny + L_z \cos nz = \bar{L} \quad \text{auf } S \qquad (L, M, N).$$

Auch diese Gleichungen kann man wieder auf die Anfangsparameter a, b, c transformieren, indem man die virtuelle Arbeit der inneren Flächenmomente auf die Form

$$\text{(2')}\qquad -\iiint\limits_{(V_0)} \Big(\sum_{\binom{\pi\varkappa\varrho}{LMN}} L_a \frac{\partial \delta \pi}{\partial a} + L_b \frac{\partial \delta \pi}{\partial b} + L_c \frac{\partial \delta \pi}{\partial c} \Big) d V_0$$

transformiert, wo

$$\text{(5)}\qquad \Delta \cdot L_x = L_a \frac{\partial x}{\partial a} + L_b \frac{\partial x}{\partial b} + L_c \frac{\partial x}{\partial c} \qquad (L, M, N;\ x, y, z),$$

und wo L_a, M_a, N_a das auf ein Element der Fläche $a = \text{const}$ wirkende, auf die Flächeneinheit im undeformierten Zustande berechnete Drehmoment bedeuten. An die Stelle von (4) treten dann neben Nr. **3**, (9) die Gleichungstripel[42]):

$$\text{(6a)}\qquad \frac{\partial L_a}{\partial a} + \frac{\partial L_b}{\partial b} + \frac{\partial L_c}{\partial c} + \varrho_0 L = 0 \quad \text{in } V \qquad (L, M, N),$$

$$\text{(6b)}\quad L_a \cos n_0 a + L_b \cos n_0 b + L_c \cos n_0 c = k\bar{L} \quad \text{auf } S \qquad (L, M, N).$$

Auch hier kann man wieder den Zusammenhang mit den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper erhalten, indem man einmal von einer Translation, dann von einer Rotation eines aus V herausgeschnittenen und starr gedachten Teilbereiches V_1 ausgeht, innerhalb dessen man sich nun auch die Axenkreuze starr mit dem Kontinuum verbunden, also parallel mit sich fortgeführt bzw. starr mitgedreht denkt; approximiert man diese unstetige Verrückung genau wie in Nr. 3d durch stetige virtuelle Verrückungen, so findet man einmal ungeändert die Gleichungen Nr. **3** (10) des Schwerpunktssatzes wieder, dann aber an Stelle der Formeln (11) drei Gleichungen

$$\text{(7)}\quad \iiint\limits_{(V_1)} \{ \varrho(Zy - Yz + L) + Y_z - Z_y \} d V_1 + \iint\limits_{(S_1)} \{ Z_n y - Y_n z + L_n \} d S_1 = 0 \qquad \binom{L, M, N}{X, Y, Z},$$

41) Diese Gleichungen sind, abgesehen von der Festsetzung der Vorzeichen, noch insofern von denen von *Voigt* und *Cosserat* verschieden, als dort das gesamte auf ein Teilchen wirkende Drehmoment $\varrho L + Y_z - Z_y, \ldots$ mit einem Buchstaben bezeichnet ist.

42) In etwas verschiedener Bezeichnung bei *E.* u. *F. Cosserat,* Corps déformables, p. 132.

die den Flächensatz unter den jetzt stattfindenden Umständen ausdrücken. Aus diesen 6 Integralbedingungen, die für *jeden* Teilbereich V_1 gelten sollen, kann man wieder die Gleichgewichtsgleichungen (4) herleiten.[43])

Sind die Dreikante nicht mehr frei beweglich, so modifizieren sich die Gleichgewichtsbedingungen (4) und Nr. **3**, (5), da man dann die beiden Summanden (2) und Nr. **3**, (1) der virtuellen Arbeit nicht mehr gesondert behandeln darf. Es sei hier nur auf den Fall hingewiesen, dass die Axen des Dreikants fest mit dem Medium ververbunden sind; dann wird eine jede virtuelle Verrückung eine Verdrehung der Dreikante mit den Grössen Nr. **2**, (4′) als Komponenten zur Folge haben, und daher werden insbesondere neue Glieder zu den Komponenten der Spannungsdyade additiv hinzutreten. Man hat das benutzt, um auch unter Verwendung einer symmetrischen Spannungsdyade ($X_y = Y_x, \ldots$) das Auftreten von Drehmomenten zu deuten.[44])

Bei *zwei- und eindimensionalen Medien* mit orientierten Teilchen (s. Nr. **2** c) ergiebt sich ganz analog, dass bei Verwendung der früheren Bezeichnungen zu der virtuellen Arbeit für die Fläche (Nr. **3** e, (12)) der Summand

$$(8)\quad \iint\limits_{(S)} \sum_{\binom{\pi\varkappa\varrho}{LNM}} \left\{\varrho L \delta\pi - \left(\frac{L_u}{\sqrt{E}}\frac{\partial\delta\pi}{\partial u} + \frac{L_v}{\sqrt{G}}\frac{\partial\delta\pi}{\partial v}\right)\right\} dS + \int\limits_{(C)} \sum_{\binom{\pi\varkappa\varrho}{LMN}} \bar{L}\delta\pi\, ds,$$

für die Kurve (Nr. **3** e, (17)) ein entsprechender

$$(9)\qquad \int_0^l \sum_{\binom{\pi\varkappa\varrho}{LMN}} \left\{\varrho L\delta\pi - L_s\frac{\partial\delta\pi}{\partial s}\right\} ds + \Big[\sum_{\binom{\pi\varkappa\varrho}{LMN}} \bar{L}\delta\pi\Big]_0^l$$

hinzutritt; demgemäss erhält man im ersten Falle neben Nr. **3** e, (14)) noch die Gleichgewichtsbedingungen[45])

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{h}\left(\frac{\partial\sqrt{G}L_u}{\partial u} + \frac{\partial\sqrt{E}L_v}{\partial v}\right) + \varrho L = 0 \quad \text{auf } S \\ &L_u \cos\nu u + L_v \cos\nu v = \bar{L} \quad \text{auf } C \end{aligned} \qquad (L, M, N),$$

43) So geht *Voigt,* Kompendium I, p. 219 vor.

44) Siehe etwa *J. Larmor,* London math. Soc. Proc. 23 (1892), p. 127, *Combébiac,* Bull. soc. de math. 30 (1902), p. 108, 242.

45) Vgl. *F.* und *E. Cosserat,* Corps déform., chap. III, sowie IV 11, Nr. **20** (*K. Heun*).

im zweiten Falle neben Nr. 3e, (18)) noch diejenigen[46])

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\frac{dL_s}{ds}+\varrho L=0 \quad \text{für } 0<s<l \\ &L_s=\bar{L} \qquad\qquad \text{für } s=0,\ s=l \end{aligned} \qquad (L, M, N).$$

Auch die Deutung der $L_u, \ldots$ als spezifische Drehmomente bezogen auf den deformierten Zustand ergiebt sich analog zu Nr. 3e; sie hängen mit den entsprechenden auf den undeformierten Zustand bezogenen Grössen zusammen durch Gleichungen vom Typus

$$(12)\qquad h\frac{\partial(u,v)}{\partial(a,b)}L_u=L_a\frac{\partial u}{\partial a}+L_b\frac{\partial u}{\partial b} \quad \text{bzw.} \quad L_s\frac{ds}{da}=L_a.$$

4c. Auftreten von Nebenbedingungen. Bisher wurde das Prinzip der virtuellen Verrückungen vorzugsweise auf solche Fälle angewandt, in denen das Kontinuum in jeder möglichen Weise stetig deformierbar war. In der Formulierung des Prinzipes sind aber unmittelbar auch solche Kontinua umfasst, deren *Beweglichkeit durch Bedingungen irgendwelcher Art beschränkt* ist, und tatsächlich betreffen gerade einige der ersten Probleme der Mechanik der Kontinua, die *Lagrange*[47]) behandelt hat, solche Fälle. Diese Bedingungen drücken sich in erster Linie durch *Gleichungen* für die die Deformation beschreibenden Funktionen (1), (9) von Nr. 2 aus, in welche übrigens neben den Funktionen selbst auch ihre Ableitungen nach a, b, c eingehen können; typisch ist eine Gleichung

$$(13)\qquad \omega(a,b,c;\,x,y,z;\,x_a,\ldots,z_c;\,\lambda,\mu,\nu;\,\lambda_a,\ldots,\nu_c)=0, \quad \text{wo } x_a=\frac{\partial x}{\partial a},\ldots$$

für *jeden* Punkt des Bereiches V_0, doch kann man ähnliche Gleichungen auch nur für Teilbereiche, Grenzflächen oder dgl. aussprechen. In jedem Falle werden dadurch die möglichen Deformationen bzw. die möglichen Verdrehungen der adjungierten Dreikante eingeschränkt, oder es werden auch bestimmte Beziehungen zwischen Verdrehung des Dreikants und Deformation gefordert (z. B. eine bestimmte Orientierung der Dreikante gegen den Raum oder gegen das Medium; vgl. oben S. 626); das Auftreten von a, b, c in (13) besagt, dass die Art der Bedingung von Teilchen zu Teilchen wechseln kann. Setzt man nun in (13) die variierte Deformation Nr. 2, (3) bzw. (10) ein, so

46) Vgl. *F.* und *E. Cosserat*, Corps déform., chap. II, sowie IV 11, Nr. 19 (*K. Heun*).

47) Mécan. anal., 1. Part., Sect. V, Chap. III (unausdehnbarer Faden u. dgl.), Sect. VIII (inkompressible Flüssigkeit).

ergiebt sich durch Differentiation nach σ

$$(14)\quad \delta\omega \equiv \sum_{(x\,y\,z)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\omega}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\omega}{\partial x_b}\delta x_b + \frac{\partial\omega}{\partial x_c}\delta x_c\right) + \sum_{(\lambda\,\mu\,\nu)}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_a}\delta\lambda_a + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_b}\delta\lambda_b + \frac{\partial\omega}{\partial\lambda_c}\delta\lambda_c\right) = 0,$$

und da nach Nr. 2, S. 608 die $\delta x_a, \ldots$ mit den Ableitungen der $\delta x, \ldots$ übereinstimmen, liegt hier eine *lineare homogene Bedingung für die virtuellen Verrückungen* vor.

Das *Prinzip der virtuellen Verrückungen* fordert dann, *dass* δA *für alle* (14) *genügenden Funktionen* $\delta x, \ldots$ *verschwindet*, und das kann man, wenn die Gleichungen (14) nicht zufällig die Elimination einer der Verrückungskomponenten gestatten, durch Einführung eines Lagrangeschen Faktors[48]) λ in die Form

$$(15)\qquad \delta A + \iiint_{(V)} \lambda\,\delta\omega\, dV = 0 \quad \text{für alle} \quad \delta x, \ldots$$

umsetzen, die genau der des ursprünglichen Prinzipes entspricht; an Stelle des Raumintegrales treten event., wenn (13) nur längs einzelner Flächen oder Kurven bestehen soll, oder das Kontinuum überhaupt nur eine Fläche oder Kurve erfüllt, Flächen- oder Kurvenintegrale. Über die Bedeutung des Faktors λ als „Druck" wird später (Nr. 8b, S. 662) noch zu sprechen sein.

Endlich ist noch der Möglichkeit zu gedenken, die gleichfalls aus der Mechanik diskreter Systeme wohlbekannt ist, dass *„einseitige" Nebenbedingungen* auftreten, die die Form von *Ungleichungen* haben — sei es z. B., dass die Grenzfläche des Kontinuums in ihrer Beweglichkeit nur nach einer Seite hin eingeschränkt ist, sei es dass die Deformationsgrössen im Inneren gewissen Ungleichungen unterliegen (man denke etwa an Körper, die keine Kompression über eine gewisse Grenze hinaus gestatten, oder ähnliche Festsetzungen). Dann wird auch hier das Gleichgewicht gegeben durch die *Fourier*sche Formulierung[49]) des Prinzips der virtuellen Verrückungen, dass nämlich für jedes den Nebenbedingungen genügende System von virtuellen Verrückungen die virtuelle Arbeit negativ oder Null ist:

$$\delta A \leqq 0.$$

48) Die Behandlung mehrdimensionaler Variationsprobleme mit dieser Methode wurde von *Lagrange* an den in 47) genannten Problemen das erste Mal entwickelt; vgl. II A 8, p. 622, *Kneser.*

49) Vgl. IV 1, Nr. 34, *Voss*; die Formulierung bei *Gauss* (Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Gott. Comment. rec. 7 (1830) = Werke 5, p. 35, deutsch von *R. H. Weber* in Ostwald's Klassiker der exakten Wiss. Nr. 135, Leipzig 1903) berücksichtigt von vornherein die Ausdehnung auf Kontinua.

II. Die Grundansätze der Kinetik.

5a. Die Bewegungsgleichungen des Kontinuums. Aufgabe der Kinetik ist festzustellen, welche Bewegung in dem bisher betrachteten Kontinuum eintritt, wenn irgendwie in der Zeit gegebene Kraftwirkungen in ihm stattfinden, oder umgekehrt, welche Wirkungen zur Aufrechterhaltung einer bestimmten Bewegung notwendig sind. Dabei sind die Wirkungskomponenten wie in der Statik als Koeffizienten des Arbeitsausdruckes δA gegeben gedacht, während die Art ihrer Abhängigkeit von den Bewegungsfunktionen zunächst offen bleibt.

Wir befassen uns vorerst nur mit den gewöhnlichen in Nr. **3** betrachteten Medien. Der Übergang von der Statik zur Kinetik kann dann genau wie in der Mechanik der diskontinuierlichen Systeme mit Hilfe des *d'Alembertschen Prinzips* (vgl. IV 1, Nr. **36**, *Voss*) geschehen; seine Übertragung auf kontinuierliche Systeme bietet sich fast von selbst dar, wenn man sich wie in der Statik (S. 616) von dem Gedanken eines Grenzüberganges zum Kontinuum leiten lässt, bzw. direkt im Sinne der Analogie zwischen Punktsystemen und Kontinuis vorgeht. Von diesen Gesichtspunkten aus hat bereits *Lagrange*[50]) die von ihm behandelten Probleme der Hydrodynamik angefasst.

Demnach kann man ganz entsprechend der von *d'Alembert*[51]) selbst entwickelten Auffassung für die allgemeine Mechanik der Kontinua das folgende Prinzip aussprechen: *Betrachtet man die während der Bewegung in einem bestimmten Zeitmoment auf das Quantum V_0 des Mediums wirkenden Kräfte und Spannungen, so befinden sie sich im statischen Gleichgewicht im früheren Sinne, wofern man ihnen an jeder Stelle noch Kräfte („Trägheitskräfte") hinzufügt, deren Komponenten auf die Masseneinheit des Kontinuums berechnet den Komponenten der Beschleunigung entgegengesetzt gleich sind:*

$$-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -x'', \quad -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y'', \quad -\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -z''.\,^{52})$$

Erweist es sich auch vielfach als zweckmässig, diesen Satz als Axiom an die Spitze der Kinetik zu stellen, so bleibt die Frage offen, in welche unabhängigen Bestandteile man ihn zerlegen kann und wie weit diese von den statischen Axiomen unabhängig sind — eine Frage, die in genau der gleichen Bedeutung schon in der Mechanik der diskontinuierlichen Systeme auftritt. Es sei daher hier

---

50) Vgl. insbesondere Méc. anal., 2. part., Sect. XI, § I.

51) Traité de dynamique, Paris 1743. Vgl. IV 1 *Voss*, p. 77 [209]).

52) Mit Akzenten werden im folgenden stets die Ableitungen der Bewegungsfunktionen (1) nach t bei konstantem a, b, c bezeichnet.

nur kurz bemerkt, daß diess *d'Alembert*sche Prinzip einmal die wesentlich dem zweiten *Newton*schen Axiom äquivalente Tatsache enthält, dass die Beschleunigung eines frei gedachten Volumelementes gleich der Summe aller auf dasselbe wirkenden Kräfte ist, daß es aber andererseits — worauf *G. Hamel*[53]) nachdrücklich hingewiesen hat — eine von diesem ersten Bestandteil logisch durchaus unabhängige Aussage enthält: Wirken auf ein Kontinuum solche Kräfte, dass die für jedes Teilchen nach dem zweiten *Newton*schen Gesetz folgenden Beschleunigungen mit den kinematischen Bedingungen des Systemes verträglich sind, so treten diese Beschleunigungen auch wirklich ein.

Führt man nunmehr in das *d'Alembert*sche Prinzip das Prinzip der virtuellen Verrückungen als Gleichgewichtsbedingung ein, so erhält man das von *Lagrange*[54]) als Grundformel der Dynamik benutzte *Variationsprinzip.* Man denke sich für jeden Moment t die Bewegung wie in Nr. 2, (6) überlagert mit einer unendlichkleinen virtuellen Verrückung, die mit den im Moment t für das Kontinuum etwa bestehenden kinematischen Bedingungen verträglich ist; *dann muss die durch die Trägheitskräfte ergänzte virtuelle Arbeit stets verschwinden:*

$$(1)\qquad -\iiint\limits_{(V)} \varrho(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)\,dV + \delta A = 0,$$

und dies für jeden Zeitpunkt t des Bewegungsverlaufes. Im Falle eines beliebig stetig deformierbaren Körpers folgen hieraus unter den gleichen Annahmen wie in Nr. 3c als Gleichungen der Bewegung für jeden Punkt des Kontinuums und zu jeder Zeit:

$$(2)\qquad \varrho x'' = \varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \end{pmatrix},$$

während die Randbedingungen (5b) von Nr. 3 ungeändert für jeden Zeitmoment t bestehen bleiben. Diese Gleichungen bestimmen die Bewegung wiederum erst dann, wenn der Zusammenhang der Kraft- und Spannungskomponenten mit den Bewegungsfunktionen festgelegt ist.

Was nun die Berücksichtigung kinematischer Nebenbedingungen anlangt, so beziehen wir uns hier ausschliesslich auf den Fall sog. *holonomer* Bedingungen, die *keine zeitlichen* Ableitungen der Bewegungsfunktionen enthalten.[55]) Eine solche Bedingung unterscheidet sich von

53) *G. Hamel,* Math. Ann. 66 (1908), p. 354; p. 386 ist die Unabhängigkeit für die Mechanik starrer Körper durch ein Beispiel gezeigt; vgl. auch die ausführlichere Darstellung in *Hamel*s Elementarer Mechanik, p. 306f.

54) Méc. analyt., 2. part., Sect. II.

55) Will man Probleme mit *nichtholonomen* Bedingungsgleichungen mit dem *d'Alembert*schen Prinzip behandeln, so muss man in der Mechanik der Kontinua wie bereits in der Punktmechanik davon absehen, dass die variierte

der in Nr. 4c betrachteten Form nur durch das explizite Auftreten von t:

$$\omega(a, b, c;\ x, y, z;\ x_a, \ldots, z_c;\ t) = 0. \tag{3}$$

Für die virtuellen Verrückungen kommt nun nur die Form dieser Bedingung zur Zeit t in Betracht; die variierte Lage soll (für beliebig kleine σ) der Bedingung (3) für den betrachteten festen Wert von t genügen, so daß durch Differentiation nach σ („Variation der Bewegung bei festem t") folgt

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x}\,\delta x + \sum_{(xyz,\ abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a}\,\delta x_a = 0 \qquad \text{für jedes } t. \tag{3'}$$

Hieraus ergeben sich wie in Nr. 4c angedeutet die Bewegungsgleichungen.

5b. Übergang zu dem sog. Hamiltonschen Prinzip. Man kann nun auch weiterhin ganz analog bekannten Entwicklungen der Punktmechanik das *d'Alembert*sche Prinzip in andere die Bewegung bestimmende Variationsprinzipe umformen; insbesondere handelt es sich hier darum, die von der Bewegung (den Trägheitskräften) herrührenden Glieder in die Variation eines einzigen für jeden Bewegungsvorgang bestimmten Ausdruckes überzuführen.

Grundlegend sind, wie bei *Lagrange*[56]), die Identitäten

$$x''\,\delta x = \frac{d}{dt}(x' \cdot \delta x) - \delta\left(\tfrac{1}{2} x'^2\right) \qquad (x, y, z),$$

die durch wiederholte Differentiation aus Nr. 2, (6) nach den voneinander unabhängigen Veränderlichen σ, t folgen. Trägt man das in (1) ein und berücksichtigt, daß die Operationssymbole $\frac{d}{dt}$ und δ ohne Rücksicht auf den Faktor ϱ vor das Integral gezogen werden können, da nach Einführung der a, b, c als Integrationsvariable sowohl der Integrationsbereich V_0 als auch der verbleibende Faktor ϱ_0 von σ und t unabhängig sind, so ergibt sich

$$-\frac{d}{dt}\iiint_{(V)} \varrho \sum_{(xyz)} x'\,\delta x \cdot dV + \delta T + \delta A = 0, \tag{4}$$

Bewegung für kleine σ den Bedingungen genügt — vielmehr wird die Bedingungsgleichung für die Verrückungen rein *formal* durch Ersetzen der zeitlichen Differentiation durch die Operation δ gewonnen; vgl. unten p. 633. Man vergleiche hierzu IV 1, Nr. **37**, **38** (*Voss*) und die dort zitierte Litteratur, insbesondere *O. Hölder*, Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1896, p. 141—143, ferner die seither erschienenen Darstellungen von *G. Hamel*, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 1 und Math. Ann. 59 (1904), p. 416.

56) Mécan. anal., 2. part., sect. IV art. 3.

wobei zur Abkürzung die gesamte *kinetische Energie*

$$T = \frac{1}{2}\iiint_{(V_0)} \varrho_0 \sum_{(xyz)} x'^2 \, dV_0 = \frac{1}{2}\iiint_{(V_0)} \varrho \sum_{(xyz)} x'^2 \, dV \tag{5}$$

eingeführt ist. Gl. (4) ist die von *G. Hamel*[57]) und *K. Heun*[58]) unter dem Namen *Lagrangesche Zentralgleichung* als Grundlage der Mechanik der Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden verwendete Gleichung, die also auch in der Mechanik der Kontinua im gleichen Sinne gilt[59]), und die mit (1) völlig äquivalent ist: *die Bewegung erfolgt so, dass für jede mit den etwa stattfindenden Bedingungen verträgliche virtuelle Verrückung in jedem Moment die zeitliche Ableitung der virtuellen Arbeit des Impulses* (x', y', z') *pro Masseneinheit gleich der Summe der Variation der kinetischen Energie und der virtuellen Arbeit sämtlicher Kraftwirkungen ist.*[60])

Betrachtet man nun die Bewegung im Zeitintervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$, so gilt (4) für jeden Moment, und durch Integration nach t in den Grenzen t_0, t_1 ergiebt sich, wenn die virtuellen Verrückungen für die Momente $t = t_0$, t_1 gleich Null genommen werden, das sog. *Hamiltonsche Prinzip*[61]): *Lagert man über die Bewegung des Kontinuums irgendwelche mit den etwa stattfindenden Bedingungen verträgliche virtuelle Verrückungen, die für die Momente* t_0, t_1 *durchweg verschwinden, so verschwindet das von* t_0 *bis* t_1 *erstreckte Zeitintegral der Summe von virtueller Arbeit und Variation der kinetischen Energie*:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt = 0. \tag{6}$$

Da in (6) die virtuellen Verrückungen für jedes Zeitintervall will-

---

57) *G. Hamel,* Zeitschr. Math. Phys. 50 (1904), p. 14.

58) *K. Heun,* Lehrbuch der Mechanik, T. 1: Kinematik (Leipzig 1906), p. 92. Vgl. auch IV 11, Nr. **11**, *K. Heun.*

59) Vgl. IV 11, Nr. **19** bis **21**, *K. Heun.*

60) Variiert man auch den Zeitparameter t, so kann man ebenso die von *G. Hamel* (Math. Ann. 59 (1904), p. 423) und *K. Heun*[58]) als *allgemeine Zentralgleichung* bezeichnete Relation auf die Mechanik der Kontinua übertragen; vgl. IV 11, Nr. **19** bis **21**, *K. Heun.*

61) Dies Prinzip wurde für einzelne Teilgebiete der Mechanik der Kontinua von verschiedenen Seiten sehr bald aufgestellt, nachdem man es einmal für die Punktmechanik besass (s. IV 1, Nr. **42**, *Voss*); man vergleiche ausser der später zu zitierenden Litteratur der Einzeldisziplinen *A. Walter,* Anwendung der Methode Hamiltons auf die Grundgleichungen der math. Theorie der Elastizität, Diss. Berlin 1868, sowie die zusammenfassenden Darstellungen in *Kirchhoffs* Mechanik, p. 117f und *W. Voigts* Kompendium I, p. 227ff.

kürlich gewählt werden können, kann man ebenso leicht rückwärts aus (6) auf (4) oder (1) schliessen: *diese Prinzipe sind völlig äquivalent.*

Man kann nun weiterhin direkt aus diesen Sätzen das *Prinzip der kleinsten Wirkung* in seinen verschiedenen Formen für die Mechanik der Kontinua herleiten[62]); doch scheint es da — abgesehen von Fällen, die auf Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden zurückkommen — noch keine wesentliche Anwendung gefunden zu haben.

5c. Das Prinzip des kleinsten Zwanges. Man kann die Trägheitsglieder im d'*Alembert*schen Prinzip auch ohne die Integration nach der Zeit in die Variation eines für jeden Bewegungszustand bestimmten nur vom Zustand im Moment t abhängigen Ausdruckes überführen, wobei freilich das Auftreten zweiter zeitlicher Ableitungen zugelassen werden muß. So entsteht das *Gauss*sche Prinzip des kleinsten Zwanges[63]), das *A. v. Brill* neuerdings zum Ausgangspunkt einer systematischen Behandlung der Mechanik der Kontinua gewählt hat.[64])

Um dies Prinzip zu gewinnen, entnehmen wir die virtuelle Verrückung einer Schar variierter Bewegungen Nr. **2**, (**6**) von folgender besonderer Art: Jedes Teilchen a, b, c soll in dem betrachteten Zeitmoment t dieselbe Lage und dieselbe Geschwindigkeit besitzen wie bei der wirklichen Bewegung, d. h. es soll für ebenjenen Wert t gelten:

$$(7) \qquad \delta x(a, b, c; t) = 0, \quad \delta x'(a, b, c; t) = 0 \qquad (x, y, z),$$

während die Variationen $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ der Beschleunigungen von Null verschieden sind. Diese drei Funktionen kann man nun in jedem Falle als Bestimmungsstücke der in (1) eingehenden Verrückung verwenden. Im Falle eines frei deformierbaren Kontinuums ist das evident. Besteht aber eine Bedingung der Form (3), so ergiebt sich durch zweimalige Differentiation nach t

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} x'' + \sum_{(xyz,\, abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a} x_a'' + \cdots = 0,$$

62) Beispielsweise die Betrachtungen von *O. Hölder*, Die Prinzipien von Hamilton und Maupertius (Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1896, p. 122 ff.) lassen sich unmittelbar auf Kontinua ausdehnen.

63) *Gauss*' Werke V, p. 23 = Journal f. Math. 4 (1829). Die erste analytische Formulierung dieses von *Gauss* nur in Worten ausgesprochenen Prinzipes haben *R. Lipschitz*, Journ. f. Math. 82 (1877), p. 321 ff. und wenig später *J. W. Gibbs*, Amer. Journ. 2 (1879), p. 49 = Scientif. Pap. II (New-York 1906), p. 1 gegeben. Über die weitere Litteratur s. IV 1, Nr. **39**, *A. Voss*.

64) *A. v. Brill*, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Leipzig 1909.

wo durch die Punkte bekannte Funktionen der $x, \ldots, x_\alpha, \ldots$, und ihrer ersten zeitlichen Ableitungen angedeutet sind. Durch Variation, d. h. Differentiation nach σ, folgt wegen (7) für den festen Moment t

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta x'' + \sum_{(xyz,\, abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha'' = 0,$$

und das ist tatsächlich genau die oben für die δx aufgestellte Bedingung (3'). Die Einführung der Funktionen $\delta x'', \ldots$ in (1) ist daher gestattet und ergiebt nach leichter Umformung das folgende neue Prinzip[65]: *Variiert man die wirkliche Bewegung eines Kontinuums in einem bestimmten Moment so, dass Lage und Geschwindigkeit eines jeden Teilchens erhalten bleiben, aber die Beschleunigung den etwa stattfindenden Nebenbedingungen entsprechend geändert wird, so verschwindet stets die folgende Integralsumme:*

$$(8) \quad -\delta \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \varrho \sum_{(xyz)} x''^2 \, dV + \iiint_{(V)} \Big(\varrho \sum_{(XYZ)} X \delta x'' - \sum_{(XYZ,\, xyz)} X_x \frac{\partial \delta x''}{\partial x} \Big) dV + \iint_{(S)} \sum_{(XYZ)} \overline{X} \delta x'' \, dS = 0.$$

An Stelle der hier auftretenden Variation einer der „mittleren Beschleunigung" entsprechenden Größe[66] kann man auch das genaue Analogon des *Gauss*schen *Zwanges* einführen; denn ordnet man der variierten Bewegung die gleichen ungeänderten Kräfte zu, so kann man (8) schreiben

$$(8') \quad -\delta \Big\{ \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \varrho \sum_{\binom{xyz}{XYZ}} (x'' - X)^2 \, dV \Big\} - \iiint_{(V)} \sum_{(XYZ,\, xyz)} X_x \frac{\partial \delta x''}{\partial x} \, dV + \iint_{(S)} \sum_{(XYZ)} \overline{X} \delta x'' \, dS = 0.$$

Die wesentliche Bedeutung dieses Prinzips besteht wie in der Punktmechanik darin, dass es völlig ungeändert auch bei Systemen mit *nichtholonomen* Nebenbedingungen Geltung hat. Besteht etwa eine solche Bedingungsgleichung, in der neben den Bewegungsfunktionen und ihren räumlichen Ableitungen auch die ersten *zeitlichen* Differentialquotienten auftreten:

$$\omega(a, b, c;\, x, y, z;\, x_a, \ldots, z_c;\, x', y', z';\, x_a', \ldots, z_c';\, t) = 0,$$

so erhält man durch einmalige Differentiation nach t die Bedingung

65) *Brill,* a. a. O., p. 61 ff.

66) Sie ist zuerst von *P. Appell,* Paris C. R. 129 (1899), p. 317 und in einer Reihe weiterer Arbeiten (s. IV 1, Nr. 38, *Voss*) in diesem Zusammenhange benutzt worden.

für die Werte der Beschleunigung im festen Momente t, und durch Variation (Differentiation nach σ) ergiebt sich wegen (7)

$$\sum_{(xyz)} \frac{\partial \omega}{\partial x'} \delta x'' + \sum_{(xyz,\,abc)} \frac{\partial \omega}{\partial x_a'} \delta x_a'' = 0,$$

was nunmehr (8) als Nebenbedingung zuzufügen ist.

Ist ω speziell linear in den Geschwindigkeiten $x', \ldots, x_a', \ldots,$ so ist dies Resultat dem Wesen nach identisch mit der Form, in der man das *d'Alembert*sche Prinzip vielfach für nichtholonome Bedingungen ausspricht[55]), wobei an Stelle der dort nur formal eingeführten virtuellen Verrückungen eben die Variationen der Beschleunigung treten.

Ein weiterer Vorzug dieses Prinzips vor dem *d'Alembert*schen, der indessen in der Mechanik der Kontinua bisher kaum ausgenutzt zu sein scheint, besteht darin, dass es auch für die Behandlung kinetischer Probleme mit Ungleichungsnebenbedingungen die geeignete Grundlage bietet: man hat nur zu fordern, dass der Ausdruck (8) für alle nach den Nebenbedingungen im Moment t bei fester Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen zulässigen Variationen der Beschleunigung *kleiner oder gleich Null* ist — genau wie es für die Punktmechanik schon *Gauss*[67]) besonders betont hat.

5d. Ansätze allgemeinerer Natur. Von Ansätzen, die über die bisher umschriebenen gewissermassen klassischen Formen der Grundgleichungen der Kinetik hinausführen, ist an erster Stelle eine *Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips* zu nennen, die ganz ähnlich bereits in der Dynamik der Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden eine wichtige Rolle spielt[68]); sie besteht darin, daß man zur Bildung der kinetischen Energie T eine allgemeinere Funktion der Geschwindigkeitskomponenten, insbesondere eine definite quadratische Form verwendet:[69])

$$(9) \qquad T = \tfrac{1}{2} \iiint_{(V)} \mathfrak{T}\, dV, \text{ wo } \mathfrak{T} = \varrho_{11} x'^2 + 2\varrho_{12} x' y' + \cdots.$$

Alsdann folgen aus dem *Hamilton*schen Prinzip (6) Bewegungsgleichungen, die sich von (2) nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von $\varrho \cdot x'', \ldots$ tritt $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x'}\right), \ldots$. Die 6 Koeffizienten $\varrho_{11}, \ldots$ sind ge-

67) *Gauss,* Werke V, p. 27.

68) Vgl. IV 12, *P. Stäckel.*

69) Diese Ansätze spielen in den älteren optischen Theorien *Lord Rayleighs* die entscheidende Rolle; s. bes. Phil. Magaz. (4) 41 (1871), p. 519 (vgl. V 21, Nr. **29**, *A. Wangerin*). Derselbe Ansatz bei *T. J. Bromwich,* Lond. math. Soc. Proc. 34 (1902), p. 307.

gebene Funktionen von a, b, c; sie bestimmen gemeinsam die Dichte (Trägheitsmasse) des Mediums, die sonach von der Richtung abhängig ist (*kinetische Anisotropie*).

Sehr viel weiter holt ein *anderer Ansatz* aus, der über die besondere Form der kinetischen Energie bzw. der vermöge der Bewegung auftretenden „Trägheitskräfte" ebensowenig eine Annahme macht, wie der Arbeitsausdruck in Nr. **3** bezüglich der Natur der Kräfte und Spannungen: Man erweitere das Prinzip der virtuellen Verrückungen durch die einer vierten unabhängigen Variablen — der Zeit t — entsprechenden Operationen (Integration nach t und Hinzufügung von Gliedern mit zeitlichen Ableitungen der $\delta x, \ldots$) und bezeichne als *virtuelle Arbeit des bewegten Kontinuums im Zeitintervall* t_0, t_1 bei einer virtuellen Verrückung der Bewegung das vierfache Integral, in dem a, b, c, t als Unabhängige aufgefasst sind):[70])

$$(10)\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} d\,V_0 \Big(\sum_{\binom{xyz}{XYZ}} \Big(\varrho_0 X \delta x + X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t}\Big) - \sum_{\left(\substack{xyz \\ XYZ}\,;\, abc\right)} X_a \frac{\partial \delta x}{\partial a} \Big).$$

Dabei sind die *Impulskomponenten* $X_t, \ldots$, die den Einfluss der Bewegung repräsentieren, ebenso wie Kraft- und Spannungsgrössen $X, \ldots$, $X_a, \ldots$ in ihrer Abhängigkeit von den Bewegungsfunktionen gemäss der speziellen Natur des Kontinuums gegeben zu denken; die bisher angenommenen geläufigen Trägheitskräfte erhält man, wie (5), (6) zeigt, für $X_t = \varrho_0 x'$, während (9) einem allgemeinen linearen Ansatz in x', y', z' entspricht. Weiterhin können zu (10) wie in Nr. **3** noch analoge Integrale über den Rand des Integrationsgebietes im a-b-c-t-Raume hinzutreten. *Die Bewegung geht nun so vor sich, dass die virtuelle Arbeit* (10) *für jede unendlichkleine mit den etwa bestehenden Nebenbedingungen verträgliche virtuelle Verrückung verschwindet*; daraus kann man nach den bekannten Methoden leicht die Bewegungsgleichungen entnehmen — beispielsweise folgt für ein beliebig stetig deformierbares Kontinuum:

$$(11)\qquad \frac{d X_t}{dt} = \varrho_0 X + \frac{\partial X_x}{\partial a} + \frac{\partial X_y}{\partial b} + \frac{\partial X_z}{\partial c} \qquad (X, Y, Z),$$

und analog ergeben sich die Randbedingungen. Ganz wie in Nr. **3**c

70) Für den Spezialfall, dass diese virtuelle Arbeit die Variation eines „Wirkungsintegrales" ist, sind diese Ansätze systematisch aufgestellt und verfolgt von *E.* u. *F. Cosserat,* Corps déformables, p. 156ff. (vgl. Nr. **7**b). — In einer durch die Anforderungen der Relativitätstheorie modifizierten Form tritt derselbe Ansatz auf bei *H. Minkowski,* Grundgleichungen der elektromagnet. Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr. 1908, p. 106 (vgl. Nr. **16**).

kann man in (10), (11) x, y, z statt a, b, c als Unabhängige einführen[71]).

Ganz analog hat man die allgemeine Kinetik der in Nr. 4b betrachteten *Medien mit orientierten Teilchen* auszubauen, wenn man diesen Teilchen einen Trägheitswiderstand gegen Winkelbeschleunigungen zuschreibt: Man hat, um hier sogleich den allgemeinsten Ausdruck zu formulieren, zu (10) nur das Nr. 4, (2) analoge Integral[72])

$$(12)\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} d V_0 \Big(\sum_{\binom{LMN}{\pi\varkappa\varrho}} \Big(\varrho_0 L \delta\pi + L_t \frac{\partial \delta \pi}{\partial t} \Big) - \sum_{\binom{LMN}{\pi\varkappa\varrho};\, abc} L_a \frac{\partial \delta \pi}{\partial a} \Big)$$

hinzuzufügen, wo $L_t, \ldots$ den Impuls der inneren Rotation bestimmen, und kann hieraus wie in Nr. 4b in jedem Falle die Bewegungsgleichungen, die bei freier Beweglichkeit der Dreikante ein zweites (11) analoges Tripel aufweisen, herleiten.[73])

Alle diese Betrachtungen sind mit leichten Modifikationen auch auf die Dynamik zwei- und eindimensionaler Kontinua anwendbar.[74])

III. Die Formen der Wirkungsgesetze.

A. Formulierung der allgemeinen Typen.

6. Die Typen der Abhängigkeit der Kraftwirkungen von den Deformationsgrössen. Während in den bisherigen Erörterungen die Wirkungskomponenten — unter diesem Ausdruck seien der Kürze halber neben den Kräften und Spannungen aller Arten auch die Impulsgrössen von Nr. 5d mitinbegriffen — nur formal als Koeffizienten des Ausdrucks der virtuellen Arbeit in Betracht kamen, ist nunmehr von ihrem Zusammenhang mit den Bestimmungsstücken der Deformation bzw. der Bewegung des Kontinuums Rechenschaft zu geben, der bestehen und bekannt sein muss, wenn anders die angegebenen Grundgleichungen überhaupt die Deformation bzw. Bewegung des Kontinuums bestimmen sollen. Er muss überdies die anschaulich evidente Tatsache zum Ausdruck bringen, dass in jedem Kontinuum durch Bewegungen und Deformationen gewisse Kraftwirkungen ausgelöst werden, und dass umgekehrt durch einwirkende Kräfte und Spannungen Bewegungen und Deformationen hervorgerufen werden. Dabei muss in

71) Vgl. *E.* u. *F. Cosserat*, a. a. O., p. 187 ff.

72) *E.* u. *F. Cosserat*, a. a. O., p. 156 ff., p. 167 ff.

73) Vgl. auch IV 11, Nr. **21** c (*K. Heun*).

74) *E.* u. *F. Cosserat*, a. a. O., p. 121. Die Ansätze der Kinetik ein- und zweidimensionaler Kontinua ordnen sich denen der Statik zwei- bzw. dreidimensionaler ein.

erster Linie der Unterschied zur Geltung kommen, ob die Kraftwirkungen *äussere* sind, d. h. in den Beziehungen des betrachteten Mediums zu ausserhalb gelegenen Medien oder Wirkungsquellen ihren Ursprung haben (Fernkräfte, Drucke an den Grenzflächen usw.), oder *innere*, d. h. auf der materiellen Konstitution des einzelnen Mediums und den gegenseitigen Einwirkungen seiner Teile beruhen. Die zuletzt genannten Wirkungen sind für den vorliegenden Zweck wesentlicher; insofern die gesuchten Gleichungen sie liefern, charakterisieren sie das eigentümliche dynamische Verhalten eines jeden Mediums innerhalb der allen Kontinuis gemeinsamen Formen und können daher geradezu als *Stoffgleichungen* bezeichnet werden.

Bei der Erörterung, wie diese Stoffgleichungen im allgemeinen beschaffen sind, genügt es, in erster Linie auf die in Nr. 3 behandelten Medien und die eigentlichen Spannungsgrössen $X_x, \ldots, Z_z$ und allenfalls auf die Kraftkomponenten X, Y, Z Bezug zu nehmen. Danach lassen sich dann die entsprechenden allgemeinen Schemata für die in Nr. 4 auftretenden Spannungsgrößen in weiterem Sinne und für die Impulskomponenten von Nr. 5d leicht aufstellen — die bei diesen bisher tatsächlich angewendeten Ansätze ordnen sich übrigens den speziellen in Nr. 7b, f zu besprechenden Abhängigkeitstypen unter.

Die Werte der Spannungskomponenten $X_x, \ldots, Z_z$, die dem zur Zeit t an der Stelle

(1) $$x = x(a, b, c; t), \; y = y(a, b, c; t), \; z = z(a, b, c; t)$$

befindlichen Teilchen a, b, c entsprechen, müssen durch die Stoffgleichungen für jede mögliche Bewegung des Kontinuums gegeben sein; sie werden also explizit dargestellt als irgendwie geartete von a, b, c, t und den Funktionen (1) abhängige Ausdrücke, in die neben den Werten dieser Funktionen und ihrer örtlichen und zeitlichen Ableitungen an der Stelle a, b, c, t möglicherweise auch ihre Werte an andern Stellen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}$ und überhaupt ihr Gesamtverlauf im Variabilitätsbereich ihrer vier Veränderlichen (Integrale u. dgl.) eingehen — also, symbolisch geschrieben, in der Form:

(2) $$F(a, b, c, t; x(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}), \ldots\ldots).$$

Geht man zu einem andern rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z über, so sind diese neun Ausdrücke der Spannungskomponenten wie die Komponenten einer Dyade zu transformieren (und ebenso die Ausdrücke für X, Y, Z wie Vektorkomponenten usw.); handelt es sich um innere Kraftwirkungen, so müssen zwischen den transformierten Komponenten und den neuen Koordinaten Gleichungen genau der alten Form bestehen.

Wir betrachten nun der Reihe nach die einzelnen möglicherweise in den Spannungsausdrücken auftretenden Argumente; natürlich können die im folgenden einzeln diskutierten Wirkungen auch gleichzeitig stattfinden. In erster Linie ist da zu bemerken, daß explizites Vorkommen der Parameter a, b, c auf *Inhomogenität* des Mediums, d. h. Verschiedenheit seiner Eigenschaften von Teilchen zu Teilchen, hindeutet; Auftreten des Zeitparameters t bedeutet in ihrem zeitlichen Verlauf von vornherein bestimmte, d. h. ohne Rücksicht auf die wirklich stattfindende Bewegung gegebene *äussere Einwirkungen*.

Das eigentlich Wesentliche ist natürlich die Art des Eingehens der Funktionen (1) selbst[75]; betrachten wir zunächst den Fall, daß nur ihr Wertverlauf in beliebig kleiner Umgebung der Stelle a, b, c, t, d. h. die Werte der Funktionen und ihrer Ableitungen an dieser Stelle, in (2) auftreten, daß also (2) von der Form ist

$$(3)\quad F(a,\ldots,t;\, x(a,\ldots,t),\ldots;\, x_a(a,\ldots,t),\ldots,\, x_t(a,\ldots,t);\, x_{aa}(a,\ldots,t),\ldots).$$

Das Vorkommen der Lokalwerte von x, y, z selbst bedeutet Wirkungen, die von der wirklichen Lage der einzelnen Teilchen im Raum abhängen, wie es beispielsweise äussere gegebene Kraftfelder (Schwere oder dgl.) sind. Charakteristischer für die Kontinua sind indessen die Nahewirkungen, die sich im Auftreten von Spannungen infolge lokaler Deformationen äussern. Als Bestimmungsstücke der gesamten Deformation an einer Stelle (nicht bloss der reinen Formänderung der elementaren Elastizitätstheorie) betrachtet man bekanntlich in erster Linie die Werte der neun *ersten örtlichen Ableitungen* daselbst (vgl. IV 14, Nr. **16**); die in Rede stehende Wirkung kommt daher in expliziter Abhängigkeit der Spannungskomponenten von den Werten $x_a, \ldots, z_c$ an der Stelle a, b, c, t zum Ausdruck. Die Art dieser Abhängigkeit muss hervortreten lassen, ob und welche einzelnen Bestandteile der Deformation alleinigen oder vorzugsweisen Einfluss auf die Spannung bzw. auf die einzelnen Bestandteile der Spannung besitzen, wie später bei der Behandlung der einzelnen Gebiete zur Geltung kommen wird.

Der Deformationszustand an einer Stelle wird genauer beschrieben, wenn man neben den ersten noch *höhere örtliche Ableitungen* der Funktionen (1) heranzieht, d. h. die Deformation in der Umgebung durch eine Transformation höheren Grades statt durch eine lineare approximiert; die Abhängigkeit der Spannungen von der Deformation wird also vollständiger wiedergegeben sein, wenn man auch diese höheren

75) Die im folgenden zunächst anzuführenden Abhängigkeitstypen sind ihrer Form nach in der Regel zuerst in der Entwicklung der Elastizitätstheorie aufgetreten; nähere Angaben werden unter IIIB in den Nrn. **9**—**16** zu machen sein.

Ableitungen in die Stoffgleichungen hineinnimmt. Tatsächlich hat man bisher nicht höhere als zweite Ableitungen in Betracht gezogen, und zwar wird das erst dann nötig, wenn der Zustand des Mediums *sehr rasch* mit dem Ort variiert; die Spannungen an einer Stelle hängen dann also auch von dem örtlichen Abfall der gewöhnlichen Deformationsgrössen 1. Ordnung ab.

Ebenso wie die Lokalwerte der örtlichen Ableitungen können in der Kinetik auch die Werte der *zeitlichen Ableitungen* der Funktionen (1) an der Stelle a, b, c, t in (3) explizit eingehen; man hat da namentlich die Geschwindigkeitskomponenten x', y', z' der Teilchen selbst und die „Änderungsgeschwindigkeiten" der Deformationsgrössen $x_a', \ldots, z_c'$ — die, mit dt multipliziert, auch als Komponenten der Deformation der Umgebung des Teilchens a, b, c vermöge der von t bis $t + dt$ vor sich gehenden Bewegung aufgefasst werden können[76]) — in Betracht gezogen. Diese Ansätze werden den Erscheinungen der *äusseren* und *inneren Reibung*, der *Zähigkeit* u. dgl. gerecht.

Bei allen Gesetzen vom Typus (3) ist die Frage von prinzipieller Bedeutung, wie diese Gleichungen sich bei einer Transformation der Richtungen der a-b-c-Parameterlinien durch diesen Punkt a, b, c verhalten, während die x-y-z-Koordinaten ungeändert bleiben. Dadurch wird nämlich bestimmt, ob und welche verschiedenen Richtungen durch einen Punkt des Mediums für dessen Konstitution, soweit sie sich in den betrachteten Stoffgleichungen äussert, gleichbedeutend sind, d. h. es wird über *Isotropie oder Aeolotropie des Mediums* entschieden; unter besonderen Verhältnissen ist dieser Zusammenhang in der Kristallphysik eingehend studiert worden, wobei nur durch die Beschränkung auf unendlichkleine Deformationen der Unterschied zwischen den Transformationen der a, b, c und der x, y, z nicht zur Geltung kommt.[77])

Für den allgemeineren Fall, dass in die Stoffgleichungen (2) auch die Werte der Funktionen (1) an anderen Stellen und zu anderen Zeiten eingehen, ist der charakteristische Ansatz von hinreichender Allgemeinheit — zunächst für die *Statik* —, die Spannungskomponenten gleich Raumintegralen über das ganze Kontinuum zu setzen

$$(4) \quad \iiint\limits_{(V_0)} f(a, \ldots; x, \ldots; x_a, \ldots; \bar{a}, \ldots; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots)\, d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c},$$

76) *Stokes*, Cambridge Phil. Trans. 8 (1845) = Math. and Phys. Papers 1 (1880), p. 80; vgl. auch IV 15, Nr. 7, *Love.*

77) Vgl. etwa *F. Neumann*, Vorles. üb. d. Theorie der Elastizität (Leipzig 1885), p. 164; *W. Voigt*, Abh. Ges. d. Wiss. Göttingen 34 (1887), 36 (1890), Kompendium I, p. 128 ff. und p. 333, sowie besonders Lehrb. d. Krystallphysik (Leipzig 1910), § 286 ff., § 370 ff., § 414 ff., § 462.

deren Integranden gegebene Funktionen der Werte der Deformationsfunktionen (1) und ihrer Ableitungen für die Teilchen a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sind. Damit sind die Fernwirkungen innerhalb des Mediums umfasst: eine Wirkung an der Stelle x, y, z entsteht infolge der Zustände an allen anderen Stellen des Kontinuums. Aber neben die aus der klassischen Mechanik bekannten von Massenteilchen zu Massenteilchen wirkenden durch solche Ansätze dargestellten *Kräfte* nach Art der Attraktionskräfte treten hier neu die von *P. Duhem*[78]) betrachteten Fernwirkungen („*influence*") auf, vermöge deren an jeder Stelle des Kontinuums sich superponierende Kräfte oder Spannungen durch die an allen andern Stellen des Kontinuums stattfindenden *Deformationen* ausgelöst werden.

In der *Kinetik* wird man diesen Ansatz noch dahin ausdehnen, dass man ein Zeitintegral über den gesamten Bewegungsverlauf, oder vielmehr — unsern allgemeinen Vorstellungen von Ursache und Wirkung entsprechend — über die Zeit *vor* dem betrachteten Moment t hinzunimmt; der Integrand enthält dabei die Werte der Funktionen (1) sowie ihrer Ableitungen für die Momente t und $\bar{t}$ $(-\infty < \bar{t} \leqq t)$:

$$(5)\int_{-\infty}^{t} d\bar{t} \iiint_{(V)} d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c}\, f(a, \ldots, t; x, \ldots, x_a; \ldots, x_t; \ldots; \bar{a}, \ldots, \bar{t}; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots, \bar{x}_{\bar{t}}; \ldots).$$

Solche Ausdrücke für die Spannungskomponenten hat zuerst *L. Boltzmann*[79]) zur Formulierung der Erscheinung der *elastischen Nachwirkung* verwendet, bei der die in einem Moment stattfindenden Spannungen tatsächlich abhängen von allen Zuständen, die das Medium vorher durchlaufen hat. Neuerdings hat *V. Volterra*[80]) die Untersuchung der durch diese Integralansätze entstehenden Probleme aufgenommen, nachdem er in der Theorie der Integro-Differentialgleichungen ein neues Mittel zu ihrer analytischen Behandlung sich geschaffen hatte; er läßt übrigens in (5) auch mehrfache Integrationen nach der Zeit zu, wobei der Integrand von den Werten für mehr als zwei Zeitmomente abhängt. Für die sämtlichen hier umfaßten Probleme, bei denen die Wirkungen in einem Moment von der ganzen Vorgeschichte des Systems abhängen, nimmt er die von *E. Picard*[81]) eingeführte Bezeichnung „*héréditäre Mechanik*" auf.

78) *P. Duhem*, J. de math. (4) 8 (1892), p. 311; Ann. de l'Éc. norm. (3) 10 (1893), p. 215, und 21 (1904), p. 117.

79) Wien. Ber. 70 (1874), p. 275 = Pogg. Annalen, Ergänzungsbd. 7 (1876), p. 624 = Wissensch. Abh. I, p. 616.

80) Die allgemeinen Ansätze sind in den Roma, Acc. Linc. Rend. (5) 18, 2 (1909), p. 295 und Acta math. 35 (1912), p. 295 enthalten.

81) Riv. di Scienz. 1 (1907), p. 14.

Beschränkt man sich auf analytische Funktionen, so kann man unter entsprechenden Konvergenzvoraussetzungen das Zeitintegral (5) durch eine Funktion aller (unendlich vielen) zeitlichen Ableitungen der Funktionen $x, \ldots, x_a, \ldots$ im Moment t ersetzen, wie dies *W. Voigt*[82]) bei der Anwendung auf elastische Nachwirkung tut.

Alle diese Formen der Stoffgleichungen sind vorzugsweise in dem speziellen Falle behandelt worden, dass die Deformationen des Kontinuums *„unendlichklein"* sind (vgl. IV 14, Nr. **16**, *Abraham*). Die Funktionen (1) umfassen diesen Fall, wenn man a, b, c als Raumkoordinaten des Teilchens in der Ausgangslage auffasst und (vgl. Nr. 2a, p. 607) mit Hilfe eines auf beliebig kleine Werte beschränkten Parameters σ setzt:

$$(6) \qquad x(a, b, c; t) = a + \sigma \cdot u(a, b, c; t) + \cdots \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{pmatrix},$$

wobei durchweg die höheren Potenzen von σ gegenüber den niederen zu vernachlässigen sind. Hängt nun eine Wirkungskomponente von diesen Bewegungsfunktionen durch ein Gesetz von der Form (3) ab, so hat man den Ausdruck F durch die ersten Glieder seiner Entwicklung nach Potenzen von σ vermöge (6) zu ersetzen; verschwinden die linearen Glieder in σ nicht identisch, so erhält man daher an Stelle von (3) ein Gesetz der Form:

$$(3') \; F + \sigma\{F_x \cdot u + \cdots + F_{x_a} \cdot u_a + \cdots + F_{x_t} \cdot u_t + \cdots + F_{x_{aa}} \cdot u_{aa} + \cdots\}.$$

$F, F_x, \ldots$ sind die Werte der Funktion (3) und ihrer Ableitungen für $\sigma = 0$, also bekannte Funktionen von a, b, c, t; das Wirkungsgesetz ist nunmehr *linear* in den Lokalwerten der die unendlichkleine Deformation bestimmenden Funktionen $u(a, b, c; t), \ldots$ und ihrer Ableitungen — entsprechend dem *Hookeschen Gesetz* der Elastizitätstheorie (vgl. IV 23, Nr. **4**). Das von σ freie Glied entspricht den Anfangskräften oder -spannungen, die in dem undeformierten Kontinuum möglicherweise herrschen können. Ebenso könnte man aber auch Spannungsgesetze betrachten, bei denen der Koeffizient von σ^1 verschwindet[83]); dann würden für unendlichkleine Deformationen die Spannungen mindestens *quadratisch* von den Deformationen abhängen — entgegen dem Hookeschen Gesetz, das sonach auch für unendlichkleine Deformationen nicht notwendig gelten muss.

---

82) Kompendium I, p. 458; vgl. auch *Cl. Maxwell,* Scientif. Papers 2, p. 623.

83) Hierauf hat bei der Diskussion über die Gültigkeit des *Hooke*schen Gesetzes besonders nachdrücklich *B. de Saint-Venant* hingewiesen; vgl. seine Bemerkungen in *Navier,* De la résistance des corps solides, 3e éd. (Paris 1864), p. 662 und *Clebsch,* Théorie de l'élasticité des corps solides (Paris 1883), p. 39.

Haben die Stoffgleichungen die Integralform (4), (5), so ergiebt genau die gleiche Betrachtung Reduktion des Integranden auf eine lineare — möglicherweise freilich auch auf eine höhere — Funktion der Werte der Verschiebungen und ihrer Ableitungen an den Stellen a, b, c, t und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{t}$; beispielsweise wird aus (4)

$$(4') \quad \iiint\limits_{(V_0)} \left(f + \sigma\{f_x \cdot u + f_{\bar{x}} \cdot \bar{u} + \cdots + f_{x_a} \cdot u_a + f_{\bar{x}_a} \cdot \bar{u}_a + \cdots\}\right) d\bar{a}\, d\bar{b}\, d\bar{c},$$

und ähnlich vereinfacht sich im Falle zeitlicher Nachwirkung das Integral (5).

7. Medien mit *einer* charakteristischen Zustandsfunktion. Besonders häufig werden in der Mechanik der Kontinua Medien mit solchen Wirkungen betrachtet, deren charakteristische Gleichungen sich auf *eine einzige* Funktion der Zustandsgrößen zurückführen lassen. Eine solche Reduktion entspringt, wenn wir zunächst von der *Statik* reden, vor allem aus der Annahme, *dass die in Betracht kommende virtuelle Arbeit für jede virtuelle Verschiebung bis aufs Vorzeichen gleich ist der Variation eines einzigen nur von dem jeweiligen Deformationszustande abhängigen skalaren Ausdruckes, des „Potentials“ oder der „potentiellen Energie“ der wirkenden Kräfte oder Spannungen*[84]); diese Annahme kann auf allgemeine thermodynamische Sätze zurückgeführt werden.

7a. Das gewöhnliche Potential und seine nächsten Verallgemeinerungen. Die einfachste Form dieses Potentials wird durch die Eigenschaft charakterisiert, *dass das Potential eines in Teile zerlegten Bereiches gleich der Summe der Potentiale Φ^* der Teilbereiche V^* ist*[85]). Unter den naheliegenden Voraussetzungen, *dass Φ^* sich stetig mit der Grenzfläche von V^* ändert, und dass der Quotient $\Phi^* : V^*$ gegen einen bestimmten Grenzwert $\bar{\varphi}$ konvergiert, wenn V^* sich unbegrenzt um eine bestimmte Stelle x, y, z zusammenzieht* — und dies gleichmässig im ganzen Bereich V —, folgt leicht[86]), dass das Potential des gesamten

84) Für einfache Fälle hat schon *Lagrange* in der Méc. anal. eine solche Annahme aus der Mechanik diskreter Massen auf Kontinua übertragen (Prem. part., Sect. IV, Nr. 25) und sie speziell auf die Hydrostatik angewendet, indem er der virtuellen Arbeit einen der Variation der Volumdilatation proportionalen Term anfügt (1. part., sect VIII, Nr. 1); ihre weitere Ausbildung hat sie dann in der Elastizitätstheorie erfahren, und zwar hat *G. Green* (Cambr. Phil. Soc. Trans. 1838 = Math. Papers (London 1871), p. 245) zum erstenmal aus ihr die Grundgleichungen abgeleitet. Vgl. dazu IV 23, Nr. 5b.

85) Diese Annahme ist schon seit der ersten direkten Einführung des elastischen Potentiales als selbstverständlich mehr oder weniger ausdrücklich verwendet worden. Eine ausführliche Darlegung giebt *P. Duhem,* Le potentiel thermodynamiqe et la pression hydrostatique, Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183.

86) Vgl. *P. Duhem,* l. c., p. 187 ff. Es liegt hier nur eine präzisere Formu-

Kontinuums V (und ähnlich das eines jeden Teilbereiches) durch das über V erstreckte Raumintegral der Ortsfunktion $\overline{\varphi}$ dargestellt wird:

$$(1)\qquad \Phi = \iiint\limits_{(V)} \overline{\varphi}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(V_0)} \varphi\, da\, db\, dc, \quad \text{wo} \quad \varphi = \overline{\varphi}\,\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}.$$

$\overline{\varphi}$ ist die auf die Volumeinheit des deformierten Kontinuums, φ die auf die Volumeinheit des Ausgangszustandes bezogene *Energiedichte*; es sind *skalare Grössen*, die für jedes in einem bestimmten Deformationszustande betrachtete Kontinuum stetige oder doch abteilungsweise stetige Funktionen von x, y, z bzw. a, b, c sind. Die Beschaffenheit des Kontinuums unabhängig von der jeweils stattfindenden Deformation ist bestimmt, wenn φ als Funktion des Gesamtverlaufes der Deformationsfunktionen gegeben ist; soll das Zerlegungsaxiom für *jede* Deformation gelten, so kann φ nur die Werte der Funktionen und ihrer Ableitungen an der betrachteten Stelle explizit enthalten:

$$(2)\qquad \varphi = \varphi(a, b, c;\ x(a, b, c), \ldots;\ x_a(a, b, c), \ldots;\ x_{aa}(a, b, c), \ldots)$$

Handelt es sich um innere Kraftwirkuugen, so muß diese Funktion gegenüber rechtwinkligen Koordinatentransformationen im x-y-z-Raume invariant sein.

Wir nehmen zunächst an, dass *nur die ersten Ableitungen auftreten.* Um den Zusammenhang mit den Wirkungskomponenten zu finden[87]), bilden wir das Potential für die variierte Deformation (Nr. 2a, (3)); dann ergiebt sich als Variation von Φ

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{(xyz)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\varphi}{\partial x_b}\delta x_b + \frac{\partial\varphi}{\partial x_c}\delta x_c\right) da\, db\, dc,$$

wobei in die Ableitungen von φ die unvariierten Werte von x, y, z und ihren Ableitungen einzusetzen sind. Aus der Identität

$$(3)\qquad \delta A = -\delta\Phi \quad \text{für alle } \delta x, \delta y, \delta z$$

folgen für ein Medium, das alle stetigen virtuellen Verrückungen gestattet, durch Gleichsetzung der Koeffizienten der $\delta x, \ldots$ und ihrer Ab-

---

lierung des von altersher in der Mechanik üblichen Prozesses der Umwandlung von Funktionen eines Gebietes (wie Masse u. dgl.) in bestimmte Integrale vor. Übrigens braucht man die gleichmässige Konvergenz von $\Phi^* : V^*$ nur für eine bestimmte, V im Limes erschöpfende Einteilung vorauszusetzen und kann ausserdem natürlich Unterbrechungen der Stetigkeit und gleichmässigen Konvergenz an einzelnen Flächen zulassen.

87) Es kommt hier lediglich das in der Variationsrechnung übliche Verfahren zur Bildung der ersten Variation mehrfacher Integrale in Betracht, wie es *Lagrange* (Misc. Taur. 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 353) zuerst ausgebildet und in der Méc. anal. vielfach angewendet hat.

leitungen unmittelbar die Stoffgleichungen. Verwendet man für δA etwa den Ansatz Nr. 3c, (7), so wird[88])

$$(4)\qquad \varrho_0 X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad X_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \quad \begin{pmatrix} x, y, z \\ X, Y, Z \end{pmatrix}; a, b, c\Big);$$

geht man mittels (8) von Nr. 3c und (1) zu den auf die deformierte Lage bezogenen Grössen über, so erhält man[89]):

$$(5)\qquad \begin{cases} \varrho X = -\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}, \\ X_x = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_a}\cdot x_a + \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_b} x_b + \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_c} x_c + \overline{\varphi}, \\ X_y = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_a} y_a + \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_b}\cdot y_b + \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_c}\cdot y_c, \\ X_z = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_a} z_a + \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_b} z_b + \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_c} z_c. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$$

Damit sind die sämtlichen in Nr. 5 betrachteten Stoffgleichungen auf die einzige Gleichung (2) zurückgeführt, die φ bzw. $\overline{\varphi}$ als skalare Funktion des lokalen Deformationszustandes giebt.

Hängt die Energiedichte (2) *auch von den zweiten Ableitungen* $x_{aa}, x_{ab}, \ldots$ der Deformationsfunktionen ab — was wiederum nur bei sehr rascher Änderung des Zustandes mit dem Orte in Betracht kommt —, so werden in $\delta \Phi$ neue Glieder mit den zweiten Ableitungen der virtuellen Verrückungen $\delta x_{aa} = \frac{\partial^2 \delta x}{\partial a^2}, \cdots$ auftreten, und das kommt gerade auf die in Nr. 4a besprochenen Zusatzglieder zu dem ursprünglichen Ausdruck der virtuellen Arbeit hinaus; alsdann hängen sowohl die Komponenten dieser neuen Wirkung, deren Ausdrücke durch φ sich unmittelbar ergeben, wie die alten Spannungskomponenten, deren Ausdrücke leicht zu modifizieren sind, auch von den zweiten Ableitungen $x_{aa}, \ldots$ ab.

Ein spezieller Fall, der sich hier einordnet, sei besonders hervorgehoben: dass nämlich zu dem Potential (1) ein *Integral über die Oberfläche des Kontinuums* additiv hinzutritt:

$$(6)\qquad \Phi_1 = \iint\limits_{(S)} \overline{\psi}\, dS = \iint\limits_{(S_0)} \psi\, dS_0,$$

wobei die „Flächendichte“ $\overline{\psi}$ bzw. ψ des Potentials von den Werten der

88) *G. Kirchhoff*, Sitzungsber. d. Akad. Wien, math.-nat. Kl. 9 (1852), p. 772.

89) *J. Boussinesq*, Mém. prés. p. div. sav., Paris 20 (1872), note 3, p. 591. Hier ist nur φ statt $\overline{\varphi}$ verwendet, aber, was das Wesentliche ist, es werden zum erstenmal die Komponenten $X_x, \ldots$ statt $X_a, \ldots$ bestimmt. Diese Formeln sind übrigens in der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen wiederholt neu hergeleitet und ausgebildet worden.

Deformationsfunktionen und ihrer *ersten* Ableitungen an der Oberfläche S abhängt; ein solches Potential kann analog dem obigen die Form (1) bestimmenden Axiom dadurch charakterisiert werden, dass sich $\Phi_1{}^* : S^*$ einem endlichen Werte $\overline{\psi}$ nähert, wenn sich das Oberflächenstück S^* um eine Stelle zusammenzieht. Man kann (6) tatsächlich in ein Raumintegral über V oder einen Teilraum umformen, wenn man zweite Ableitungen $x_{aa}, \ldots$ hinzunimmt. Übrigens kann man $\delta\Phi_1$ auch direkt bilden und bekommt dann für die virtuelle Arbeit unmittelbar ein Glied der in Nr. **4** a, (1) betrachteten Form.

Hängt ψ speziell nur von den Werten der Deformationsfunktionen x, y, z selbst, nicht von ihren Ableitungen ab, so hat $\delta\Phi_1$ gerade die Form der Arbeit δA_3 der an der Oberfläche des Kontinuums angreifenden Druckkräfte (Nr. **3**, (1)), und zwar werden deren Komponenten

$$\text{(6a)} \qquad \overline{X} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}, \quad \overline{Y} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial y}, \quad \overline{Z} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z}.$$

Man kann diese Potentialansätze leicht derart ausdehnen, dass sie Kraftwirkungen von der in Nr. **6** betrachteten allgemeineren Gestalt (4) liefern. Man braucht dazu nur, nach dem Vorgange von *P. Duhem*[90]), an die Stelle des Axioms von der additiven Zusammensetzung der Potentiale der Teilbereiche zum Gesamtpotential die Annahme zu setzen, *dass bei einer Zerlegung des Kontinuums in n Teilbereiche $V_1, \ldots, V_n$ das Potential Φ eine Doppelsumme*

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} \Phi_{ik}$$

von n^2 Summanden wird, deren jeder Φ_{ik} nur von dem Zustand zweier Teilbereiche V_i, V_k abhängt. Unter Hinzunahme ähnlicher Stetigkeitsannahmen, wie oben angedeutet, wird dann Φ gleich einem sechsfachen, zweimal über V bzw. V_0 ausgedehnten Integral, dessen Integrand von den Werten der Deformationsfunktionen und ihrer Ableitungen in zwei Argumentpunkten a, b, c und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ abhängt[91]):

$$\text{(7)} \quad \Phi = \underset{(V_0)}{\iiint} \underset{(V_0)}{\iiint} \varphi(a, \ldots; x, \ldots; x_a, \ldots; \bar{a}, \ldots; \bar{x}, \ldots; \bar{x}_a, \ldots)\, da \ldots d\bar{c}$$

(Speziell kann hierin, wenn φ einen von der Stelle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ unabhängigen Summanden aufweist, auch ein Summand der Form (1) inbegriffen sein.) Die Variation von Φ wird

$$\delta\Phi = \underset{(V_0)}{\iiint} \underset{(V_0)}{\iiint} \Big\{ \sum_{(xyz)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}}\delta\bar{x} \Big) + \sum_{(xyz;\, abc)} \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\delta x_a + \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}_a}\delta\bar{x}_a \Big) \Big\}\, da \ldots d\bar{c},$$

90) *P. Duhem,* l. c., p. 188.

91) *P. Duhem,* l. c., p. 205.

und aus der Identität (3) folgen daher für ein Medium, das alle stetigen virtuellen Verrückungen gestattet, als Kraft- und Spannungskomponenten an der Stelle a, b, c:

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho_0 X = -\iiint\limits_{(V_0)} \frac{\partial(\varphi+\varphi_1)}{\partial x}\, d\bar a\, d\bar b\, d\bar c, \\ X_a = \iiint\limits_{(V_0)} \frac{\partial(\varphi+\varphi_1)}{\partial x_a}\, d\bar a\, d\bar b\, d\bar c; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ X, & Y, & Z \end{pmatrix}; a, b, c$$

dabei bedeutet φ_1 die aus φ durch Vertauschung der überstrichenen und nicht überstrichenen Argumente entstehende Funktion. Wie oben ergeben sich hieraus sofort die Stoffgleichungen, die $X_x, \ldots$ mit Hilfe der einen Funktion φ ausdrücken; *P. Duhem* hat dies unter speziellen, den Verhältnissen der reinen Elastizitätstheorie entsprechenden Annahmen ausführlich entwickelt.[92]) Ansätze von dieser Art sind es im Grunde, die bei dem Aufbau der Mechanik der Kontinua auf *Molekularvorstellungen* vielfach benutzt werden.[93]) Die Doppelsummen, die man da für die Potentiale von Molekülsystemen ansetzt, werden durch die Grenzübergänge gerade zu Integralen vom Typus (7), und die Aufgabe der Theorie ist es, solche Annahmen zu formulieren, daß sie sich bei richtiger Führung der Grenzübergänge in Potentiale der einfachen Formen (1) bzw. (6) transformieren; man vergleiche etwa die Darstellung von *H. Minkowski* in V 9, Nr. **14**.

Besonders hervorzuheben ist wieder die Gestaltung der Potentialansätze in dem Falle *„unendlichkleiner" Deformation des Kontinuums* (Nr. **6**, (6)). Die Ausdrücke der Kraft- und Spannungskomponenten werden nach (4), bei Vernachlässigung quadratischer Glieder in σ[94]),

$$(9a)\qquad \varrho_0 X = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial u}, \quad X_a = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial u_a} \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ X, & Y, & Z \end{pmatrix}; a, b, c\Big);$$

dabei bedeutet $\tilde\varphi$ diejenigen in σ linearen und quadratischen Gliedern der Potenzentwicklung der Energiedichte φ, die von den in σ linearen Gliedern der Reihe (6) von Nr. **6** herrühren:

$$(9b)\qquad \tilde\varphi = \varphi^0 + \sigma(\varphi^0_x u + \cdots + \varphi^0_{x_a} u_a + \cdots)$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\left(\varphi^0_{xx}u^2 + 2\varphi^0_{xy}uv + \cdots + 2\varphi^0_{xx_a}uu_a + \cdots + \varphi^0_{x_a x_a}u_a^2 + 2\varphi^0_{x_a x_b}u_a u_b + \cdots\right),$$

---

92) *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm., (3) 21 (1904), p. 117 ff. Auch separat: Récherches sur l'élasticité, Paris 1906.

93) Z. B. in der *Navier*schen Theorie des elastischen Potentials (vgl. IV 23, Nr. 5a, *Müller-Timpe*) und in der Theorie der Kapillarität von *P. S. Laplace* und *C. Fr. Gauss* (vgl. V 9, Nr. **13**, *Minkowski*).

94) *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie de l'Élasticité, Paris 1892, p. 54 ff.; *E.* u. *F. Cosserat*, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse 10 (1896), p. J. 70 ff.

worin die mit der Marke 0 versehenen Ableitungen von φ für $\sigma = 0$, d. h. für die Argumente $x = a, \ldots, x_a = 1,\ x_b = 0, \ldots$ zu nehmen sind. Die Ausdrücke (9a) haben in der Tat den in Nr. 6, (3′) betrachteten Typus des *Hooke*schen Gesetzes; vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass die $\tilde{\varphi}$ zusammensetzenden Glieder der Entwicklung von φ nicht identisch verschwinden. Die auf die deformierte Lage des Kontinuums bezogenen Spannungskomponenten $X_x, \ldots$ unterscheiden sich gemäß Nr. 3c, (8) von den $X_a, \ldots$ um folgende in σ lineare Ausdrücke:

$$(10) \qquad X_x - X_a = \sigma(-\varphi^0_{x_a}(v_b + w_c) + \varphi^0_{x_b} u_b + \varphi^0_{x_c} u_c), \cdots,$$

und diese werden nur dann Null bzw. von der Grössenordnung σ^2 der sonst vernachlässigten Grössen, wenn die durch $\varphi^0_{x_a}, \ldots$ gegebenen „Anfangsspannungen" vor der unendlichkleinen Deformation verschwinden.[95]) — Es bedarf danach keiner genaueren Ausführungen, wie man in ähnlicher Weise den allgemeineren *Duhem*schen Potentialansatz (7), für unendlichkleine Deformationen umzubilden hat.

7b. Der Potentialansatz für Medien mit orientierten Teilchen. Nach dem Vorgange von *E.* und *F. Cosserat*[96]) kann man diesen Potentialansatz auch auf die Kontinua ausdehnen, deren Teilchen mit einer bestimmten Orientierung behaftet sind; man braucht nur anzunehmen, dass die sonst wie in Nr. 7a definierte Energiedichte φ ausser von den bisher betrachteten Grössen auch von den die momentane Orientierung des Teilchens a, b, c bestimmenden Parametern λ, μ, ν (Nr 2b, (9)) und deren (ersten) Ableitungen nach a, b, c abhängt:

$$(11) \qquad \varphi = \varphi(\lambda(a, b, c), \ldots; \lambda_a(a, b, c), \ldots, \nu_c(a, b, c)).$$

Eine virtuelle Drehung der einzelnen Teilchen Nr. 2 (10) liefert zur Variation des Potentials dann den folgenden Beitrag:

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{(\lambda\mu\nu)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a}\delta\lambda_a + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_b}\delta\lambda_b + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_c}\delta\lambda_c\right) da\, db\, dc.$$

Führt man nun vermöge Nr. 2, (11), (12) die Winkelgeschwindigkeiten $\delta\pi, \delta\varkappa, \delta\varrho$ der virtuellen Verdrehung ein und beachtet, dass

$$\delta\lambda_a = \frac{\partial\delta\lambda}{\partial a} = \sum_{\binom{l\,m\,n}{\pi\,\varkappa\,\varrho}} \left(\frac{\partial l_1}{\partial a}\delta\pi + l_1\frac{\partial\delta\pi}{\partial a}\right) \qquad \left(\begin{matrix}\lambda, \mu, \nu\\ 1, 2, 3\end{matrix};\quad a, b, c\right),$$

so ergeben sich durch Identifikation von $-\delta\Phi$ mit dem Arbeitsausdruck Nr. 4, (2) bzw. (2′) die folgenden Formeln für die auf die

95) *J. Boussinesq,* a. a. O.[89]), p. 598; *E. u. F. Cosserat,* l. c., p. J. 74 f.
96) *E.* u. *F. Cosserat,* „Corps déformables"[5]), chap. IV, p. 122 ff.

Massen- und Flächenelemente wirkenden Drehmomente[97]):

$$(12)\begin{cases}\varrho_0 L = -\sum\limits_{\binom{\lambda\mu\nu}{1\,2\,3}}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\cdot l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a}\frac{\partial l_1}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_b}\frac{\partial l_1}{\partial b} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_c}\frac{\partial l_1}{\partial c}\right\}, & \binom{L, M, N}{l,\ m,\ n}; a, b, c\\ L_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_a} l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_a} l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_a} l_3. \end{cases}$$

Es ist vielfach zweckmäßig, in diese Formeln die den $\delta\pi$, $\delta\varkappa$, $\delta\varrho$ analogen Winkelgeschwindigkeiten einzuführen, die bei der Überführung des zu einem Teilchen gehörigen Dreikantes in das eines Nachbarteilchens auftreten; wir betrachten speziell die in der Richtung der Parameterlinien a, b, c benachbarten Teilchen, also die Winkelgeschwindigkeitskomponenten

$$(13)\quad p_a = \sum_{(1\,2\,3)} \beta_1 \frac{\partial\gamma_1}{\partial a},\ q_a = \sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial a},\ r_a = \sum_{(1\,2\,3)} \alpha_1 \frac{\partial\beta_1}{\partial a} \qquad (a,\ b,\ c).$$

Dann hat man analog den Relationen (12) von Nr. 2

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a} = l_1 p_a + m_1 q_a + n_1 r_a \qquad \binom{\lambda,\ \mu,\ \nu}{1,\ 2,\ 3};\ a,\ b,\ c\Big),$$

und kann in dem Ausdruck (11) der Energiedichte die $\lambda_a, \ldots \nu_c$ durch die Winkelgeschwindigkeiten $p_a, \ldots, r_c$ ersetzen:

$$(14)\qquad \varphi = \varphi(\lambda,\ \mu,\ \nu;\ p_a,\ p_b, \ldots, r_c).$$

Bildet man aus diesem Ausdruck $\delta\Phi$ und berücksichtigt die aus (13) folgenden Relationen (das Analogon der sog. „Übergangsgleichungen"[98]) der Kinetik)

$$\delta p_a = \frac{\partial\,\delta\pi}{\partial a} + r_a\,\delta\varkappa - q_a\,\delta\varrho \qquad \binom{p,\ q,\ r}{\pi,\ \varkappa,\ \varrho};\ a,\ b,\ c\Big),$$

so ergiebt sich durch analoge Betrachtungen, wie sie zu (12) führten[97]):

$$(15)\begin{cases}\varrho_0 L = -\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} l_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} l_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} l_3 + \sum\limits_{(a\,b\,c)}\left(q_a \frac{\partial\varphi}{\partial r_a} - r_a \frac{\partial\varphi}{\partial q_a}\right)\right\} & \binom{L, M, N}{l,\ m,\ n,}\\ L_a = \frac{\partial\varphi}{\partial p_a}. & \binom{L, M, N}{p,\ q,\ r};\ a,\ b,\ c\Big)\end{cases}$$

Der Übergang zu den auf das deformierte Kontinuum bezogenen Drehmomentkomponenten $L_x, \ldots, N_z$ ist mit Hilfe von Nr. 4b, (5) leicht zu vollziehen.

---

97) Diese Formeln finden sich in dem *Cosserat*schen Buche nicht explizit angegeben, da dort die unten ausgeführte Annahme eines „Euklidischen" Potentiales an der Spitze steht; sie sind indessen in den Gleichungen von p. 132 ff. und 141 bzw. p. 130 ff. und 134 ff. enthalten; die Identifizierung geschieht am leichtesten von den p. 138 ff. angegebenen Formeln für die Arbeit aus.

98) Sie gehen in diese über, wenn a durch den Zeitparameter ersetzt wird; vgl. IV 6 (*P. Stäckel*), Nr. **30**, p. 584 f. und Anm.[417]) sowie IV 11 (*K. Heun*), Nr. **14** c.

E. und *F. Cosserat* betrachten insbesondere die durch diesen Ansatz dargestellten *inneren Wirkungen* in einem Medium, bei denen φ als Funktion der $x, \ldots$ und $\lambda, \ldots$ invariant gegen rechtwinklige Koordinatentransformationen im x-y-z-Raume ist, oder — was dasselbe bedeutet — bei denen jede Bewegung des mitsamt den adjungierten Dreikanten erstarrt gedachten Kontinuums das Potential ungeändert lässt; ein solches Potential nennen sie ein *euklidisches* (*action Euclidienne*). Um diese Klasse von Potentialen zu umschreiben, verwenden sie in jedem Punkte x, y, z als (bewegliches) Bezugssystem die momentane Lage des dem gerade dort befindlichen Teilchen angehefteten Dreikantes; an Stelle der Komponenten $p_a, \ldots, r_c$ treten die Komponenten der gleichen Winkelgeschwindigkeiten in Bezug auf diese neuen Axen:

$$(16\text{a})\quad \mathfrak{p}_a = \alpha_1 p_a + \beta_1 q_a + \gamma_1 r_a = \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial a} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial a} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}; a, b, c\Big),$$

und in gleicher Weise mögen die 9 Deformationsgrössen $x_a, \ldots, z_c$ transformiert werden in:

$$(16\text{b})\qquad \mathfrak{x}_a = \alpha_1 x_a + \beta_1 y_a + \gamma_1 z_a \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}; a, b, c\Big).$$

Dann ist das allgemeinste euklidische Potential, das höchstens von den ersten Ableitungen der Deformationsfunktionen abhängt, eine willkürliche Funktion dieser 18 *Grössen* $\mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{z}_c$, die ausserdem noch explizit a, b, c enthalten kann[99]):

$$(17)\qquad \varphi = \varphi(a, \ldots; \mathfrak{x}_a, \ldots, \mathfrak{z}_c; \mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{r}_c).$$

Zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen für diesen Ansatz führt man auch die Komponenten der virtuellen Verrückung und Verdrehung nach den neuen beweglichen Axen ein:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{x} &= \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma_1 \delta z, \\ \delta \mathfrak{i} &= \alpha_1 \delta \pi + \beta_1 \delta \varkappa + \gamma_1 \delta \varrho; \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

dann hat man die „Übergangsgleichungen"

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{x}_a &= \frac{\partial \delta \mathfrak{x}}{\partial a} + \mathfrak{q}_a \delta \mathfrak{z} - \mathfrak{r}_a \delta \mathfrak{y} + \mathfrak{y}_a \delta \mathfrak{k} - \mathfrak{z}_a \delta \mathfrak{j}, \\ \delta \mathfrak{p}_a &= \frac{\partial \delta \mathfrak{i}}{\partial a} + \mathfrak{q}_a \delta \mathfrak{k} - \mathfrak{r}_a \delta \mathfrak{j} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} & \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}; & a, b, c \\ \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k} & \end{pmatrix}$$

und kann daher die Variation des mit (17) gebildeten Potentiales

$$\delta \Phi = \iiint\limits_{(V_0)} \sum_{\left(\substack{\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}}; abc\right)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}_a} \delta \mathfrak{x}_a + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}_a} \delta \mathfrak{p}_a \right) da\, db\, dc$$

---

99) *E.* u. *F. Cosserat,* „Corps déformables", p. 127.

unmittelbar mit der folgenden Form der virtuellen Arbeit vergleichen:

$$\delta A = \iiint\limits_{(V^0)} \sum_{\left(\begin{smallmatrix}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}; & \mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N} \\ \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} & \mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}\end{smallmatrix}\right)} \left\{\varrho_0 \mathfrak{X}\delta\mathfrak{x} + \varrho_0 \mathfrak{L}\delta\mathfrak{i} - \sum_{(abc)} \left(\mathfrak{X}_a \frac{\partial\delta\mathfrak{x}}{\partial a} + \mathfrak{L}_a \frac{\partial\delta\mathfrak{i}}{\partial a}\right)\right\} da\,db\,dc,$$

in der die Komponenten der früher betrachteten Kräfte, Spannungen und Momente in bezug auf das bewegliche Koordinatenkreuz auftreten. Es ergeben sich danach Formeln[100]) vom Typus

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho_0 \mathfrak{X} = \sum\limits_{(abc)} \left(\mathfrak{r}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} - \mathfrak{q}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a}\right), \quad \mathfrak{X}_a = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{x}_a} \\ \varrho_0 \mathfrak{L} = \sum\limits_{(abc)} \left(\mathfrak{r}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{q}_a} - \mathfrak{q}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{r}_a} + \mathfrak{z}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{y}_a} - \mathfrak{y}_a \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{z}_a}\right), \quad \mathfrak{L}_a = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}_a}. \end{cases}$$

7c. Der Potentialansatz für zwei- und eindimensionale Kontinua. Für die zwei- und eindimensional ausgedehnten Kontinua im dreidimensionalen Raume kann man den Potentialansatz ohne Schwierigkeit durch ganz analoge Betrachtungen gewinnen.[101]) Die Energiedichte φ — der als existierend vorausgesetzte Grenzwert des Quotienten aus dem Potential eines immer kleiner werdenden Teiles des Kontinuums und dessen Flächeninhalt bzw. Länge — wird eine gegebene Funktion der 6 Funktionen $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ von a, b (bzw. von a) und ihrer Ableitungen, das Potential selbst also ein zwei- bzw. eindimensionales Integral:

$$\Phi = \iint\limits_{(S_0)} \varphi\, da\, db \quad \text{bzw.} \quad \Phi = \int\limits_0^l \varphi\, da.$$

Die Variation dieser Potentiale und daher die auf die Anfangsparameter bezogenen Kraft-, Spannungs-, und Momentkomponenten ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Formeln des dreidimensionalen Falles durch Fortlassen der auf c bzw. b und c bezüglichen Glieder; der Übergang zu den auf den deformierten Zustand bezüglichen Grössen erfolgt dann nach Nr. 3e, (16) und Nr. 4b, (12).

Richtet man sein Augenmerk besonders auf orientierte Teilchen, so spielen die wie in Nr. 7b definierten Winkelgeschwindigkeitskomponenten $p_a, \ldots$ wieder eine wichtige Rolle, und zwar hat man jetzt natürlich nur 2 bzw. 1 Tripel dieser Grössen. *E.* und *F. Cosserat* haben die Theorie solcher Medien unter Verwendung des jedem Teilchen

100) *E.* u. *F. Cosserat,* l. c., p. 130f.; vgl. auch IV 11 (*K. Heun*), Nr. **21**.

101) Bereits *Lagrange* wendet ihn bei den von ihm behandelten Problemen aus diesem Gebiet[23]) an; er wurde dann in der Theorie der elastischen Fäden und Platten (vgl. IV 6 (*P. Stäckel*), Nr. **23**, **24** und IV 25, Kap. III, *Tedone-Timpe*), besonders aber auch in der Theorie der Kapillarität (vgl. V 9 (*Minkowski*), Nr. **2**) weiterentwickelt.

zugeordneten Dreikantes als beweglichen Bezugssystemes weitgehend ausgebaut[102]) und haben auch hier die inneren Wirkungen betrachtet, die sich aus einem wie oben definierten *euklidischen Potential* herleiten; der Ausdruck dieses Potentials und die zugehörigen Kraft-, Spannungs-, und Momentformeln ergeben sich wiederum durch Spezialisierung der Gleichungen (16)ff. von Nr. 7b.

7d. **Die Bedeutung des wirklichen Minimums.** Ein wesentlicher Vorteil der Existenz eines Potentiales Φ der gesamten Kraftwirkungen ist die Möglichkeit, die Gleichgewichtsbedingungen ohne explizite Verwendung unendlichkleiner Verrückungen auszusprechen. Die Gleichgewichtsbedingung $\delta\Phi = 0$ ist nämlich die Bedingung dafür, dass Φ für die betrachtete Deformation einen Extremwert (Maximum oder Minimum, ev. aber auch einen sog. „Sattelwert") besitzt[103]): *Für eine Gleichgewichtslage des Quantums V_0 des Kontinuums wird also das Potential von V_0 ein Extremwert (im weitesten Sinne), verglichen mit den Werten für alle benachbarten nur den etwa stattfindenden Nebenbedingungen genügenden Deformationszuständen.* Damit ordnet sich die Gleichgewichtsbedingung genau dem normalen Problem der Variationsrechnung ein, innerhalb eines gegebenen Bereiches V_0 der Variablen a, b, c die Funktionen $x, \ldots, \lambda, \ldots$ von ihnen so zu bestimmen, dass ein gewisses diese Funktionen und ihre Ableitungen enthaltendes Raum- und Oberflächenintegral ein Extremum wird — bei möglicherweise noch unbestimmten Randwerten; Differentialgleichungen und Randbedingungen, die hieraus nach den Regeln der Variationsrechnung entspringen, sind genau die früher aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen.

Besonders hervorgehoben wird oft der Fall, dass Φ nur das Potential der im Inneren des Kontinuums angreifenden Wirkungen ist; dann tritt zu $-\delta\Phi$ in der Gleichgewichtsbedingung noch ein Oberflächenintegral, die virtuelle Arbeit der am Rande angreifenden äusseren Druckkräfte, hinzu, und $\delta\Phi$ selbst verschwindet notwendig nur für diejenigen virtuellen Verrückungen, die auf S den Wert Null haben. *Für eine Gleichgewichtslage also wird das Potential Φ der im Innern von V_0 angreifenden Kräfte und Spannungen ein Extremum, verglichen mit allen benachbarten, den etwa bestehenden Nebenbedingungen*

102) Man sehe die ausführliche Darstellung in chap. II, III der „corps déformables", wo die Gleichgewichtsbedingungen solcher Medien mit euklidischem Potential bei Verwendung der verschiedenen möglichen Koordinatensysteme und unter den mannigfachsten Spezialisierungen entwickelt sind.

103) Die Bedeutung dieser Auffassung hat *Lagrange* auch für die Kontinua in der Méc. anal. nachdrücklich betont (s. 1. Part., sect. IV, § III).

genügenden Deformationszuständen, für die jedes Grenzteilchen von V_0 denselben Ort innehat wie in der Gleichgewichtslage; die Lösung dieses Variationsproblems ist natürlich nur dann bestimmt, wenn die Lage der Randteilchen, d.h. die Randwerte der Deformationsfunktionen, direkt gegeben sind.

Das Hauptinteresse, das sich mit diesen Formulierungen verknüpft, gehört der Frage, ob hier wie in der Mechanik diskreter Massen sich je nach der Art des Extremums von Φ auch die *Art des Gleichgewichts* bestimmt, insbesondere, ob das *Dirichlet*sche Stabilitätskriterium[104]) gilt, *dass für das Eintreten stabilen Gleichgewichts das Stattfinden eines wirklichen Minimums entscheidend ist.* Die allgemeine Beantwortung dieser Frage kann nur auf die Theorie der *Bewegung* des Kontinuums gegründet werden, und zwar kommt es darauf an, ob eine durch kleine Impulse aus einem Gleichgewichtszustand hervorgerufene Bewegung im Falle eines wirklichen Minimums von Φ stets in beliebiger Nähe eben dieses Deformationszustandes verläuft. Freilich kann man dabei den Begriff der „beliebigen Nähe“ verschieden interpretieren, je nachdem man die Entfernung jedes einzelnen Teilchens von seiner Gleichgewichtslage beschränkt, oder diese Forderung nur im Mittel für das ganze Kontinuum oder für einzelne Teilbereiche stellt; man erhält danach verschiedene Arten von Stabilität.

Abgesehen von den Fällen der gewöhnlichen Elastizitätstheorie, wo die Verhältnisse sehr einfach liegen[105]), sind nur für wenige Probleme Stabilitätsuntersuchungen vollständig durchgeführt worden; und meist wurde ihnen überdies das Dirichletsche Kriterium oder ein äquivalenter Satz direkt zugrunde gelegt.[106]) Unter Hinweis auf diesen Sachverhalt und auf die Schwierigkeiten, die der direkten Übertragung des Dirichletschen Beweises auf Kontinua entgegenstehen, hat *A. Kneser*[107]) die Richtigkeit des Dirichletschen Kriteriums für die Kettenlinie gezeigt; für das Problem der elastischen Linie hat den Beweis *M. Born*[108]) unter ausdrücklicher Benutzung des *Osgood*schen Satzes[109]) der Variationsrechnung in einer auch auf andere eindimensionale Probleme übertragbaren Weise erbracht. Allgemein jedoch,

104) *P. L. Dirichlet*, Journ. f. Math. 32 (1846), p. 85 = Werke II (Berlin 1897), p. 5.

105) Vgl. die Übersicht in IV 25, Nr. 21, *Tedone-Timpe*.

106) S. IV 25, Nr. 21, p. 211.

107) *A. Kneser*, Journ. f. Math. 125 (1903), p. 189.

108) *M. Born*, Untersuch. über die Stabilität der elastischen Linie. Preisschrift, Göttingen 1906, Anhang.

109) *W. F. Osgood*, Amer. Trans. 2 (1901), p. 273; vgl. II A 8a (*H. Hahn* u. *E. Zermelo*), Anm. [11]).

für mehrdimensionale Integrale, dürfte der Osgoodsche Satz und daher auch das Dirichletsche Kriterium nicht ohne weiteres gelten.[110])

7e. **Direkte Bestimmung der Spannungskomponenten.** Für manche Zwecke wichtig ist eine Umformung des Prinzips vom Energieminimum, die der sog. *kanonischen Transformation* der Dynamik diskreter Medien analog ist.[111]) Sie besteht zunächst darin — wenn wir der Kürze halber uns nur auf den ersten Fall von Nr. 7a beziehen — dass man an Stelle der 9 Ableitungen $x_a, \ldots, z_c$ als neue unbekannte Funktionen die 9 zugehörigen auf die Anfangsparameter bezogenen Spannungskomponenten

$$X_a = \frac{\partial \varphi}{\partial x_a}, \quad X_b = \frac{\partial \varphi}{\partial x_b}, \ldots, Z_c = \frac{\partial \varphi}{\partial z_c} \tag{19}$$

— unter Voraussetzung des Nichtverschwindens der entsprechenden Funktionaldeterminante — einführt. Bestimmt man sodann

$$H = \varphi - \sum_{(xyz;\,abc)} x_a X_a = H(x, \ldots; X_a, \ldots, Z_c) \tag{20}$$

als Funktion der x, y, z und der neuen Grössen $X_a, \ldots, Z_c$, so zeigt man leicht mit Hilfe der bekannten Methoden der Variationsrechnung[112]), dass das Verschwinden von $\delta \Phi$ gleichbedeutend ist mit dem Verschwinden der ersten Variation des Integrales

$$\iiint\limits_{(V_0)} \Big(H(x, \ldots; X_a, \ldots, Z_c) + \sum_{(xyz;\,abc)} \frac{\partial x}{\partial a} X_a\Big)\, da\, db\, dc, \tag{21}$$

das als unbekannte Funktionen x, y, z nebst ihren (linear auftretenden) Ableitungen und ausserdem $X_a, \ldots, Z_c$ ohne Ableitungen enthält. Daraus ergiebt sich dann die neue „kanonische" Form der im Innern geltenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \binom{X, Y, Z}{x, y, z}, \tag{22a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_a} + \frac{\partial x}{\partial a} = 0 \qquad \left(\begin{matrix}X, Y, Z\\ x, y, z\end{matrix};\ a, b, c\right). \tag{22b}$$

Die Gleichungen (22b) spielen dadurch, dass sie als Auflösung von (19) den expliziten Ausdruck der Deformation durch die Spannungskomponenten geben, in der Elastizitätstheorie eine wesentliche Rolle.

---

110) Nach mündlicher Mitteilung von *A. Haar*. *Haar* hat jedoch bewiesen, dass ein analoger Satz wieder gilt sowie hinreichend hohe Ableitungen im Integranden des Variationsproblemes auftreten (vgl. den Bericht über einen Vortrag i. d. math. Ges. Göttingen, Jahresber. d. d. Math.-Ver. 19 (1910), p. *254*.

111) Vgl. IV 12, *P. Stäckel* sowie etwa die Darstellung der *Jacobi-Hamilton*schen Theorie in II A 5, Nr. 31, *E. v. Weber*. Eine Ausdehnung auf mehrere unabhängige Veränderliche giebt *M. Born*[108]), Anhang.

112) Vgl. *M. Born,* l. c.[108]), p. 91 ff.

Das Charakteristische dieses neuen *Variationsprinzips, dass in ihm nicht sowohl die Deformationsgrössen, als vielmehr die Spannungskomponenten hervortreten,* kommt noch deutlicher in dem speziellen Fall zum Ausdruck, *dass die Energiedichte* φ *von den Werten der Deformationen* x, y, z *selbst unabhängig ist,* also nur von der Formänderung (im weitesten Sinne) abhängt. Dann enthält also H nur die Spannungskomponenten, und man kann (21) durch das folgende *Variationsprinzip mit Nebenbedingungen* ersetzen, das dem in der Theorie der Fachwerke als *Prinzip* von *L. F. Menabrea* und *A. Castigliano*[113]) bekannten analog ist: *Es soll die erste Variation des Integrales*

$$\iiint H(X_a, X_b, \ldots, Z_c)\, da\, db\, dc \tag{23}$$

verschwinden, wobei zum Vergleich alle Systeme von Funktionen $X_a, \ldots, Z_c$ *zugelassen werden, die den 3 Bedingungsgleichungen*

$$\frac{\partial X_a}{\partial a} + \frac{\partial X_b}{\partial b} + \frac{\partial X_c}{\partial c} = 0 \qquad (X, Y, Z) \tag{23a}$$

genügen; bezeichnet man mit x, y, z drei diesen Nebenbedingungen zugeordnete Lagrangesche Faktoren, so ergeben sich hieraus in der Tat die Gleichungen (22b). Durch Elimination dieser Lagrangeschen Faktoren aus (22b) folgen für die 9 unbekannten Funktionen allein die 6 Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial H}{\partial X_a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial H}{\partial X_b}\right) \qquad (a, b, c;\ X, Y, Z); \tag{24}$$

das sind die sog. *Komptabilitätsbedingungen*[114]) der Elastizitätstheorie, die ausdrücken, dass ein den Bedingungen (23a) genügendes Spannungssystem tatsächlich Gleichgewichtssystem in einem Kontinuum mit der Energiedichte φ bzw. H sein kann. — Dies *Castiglianosche Prinzip* wird besonders in solchen Fällen bedeutsam, wo in einem Medium nur Spannungen gewisser Art stattfinden können; die diese Einschränkungen darstellenden Bedingungen können ihm ohne weiteres als Nebenbedingungen hinzugefügt werden.[115])

7f. **Die entsprechenden Ansätze für die Kinetik.** Auch bei bewegten Medien kommen in erster Linie die bisher betrachteten

---

113) *L. F. Menabrea,* Torino Mem. (2) 25 (1871), p. 141 und *A. Castiglano,* Théorie d'équilibre des systèmes elastiques (Turin 1879); vgl. IV 29a, Nr. 7ff., *M. Grüning.* Vgl. auch *E.* und *F. Cosserat,* Corps déform., p. 26ff. für den Fall des eindimensionalen Kontinuums.

114) S. IV 24, Nr. 7a, *Tedone*; vgl. auch *A. Haar* u. *Th. v. Kármán,* Gött. Nachr., math.-phys. Kl. 1909, p. 204ff.

115) *Haar* u. *Kármán,* l. c.[114]), p. 212.

Wirkungen in Betracht, in die nur t als Parameter eingeht. Fasst man zunächst den Ansatz von Nr. 7a mit dem Ausdruck des *Hamiltonschen Prinzips* Nr. 5, (5), (6) zusammen, so ergiebt sich der der Formulierung von 7d analoge Satz: *Für die wirkliche Bewegung des Kontinuums V_0 im Zeitintervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ hat das vierfache Integral*

$$(25) \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \left\{ \tfrac{1}{2} \varrho_0 (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \varphi \right\}$$

einen Extremwert gegenüber seinen Werten für alle benachbarten, den etwa stattfindenden Nebenbedingungen genügenden Bewegungen, die zu den Zeiten t_0 und t_1 das Kontinuum in derselben Lage belassen.

Diesen Ansatz kann man, wie man es im Falle endlich vieler Freiheitsgrade tut, sofort wesentlich ausdehnen, indem man von der speziellen Abhängigkeit des Integranden von den zeitlichen Ableitungen abgeht. Man braucht dazu, um sogleich auch den Fall orientierter Teilchen mit zu umfassen, nur an die Formeln (10), (12) von Nr. 5d anzuschliessen und analog wie im Anfang von Nr. 7a zu fordern: *Die virtuelle Arbeit des bewegten Kontinuums im Zeitintervall t_0, t_1 soll für jede virtuelle Verrückung gleich sein der Variation eines einzigen nur von dem jeweiligen Bewegungszustande abhängigen Ausdruckes,* der speziell ein vierfaches Integral über eine bekannte Funktion der Bewegungsfunktionen und ihrer zeitlichen und räumlichen Ableitungen sei:

$$(26) \quad \Phi = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_{(V_0)} dV_0 \, \varphi(a, b, c, t; x, \ldots, \nu; x_a, \ldots, \nu_c; x', \ldots, \nu'; x_a', \ldots, \nu_c'),$$

und *Wirkungsintegral* (*action*) heisse.[116] Dann bleiben die Formeln für Kraft-, Spannungs- und Momentkomponenten im wesentlichen umgeändert, nur für die Impulskomponenten treten die Gleichungen hinzu

$$(27) \quad X_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'}, \; L_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda'} l_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu'} l_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} l_3 \qquad \left(x, y, z; \begin{matrix} L, M, N \\ l, m, n \end{matrix}\right).$$

E. und *F. Cosserat*[117]) haben auch hier die Annahme eines „*euklidischen Potentiales*" verfolgt, das sich bei einer jeden Bewegung des samt seinen Dreikanten erstarrt gedachten Kontinuums nicht ändert; es wird ausser den Grössen (16) noch die (nichtholonomen) Geschwindigkeitskoordinaten in bezug auf das bewegliche Koordinatensystem

$$(28) \quad \mathfrak{x} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \quad \mathfrak{p} = \alpha_3 \alpha_2' + \beta_3 \beta_2' + \gamma_3 \gamma_2' \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r} \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

---

116) Vgl. *E.* und *F. Cosserat,* Corps déform., p. 4.

117) „Corps déformables", p. 156 ff.

enthalten, und hiernach lassen sich die in die Bewegungsgleichungen eingehenden Komponenten analog (18) unmittelbar bestimmen.

Auch hier lässt sich analog zu Nr. 7e die kanonische Transformation durchführen; transformiert man nur in Hinblick auf die zeitlichen Ableitungen, so entsteht, falls φ von t unabhängig ist, in

$$E = \varphi - \sum_{(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})} \mathfrak{x} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{x}} - \sum_{(\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r})} \mathfrak{p} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{p}}$$

die *Energiedichte des bewegten Systems.*[118])

Neben dieser weittragenden Verallgemeinerung ist noch eine speziellere Art des Eingehens der *zeitlichen* Ableitungen der Bewegungsfunktionen in die Wirkungskomponenten hervorzuheben, wie sie bei *Reibungswirkungen* u. dgl. auftritt und bei der ein dem Potentialansatz in gewisser Weise analoger Ansatz auftritt. Beschränken wir uns darauf, dass die Spannungsdyade einen von den zeitlichen Ableitungen der 9 Deformationsgrössen $x_a', \ldots, z_c'$ abhängigen Teil enthält, so handelt es sich um die Besonderheit, dass die Spannungskomponenten gerade die Ableitungen einer bekannten Funktion $F(x_a', x_b', \ldots, z_c')$ nach $x_a', \ldots, z_c'$ sind:

$$(29) \qquad X_a = \frac{\partial F}{\partial x_a'}, \quad X_b = \frac{\partial F}{\partial x_b'}, \ldots, \quad Z_c = \frac{\partial F}{\partial z_c'}.$$

Zu der während der wirklichen Bewegung geleisteten Arbeit liefert diese Spannungsdyade den Beitrag (auf die Zeiteinheit berechnet):

$$(30) \qquad -\sum_{(xyz;\,abc)} X_a \frac{dx_a}{dt} = -\sum_{(xyz;\,abc)} \frac{\partial F}{\partial x_a'} \cdot x_a' = -D(x_a', \ldots, z_c').$$

Ist D eine positiv definite Funktion seiner 9 Argumente, so wird während der Bewegung durch die Spannungen $X_a, \ldots$ stets Arbeit verzehrt, und zwar in einem durch die Funktion D gemessenen Betrage; D heisst die zu der Spannung gehörige *Dissipationsfunktion.*[119]) Tatsächlich wird übrigens lediglich der Fall benutzt, dass F eine quadratische Funktion der $x_a', \ldots$ ist; dann ist auch

$$(29') \qquad X_a = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x_a'}, \quad X_b = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial x_b'}, \ \ldots, \quad Z_c = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial z_c'}.$$

In ganz ähnlicher Weise kann man auch die Abhängigkeit von höheren zeitlichen Ableitungen in Betracht ziehen und die zugehörigen Dissipationsfunktionen bestimmen; für lineare Abhängigkeit der $X_a, \ldots$ von den Ableitungen hat das *W. Voigt*[120]) durchgeführt.

---

118) *M. Born,* l. c. p. 94f.; *E.* und *F. Cosserat,* Corps déform., p. 171, 219.

119) Lord *Rayleigh* (*J. W. Strutt*), Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357.

120) *W. Voigt,* Kompendium I, p. 459 ff.; Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig 1910, p. 792 ff.

8. Grenzfälle des gewöhnlichen dreidimensionalen Kontinuums. Endlich bleibt noch zu erörtern, wie man durch gewisse typische Grenzübergänge aus der Theorie des *freien dreidimensionalen* Kontinuums die bisher ohne direkten Zusammenhang mit ihr in rein formaler Analogie aufgestellten Ansätze für Kontinua anderer Art gewinnen kann; dabei genüge es, alles auf den Fall der Existenz eines Potentials der einfachsten Art (Nr. 7a, Anfang) zu beziehen.

8a. Unendlichdünne Platten und Drähte. In erster Linie handelt es sich um die Theorie der Medien, deren Ausdehnung nach einer oder zwei Dimensionen hin als unendlichklein angesehen werden kann (Platten und Drähte). In Wahrheit liegt hier jedesmal ein *dreidimensional* ausgedehntes Gebiet $\mathfrak{V}$ vor, das von einem jene sehr kleinen Ausdehnungen messenden Parameter ε abhängt; die abstrakten Grenzfälle *unendlichkleiner* Ausdehnung werden wir darstellen, wenn wir eine ganze Schar von Gebieten $\mathfrak{V}$ betrachten, die sich im Limes $\varepsilon = 0$ dem bei der direkten Behandlung (s. Nr. 2c) zugrunde gelegten Flächen- oder Linienstück — wir dürfen noch annehmen: gleichmässig — annähern. Auf Grund dieser Vorstellung kann man die Theorie der Platten und Drähte an die Theorie der dreidimensionalen Kontinua anschliessen, und tatsächlich hat bereits *S. D. Poisson* in einem Falle[121]) konsequent diesen Weg eingeschlagen: Man wird die charakteristischen Grössen für das Gebiet $\mathfrak{V}$ als Funktion von ε darstellen und dann durch ebenjenen Prozess $\lim \varepsilon = 0$ bzw. durch Beschränkung auf die ersten Glieder der Reihenentwicklung nach ε zu den für den Grenzfall geltenden Gesetzen gelangen. Axiomatisch gesprochen würde dieses Verfahren die Konsequenz eines *allgemeinen Stetigkeitspostulates* sein, das man so formulieren kann: In einem Medium, dessen Gestalt oder physikalisches Verhalten von einem kontinuierlich variablen Parameter abhängt, ändern sich die Zustandsgleichungen ausnahmslos stetig mit diesem Parameter.

Die Ausführung dieses Verfahrens möge an das Variationsprinzip angeschlossen werden[122]). Als typisches Beispiel werde ein Medium

121) Bei der Behandlung des Problems der elastischen Platte; Mém. de l'Acad., Paris 8 (1829), p. 523 ff.

122) Solche Reihenentwicklungen und Grenzbetrachtungen liegen mehr oder weniger ausgesprochen allen Theorien der Platten und Drähte seit *Poisson* zugrunde (s. IV 25, Nr. **13** ff., *Tedone-Timpe*); nur wird die Übersicht dadurch erschwert, daß man sich von vornherein auf unendlichkleine Deformationen in kleinen Teilgebieten beschränkt und erst hinterher unter Heranziehung von Hilfshypothesen zu der endlichen Deformation des Ganzen übergeht. Der Text folgt der Darstellung, die *C. Carathéodory* in einer Göttinger Vorlesung im W.-S. 1906/7 für die elastischen Linie vorgetragen hat.

betrachtet, das im Anfangszustande das über einem Flächenstück S_0 der a-b-Ebene gelegene Gebiet $-\varepsilon \leqq c \leqq +\varepsilon$ erfüllt; sein Potential sei:

$$\Phi = \iint\limits_{(S_0)} da\,db \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dc\,\varphi(a, b, c;\, x, \ldots;\, x_a, \ldots). \tag{1}$$

Die Gleichgewichtsfunktionen $x = x(a, b, c), \ldots$, die unter gewissen Randbedingungen Φ zum Minimum machen, werden nun von ε abhängen; sie mögen in eine Potenzreihe in ε und c entwickelbar sein:

$$x = x^{(0)}(a, b) + c x_c^{(0)}(a, b) + \varepsilon x^{(1)}(a, b) + \varepsilon c x_c^{(1)}(a, b) + \cdots \qquad (x, y, z). \tag{2}$$

Führt man diese Ausdrücke in φ ein und entwickelt danach φ selbst nach Potenzen von ε und c, so ergiebt sich für Φ eine Reihe

$$\Phi = \varepsilon \iint\limits_{(S_0)} \varphi_0\, da\, db + \varepsilon^2 \iint\limits_{(S_0)} \varphi_1\, da\, db + \cdots, \tag{3}$$

wo

$$\varphi_0 = 2\varphi\left(a, b, 0;\, x^{(0)}, \ldots;\, \frac{\partial x^{(0)}}{\partial a},\, \frac{\partial x^{(0)}}{\partial b},\, x_c^{(0)}, \ldots\right)$$

lediglich von den Funktionen $x^{(0)}, \ldots$, ihren ersten partiellen Ableitungen nach a, b und den Funktionen $x_c^{(0)}, \ldots$ abhängt, während in $\varphi_1, \ldots$ immer mehr der als Entwicklungskoeffizienten der Reihen (2) auftretenden Funktionen von a, b eingehen können. Die eigentliche Aufgabe ist nun, die durch die Grenzfunktionen

$$\lim_{\varepsilon = 0} x(a, b, 0) = x^{(0)}(a, b) \qquad (x, y, z)$$

bestimmte Gleichgewichtslage der „unendlichdünnen" Platte (bzw. ihrer Mittelebene $c = 0$) zu ermitteln. Daneben kann aber auch die Bestimmung weiterer Glieder der Reihen (2) wichtig werden, z. B. der Funktionen $x_c^{(0)}(a, b)$, die die neue Lage der ursprünglichen Normalen der Platte d. h. die Verbiegung ihres Materials gegen die geometrische Gestalt der Mittelebene bestimmen. Diese Funktionen gehören tatsächlich zu den Bestimmungsstücken der Deformation, eben weil es sich in Wahrheit nicht um ein *streng* ein- bzw. zweidimensionales Medium handelt; bei der direkten Theorie werden sie durch das *Cosserat*sche Dreikant geliefert.

Da nun Φ für jedes ε unter den angenommenen Randbedingungen ein Minimum werden soll, so muss nach (3) *in erster Linie* auch $\iint\limits_{(S_0)} \varphi_0\, da\, db$ ein Minimum werden; dies ist aber gerade eine Bedingung für jene Funktionen $x^{(0)}(a, b), \ldots,\, x_c^{(0)}(a, b), \ldots$, wobei zum Vergleich alle die Funktionen zuzulassen sind, welche die aus den gegebenen Randbedingungen mittels (2) für $x^{(0)}, \ldots, x_c^{(0)}$ folgenden Randbedingungen erfüllen.

Es ist nun möglich, dass hierdurch die Funktionen $x^{(0)}, \ldots$ noch nicht völlig bestimmt werden, sondern dass sich nur gewisse Relationen zwischen ihnen ergeben. Beschränkt man sich alsdann auf Funktionen, die diesen Relationen genügen, so folgt *zweitens*, dass $x^0(a, b), \ldots$ und die weiterhin noch in φ_1 eingehenden Funktionen auch das zweite Glied der Reihe (3), $\iint\limits_{(S_0)} \varphi_1 \, da \, db$, zum Minimum machen, wobei sich die Randbedingungen analog wie vorhin ergeben; lassen jene Relationen etwa die Elimination von $x_c^{(0)}, \ldots$ zu, so kann dies neue Variationsprinzip höhere Ableitungen der Funktionen $x^{(0)}, \ldots$ enthalten. Fährt man ev. mit dieser Schlussweise fort, so bekommt man für die Funktionen $x^0, \ldots$ eine *Reihe zweidimensionaler Variationsprobleme*, die *höhere Ableitungen* enthalten und zu denen *Nebenbedingungen* hinzutreten können.

Bei der Durchführung dieses Ansatzes entsteht jedoch eine wesentliche Schwierigkeit: es wird hierbei für die Lösung des dreidimensionalen Problems Entwickelbarkeit in eine Reihe der Form (2) vorausgesetzt, d. h. es wird ein bestimmtes reguläres Verhalten dieser Lösungen als Funktionen eines in der Randgleichung des Kontinuums enthaltenen Parameters ε gefordert. Nun braucht der Wert $\varepsilon = 0$ für Probleme dieser Art nicht nur keine reguläre Stelle zu sein, sondern er könnte sogar eine wesentlich singuläre Stelle sein[123]); die Möglichkeit einer Entwicklung (2) bleibt also zunächst durchaus problematisch. Solange daher nicht die Abhängigkeit der Lösungen von Parametern in den Randbedingungen eingehend erforscht ist, ist auf diesem Wege eine völlig befriedigende, über die Aufdeckung des formalen Zusammenhanges mit den Eigenschaften der dreidimensionalen Medien hinausgehende Theorie der Platten und Drähte nicht zu erzielen, und die direkten Ansätze, wie sie besonders *E.* und *F. Cosserat* ausgebildet haben (s. Nr. 3e, 7c) bleiben vorläufig das einzige Auskunftsmittel.

8b. Medien mit einer kinematischen Nebenbedingung. Prinzipiell gleichwertige Betrachtungen kann man anstellen, um aus der Theorie des frei deformierbaren Kontinuums die Gesetze solcher Medien abzuleiten, die Nebenbedingungen unterworfen sind, und für die der direkte Ansatz in Nr. 4c gegeben wurde. Es handele sich, um wieder nur einen typischen einfachen Fall zu erörtern, um ein Medium $\mathfrak{M}$, zwischen dessen Deformationsgrössen die Nebenbedingung

$$(4) \qquad \omega(x, \ldots; x_a, x_b, \ldots) = 0$$

besteht, die übrigens ev. auch $a, \ldots$ explizit enthalten kann. In

123) *E.* und *F. Cosserat,* Paris C. R. 145 (1907), p. 1139; 146 (1908), p. 169.

Wahrheit wird nun ein solches Medium in der Natur niemals streng realisiert sein, vielmehr liegt hier wiederum nur eine Abstraktion aus der Betrachtung solcher Medien $\mathfrak{M}_\varepsilon$ vor, die die Relation (4) *nahezu* erfüllen. $\mathfrak{M}_\varepsilon$ mag durch ein Potential von der Gestalt Nr. 7, (1) mit der Energiedichte φ_ε charakterisiert sein, und es soll von einem Parameter ε derart abhängen, dass für jede Gleichgewichtslage durchweg

(5) $$\omega(x, \ldots; x_a, \ldots, z_c)| < \varepsilon$$

bleibt. Solche Medien $\mathfrak{M}_\varepsilon$ betrachten wir nun für eine Schar gegen 0 konvergierender Werte des Parameters ε; nach dem oben ausgesprochenen allgemeinen Stetigkeitspostulat (S. 658) werden dann in der Grenze $\varepsilon = 0$ die Gesetze des Verhaltens von $\mathfrak{M}$ folgen[124]).

φ_ε ist folgendermassen charakterisiert: es hänge ausser von den Deformationsfunktionen und ihren Ableitungen auch noch von dem Ausdruck ω explizit ab:

(6a) $$\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)).$$

Betrachtet man φ_ε speziell als Funktion des letzten Argumentes ω, so soll $\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \omega}$ mit wachsendem ω stets wachsen, für $\omega = 0$ identisch in allen andern Argumenten verschwinden und in jedem 0 nicht enthaltenden Intervall für $\lim \varepsilon = 0$ gleichmässig den Grenzwert $\pm \infty$ (je nachdem $\omega \gtrless 0$) haben; ferner soll für den Wert $\omega = 0$ φ_ε gleichmässig in dem in Betracht kommenden Variabilitätsbereich einen Limes haben:

(6b) $$\lim_{\varepsilon = 0} \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; 0) = \varphi_0(x, \ldots; x_a, \ldots).$$

Ein Beispiel einer derartigen Funktion wäre $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon}$.

Die Gleichgewichtsdeformation von $\mathfrak{M}_\varepsilon$ wird nun, unter den betr. Randbedingungen, durch das Variationsprinzip

(7) $$\delta \iiint\limits_{(V_0)} \varphi_\varepsilon(x, \ldots; x_a, \ldots; \omega(x, \ldots; x_a, \ldots)) \, da\, db\, dc = 0$$

bestimmt. Zur Vorbereitung des Grenzüberganges dient eine der kano-

---

124) Ein solcher Grenzübergang hat offenbar *Lagrange* vorgeschwebt, als er in seiner analytischen Mechanik den zu $\omega = 0$ gehörigen Multiplikator als „Kraft" bezeichnet, die die Funktion ω zu ändern bestrebt ist; man vergleiche insbesondere die Sect. II, Nr. 9, Sect. IV, Nr. 6, 18, Sect. V, Nr. 53, Sect. VII, Nr. 21 des ersten Teiles, sowie die Noten von *J. Bertrand* hierzu — näher ausgeführt ist der Übergang indessen nicht. Die Darstellung des Textes ist nach Hinweisen ausgestaltet, die *D. Hilbert* in einer Göttinger Vorlesung im W.-S. 1906/7 für die Behandlung der inkompressiblen Flüssigkeiten gegeben hat.

nischen Transformation der Mechanik analoge Transformation[112]): aus

(8a) $$\frac{\partial \varphi_\varepsilon(x,\ldots;x_\alpha,\ldots;\omega)}{\partial \omega} = \lambda$$

wird ω als Funktion von λ sowie $x,\ldots; x_\alpha,\ldots$ ausgedrückt:

(8b) $$\omega = \overline{\omega}_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \lambda)$$

und damit der Ausdruck

(9) $$\varphi_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \overline{\omega}) - \overline{\omega}_\varepsilon \cdot \lambda = H_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \lambda)$$

als Funktion von $\lambda, x,\ldots, x_\alpha,\ldots$ gebildet. Dann folgt aus bekannten Methoden der Variationsrechnung[112]), dass (7) dem Variationsprinzip

(10) $$\delta \iiint_{(V_0)} \{H_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \lambda) + \lambda\cdot\omega(x,\ldots; x_\alpha,\ldots)\}\, da\, db\, dc = 0$$

für die *vier* unbekannten Funktionen x, y, z, λ äquivalent ist.

Hierin kann nun der Grenzübergang leicht vollzogen werden; nach den Annahmen über φ_ε konvergiert $\overline{\omega}_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \lambda)$ mit abnehmendem ε gleichmässig gegen 0, und da aus (9)

$$\frac{\partial H_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \lambda)}{\partial \lambda} = -\overline{\omega}$$

folgt, ergiebt sich unter Berücksichtigung von (6b) leicht die gleichmässige Existenz des Limes

(11) $$\lim_{\varepsilon=0} H_\varepsilon(x,\ldots; x_\alpha,\ldots; \lambda) = \varphi_0(x,\ldots; x_\alpha,\ldots),$$

der unabhängig von λ ist. Also erhält man schliesslich als Grenzfall von (10) das Variationsprinzip

(12) $$\delta \iiint_{(V_0)} \{\varphi_0(x,\ldots; x_\alpha,\ldots) + \lambda\cdot\omega(x,\ldots; x_\alpha,\ldots)\}\, da\, db\, dc = 0;$$

hierin aber kann man endlich λ als Lagrangeschen Faktor ansehen und hat damit tatsächlich genau den Ansatz von Nr. 4c für ein Medium mit der Energiedichte φ_0 und der Nebenbedingung (4) gewonnen. Obendrein kann man dieser Überlegung noch die Bedeutung des Lagrangeschen Faktors entnehmen: nach (8a) steht λ zu der Verbindung ω der Deformationsgrössen in der gleichen Beziehung, wie die Spannungskomponente X_a zu der Deformationsgrösse x_a (s. Nr. 7, (4)); es ist also gewissermassen die dieser Verbindung ω zugehörige Spannungskomponente, genauer: der Faktor von $\delta\omega$ im Ausdruck der virtuellen Arbeit bei einem „nahezu" der Bedingung $\omega = 0$ genügenden Medium.[124]) So sind die aus dem Stattfinden von Nebenbedingungen entspringenden *Reaktionswirkungen* als Grenzfälle den bisher durchgehends betrachteten *eingeprägten Wirkungen* eingeordnet.[125])

---

125) Vgl. oben Nr. 7e, S. 654 sowie Anm. [111]).

B. Individualisierung für einzelne Gebiete.

9. Eigentliche Elastizitätstheorie. Es handelt sich nun darum aufzuweisen, an welchen Stellen der in Teil A entwickelten allgemeinen Schemata sich die für die Behandlung der einzelnen Disziplinen der Mechanik der Kontinua bisher hauptsächlich verwendeten Ansätze einordnen; beginnen wir mit der Elastizitätslehre im engeren Sinne, die ja dieser ganzen Entwicklung den Weg gewiesen hat.

Ein *vollkommen elastisches Medium* ist dadurch charakterisiert, dass der Spannungszustand in ihm jeweils lediglich abhängt von denjenigen Verbindungen der ersten Ableitungen der Deformationsfunktionen, die die *reine Formänderung* der kleinsten Teile gegenüber der Ausgangslage bestimmen:

$$(1) \quad e_a = \tfrac{1}{2}(x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 - 1), \quad g_{bc} = x_b x_c + y_b y_c + z_b z_c \qquad (a, b, c);$$

diese Grössen bleiben bei rechtwinkligen Transformationen des x-y-z-Koordinatensystems, auf das die deformierte Lage bezogen ist, einzeln ungeändert, während sie sich bei Transformationen der Anfangskoordinaten a, b, c wie Komponenten einer symmetrischen Dyade verhalten[126]. Bezieht man sich, wie man es in der Regel tut, auf den Fall der Existenz eines Potentiales Φ der einfachsten Form von Nr. 7a, so leiten sich also die inneren Spannungen aus einer Energiedichtenfunktion φ her, die lediglich von den 6 Deformationskomponenten (1) abhängt[127]:

$$(2) \qquad \varphi = \varphi(e_a, e_b, e_c, g_{bc}, g_{ca}, g_{ab});$$

dabei ist es irrelevant, ob man die Dichte pro Volumelement des deformierten oder undeformierten Zustandes rechnet, da die event. als Faktor hinzutretende Volumdilatation Δ selbst lediglich von den Grössen (1) abhängt. Aus den Formeln (4), (5) von Nr. 7 entnimmt man nun unmittelbar die verschiedenen Ausdrücke der Spannungs-

126) Vgl. IV 14, Nr. **17**, **18**, *M. Abraham.*

127) *G. Green* hat diesen Ansatz zuerst für unendlichkleine Deformationen entwickelt (Trans. Cambr. Phil. Soc. 1838 = Math. Pap., London 1871, p. 248 ff.); später (Trans. Cambr. Phil. Soc. 1839 = Math. Pap, p. 295 ff.) hat er ihn auch für endliche Deformationen ausgesprochen, ohne ihn indessen bis zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen durchzuführen. Das hat zuerst *G. Kirchhoff* (Sitzungsber. Wien, math.-phys. Kl. 9 (1852), p. 762) getan, allerdings nur im Hinblick auf isotrope Körper, und später allgemein *W. Thomson* (Phil. Trans. Royal Soc. 153 (1863) = Math. Phys. Pap., London 1910, vol. III, p. 386 = Appendix C. zu Vol. I, 2 des Treat. on natur. philos. von *Thomson* und *Tait*).

komponenten, insbesondere wird[128])

$$(3)\quad \begin{cases} X_x = \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial e_a} x_a^2 + 2 \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial g_{ab}} x_a x_b + \overline{\varphi}, \\ X_y = \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial e_a} x_a y_a + \sum\limits_{(abc)} \dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial g_{ab}} (x_a y_b + x_b y_a), \dots\dots, \end{cases}$$

und hieraus oder aus der Bemerkung, dass bei jeder starren Rotation des Mediums sich die $e_a, \dots$ nicht ändern, also auch $\delta\Phi$ und damit die virtuelle Arbeit der Spannungsdyade verschwindet, folgen die wichtigen Relationen

$$(3')\quad X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.$$

Es ist nun die Aufgabe der speziellen Elastizitätstheorie zu untersuchen, welche Form die Funktion (2) von sechs Veränderlichen für die einzelnen Medien besitzt; indessen ist dieser allgemeine Fall endlicher Deformationen zugunsten der unendlichkleinen Deformationen in der Elastizitätslehre sehr zurückgetreten[129]). Speziell hervorgehoben sei hier nur der Fall des *isotropen* elastischen Mediums; wegen der Gleichwertigkeit der Richtungen im Medium können dann die 6 Formänderungskomponenten nur durch Vermittlung ihrer 3 Orthogonalinvarianten gegenüber Transformationen des Koordinatensystems a, b, c in (2) eingehen, d. h. es wird

$$(4)\quad \varphi = \varphi(A, B, C),$$

wo A, B, C die Koeffizienten der Fundamentalgleichung

$$(4a)\quad \begin{vmatrix} e_a - \varDelta, & \frac{1}{2}g_{ab}, & \frac{1}{2}g_{ac} \\ \frac{1}{2}g_{ab}, & e_b - \varDelta, & \frac{1}{2}g_{bc} \\ \frac{1}{2}g_{ac}, & \frac{1}{2}g_{bc}, & e_c - \varDelta \end{vmatrix} \equiv -\varDelta^3 + A\varDelta^2 - B\varDelta + C$$

sind, an deren Stellen natürlich auch die Wurzeln dieser Gleichung (Axenlängen des Deformationsellipsoides) treten können[130]). Diese Formeln umfassen ohne weiteres auch den Fall, dass das Medium im

128) *J. Boussinesq,* Mém. prés. par div. sav., Paris 20 (1872), p. 594; die in 127) zitierten Autoren haben nur die Ausdrücke für die auf die Anfangsparameter bezogenen Spannungskomponenten $X_a, \dots$ Vgl. auch Chap. III der zusammenfassenden Darstellung von *E.* u. *F. Cosserat*, Ann. de Toul. 10 (1896), p. J. 59.

129) φ als homogene quadratische Funktion der 6 Argumente hat *W. Thomson,* a. a. O.[127]), p. 390, andere für bestimmte Arten der Wellenfortpflanzung charakteristische Gestalten *J. Hamadard,* Leçons sur la propagation des ondes (Paris 1903), p. 257 ff. betrachtet.

130) Konkrete Ansätze für den isotropen Körper finden sich bei *G. Kirchhoff,* a. a. O.[127]), p. 773 und *M. Brillouin,* C. R. Paris 112 (1891), p. 1500.

undeformierten Anfangszustand „Selbstspannungen" aufweist; andernfalls müssen die Spannungskomponenten (3) für verschwindende e, g verschwinden, d. h. es muss die Potenzentwicklung von φ nach seinen 6 Argumenten mit quadratischen Gliedern beginnen[131]).

Es sei noch erwähnt, dass *P. Duhem* seinen Potentialansatz (Nr. 7, (7)), der eine direkte Einwirkung der Deformationszustände an je zwei verschiedenen Stellen aufeinander annimmt, speziell auf isotrope elastische Medien angewandt hat.[132]) Dabei sind die Variablen, die in φ eingehen, neben der Entfernung der beiden betrachteten Stellen die $2 \cdot 3$ Invarianten der Formänderung an ihnen sowie die Bestimmungsstücke der Orientierung der Deformationsellipsoide an beiden Stellen gegeneinander und gegen die Verbindungsstrecke.

Die grösste Rolle in der Elastizitätstheorie spielt die Betrachtung *unendlichkleiner Deformationen.* Die ersten, in σ linearen Glieder der Formänderungskomponenten (1) sind alsdann in den früheren Bezeichnungen (Nr. 6, (6)) vom Faktor abgesehen:[126])

$$(5) \qquad \varepsilon_a = \frac{\partial u}{\partial a}, \quad \gamma_{bc} = \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial b} \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \\ u, v, w \end{pmatrix};$$

die Funktion $\tilde{\varphi}$ aber, aus der sich gemäss Nr. 7a, (9) die Spannungskomponenten

$$(6) \qquad X_a = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u_a}, \ldots$$

als lineare Funktionen der Verrückungskomponenten ergeben, wird

$$(6\text{a}) \quad \tilde{\varphi} = \sigma \varphi_1(\varepsilon_a, \gamma_{bc}) + \sigma^2 \varphi_1\left(\frac{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}{2}, u_b u_c + v_b v_c + w_b w_c\right) + \sigma^2 \varphi_2(\varepsilon_a, \gamma_{bc}),$$

wo φ_1 bzw. φ_2 die linearen bzw. quadratischen Terme der Potenzentwicklung von φ nach seinen 6 Argumenten bedeutet, und der Kürze halber immer nur eines von je 3 Argumenten hingeschrieben ist[133]).

Treten keine Anfangsspannungen auf, so wird $\tilde{\varphi}$ eine quadratische Form der 6 Komponenten der unendlichkleinen Formänderung, und das ist der Fall, der den Ausgangspunkt der gewöhnlichen Elastizitätstheorie bildet (vgl. IV 24, Nr. 1, (1), *O. Tedone*); dort wird dann insbesondere untersucht, welche Gestalten diese Funktion je nach den Symmetrieeigenschaften, die das Medium in bezug auf die Richtungen

---

131) Auch für endliche Deformationen bereits angedeutet bei *G. Green*, a. a. O.[127]), p. 298. Vgl. auch *E.* und *F. Cosserat*, a. a. O.[128]), p. J. 70.

132) *P. Duhem*, Ann. Éc. Norm., (3) 21 (1904), p. 117ff.

133) Eine solche Entwicklung benutzte schon *G. Green*, a. a. O.[127]), p. 299. Vgl. auch *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paris 1892, p. 47 ff. sowie *E.* und *F. Cosserat*, a. a. O.[128]), p. J. 73f.

durch einen Punkt etwa besitzt, von der allgemeinen Form mit 21 Konstanten (den *Elastizitätskoeffizienten*) bis hin zu der speziellsten mit 2 Konstanten (beim isotropen Medium) annehmen kann (vgl. IV 24, Nr. 2b, 2c). In diesem Falle nimmt das transformierte Variationsprinzip (23) von Nr. 7e eine besonders einfache Form an, indem H bis aufs Vorzeichen gleich der Energiedichte wird; seine Koeffizienten sind die *Elastizitätsmoduln* des Mediums.

Älter als dieser Gedankengang ist eine etwas andere Betrachtungsweise, die die Annahme, dass alle möglichen Deformationen des Mediums unendlichklein seien, mehr in den Vordergrund bringt. Das elastische Medium erscheint hier dadurch charakterisiert, dass sein Potential φ lediglich von den Formänderungkomponenten ε, γ der unendlichkleinen Deformation abhängt:[134])

$$(7) \qquad \varphi = \varphi(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \gamma_{bc}, \gamma_{ca}, \gamma_{ab}),$$

während sich die Spannungskomponenten daraus als Ableitungen nach $u_a, \ldots$ ergeben. Im einfachsten Fall des Mediums ohne Selbstspannungen macht das freilich keinen Unterschied, sofern man sich wieder auf quadratische Glieder beschränkt. Man hat aber diesen Ansatz auch zur Behandlung von Selbstspannungen[135]) und auch zur Erzielung einer über das Hookesche Gesetz hinausgehenden Annäherung an die Naturvorgänge durch Berücksichtigung von Gliedern dritter und höherer Dimension[136]) verwendet; natürlich treffen diese Ansätze dann für andersartige Medien zu als die früheren.

Von einem ein wenig abweichenden Gesichtspunkte aus hat noch *J. Finger*[137]) die Grundformeln der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen auszubauen versucht; er zieht nicht nur die Formänderungskomponenten (1) in Betracht, sondern lässt φ von allen 9 Ableitungen $x_a, \ldots, z_c$ abhängen, wobei er — für ein isotropes Medium — lediglich symmetrisches Auftreten der drei Koordinatenrichtungen sowie Bestehen der Relationen (3′) voraussetzt und Glieder bis zur dritten Ordnung berücksichtigt.

Auch die Elastizitätslehre der *Körper mit einer oder zwei unendlichkleinen Dimensionen* ordnet sich dem Potentialsatz (für zwei bzw. eine

---

134) Dies ist der ursprüngliche Ansatz von *G. Green,* a. a. O.[127]), p. 249; vgl. auch IV 23, Nr. 5b, *Müller-Timpe.*

135) Vgl. z. B. *H. von Helmholtz,* Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen (Leipzig 1902), p. 93.

136) *W. Voigt* (Gött. Nachr., 1893, p. 534, math.-phys. Kl. 1894, p. 33; Ann. d. Phys. (3) 52 (1894), p. 536; Kompend. I, p. 339) zieht für isotrope Körper auch die Orthogonalinvariante dritter Ordnung der ε, γ heran.

137) *J. Finger,* Sitzungsber. Wien 103 IIa (1894), p. 163, 231; s. speziell p. 175 ff.

Dimension; Nr. 7c) unter; gegenüber den dreidimensionalen elastischen Medien ist dabei neu das Auftreten höherer Ableitungen der Deformationsfunktionen in der Energiedichte, wie es durch den Grenzübergang von Nr. 8a erklärt ist. Dies Charakteristikum zeigt sich bereits bei dem Ausdruck des Potentiales

$$\Phi = \int_0^l \varphi \, da \tag{8}$$

der *ebenen Elastika,* d. h. eines an eine Ebene $z = 0$ gebunden gedachten elastischen Drahtes; es wird nämlich φ eine Funktion des Krümmungsradius ϱ der Kurve[138])

$$\varphi = \frac{E}{2} \cdot \frac{1}{\varrho^2} = \frac{E}{2} \left\{ \left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 \right\}, \tag{9}$$

wofern als Nebenbedingung noch Unausdehnbarkeit der Kurve ($s = a$) zu der Bedingung des Potentialminimums hinzutritt — andernfalls erhält φ noch ein von der Längsdilatation $\frac{ds}{da}$ abhängiges Glied. Durch den Grenzübergang von Nr. 8b kann man die hier auftretenden Konstanten mit den Elastizitätskonstanten des dreidimensional ausgedehnten Mediums in Zusammenhang bringen.

Bei der *räumlichen Elastika* kommt die oben (S. 659) bereits angedeutete Tatsache hinzu, dass auch die Verschiebung des Materiales des Drahtes gegen die Lage seiner Zentralkurve die Energie beeinflusst. Die nähere Beschreibung geschieht am bequemsten mit Hilfe des Cosseratschen Dreikants. Man denke das jedem Teilchen der Kurve angeheftete rechtwinklige Dreikant in der Ruhelage so orientiert, dass die dritte Axe in die Kurventangente fällt, während die andern beiden die Grenzlagen der Hauptträgheitsaxen des Normalschnittes durch den betr. Punkt bei abnehmender Dicke des Drahtes markieren; fügt man dann noch die Nebenbedingung hinzu, dass die letzte Axe des Dreikants bei jeder Deformation die Kurve tangiert:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = x_a : y_a : z_a, \tag{10}$$

die von der in Nr. 4c betrachteten Form ist, so hat man ein Cosseratsches Medium, das genau die Elastika darstellt. Der Eigenschaft elastischer Medien, ein nur von den Formänderungskomponenten abhängiges Potential zu besitzen, entspricht hier offenbar die Annahme eines *euklidischen Potentials* im Cosseratschen Sinne (Nr. 7b, (17)), und

138) *D. Bernoulli* in einem Brief an *Euler*; *P. H. Fuss*, Corresp. mathém. et phys., T. II, St. Pétersbourg 1843, p. 507. Vgl. auch *L. Euler*, Methodus inveniendi lineas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausannae 1744, im Anhang „de curvis elasticis".

da aus (10) und Nr. 7, (16b) $\mathfrak{x}_a = \mathfrak{y}_a = 0$ folgt, kann die Energiedichte nur noch abhängen von $\mathfrak{z}_a$, das die Dehnung des Drahtes bestimmt, und den Winkelgeschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a, \mathfrak{r}_a$, die die geometrische Krümmung des deformierten Drahtes und den *Drall* (*twist*) des Materiales messen (vgl. IV 25, Nr. 17, *Tedone-Timpe*)[139]:

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{z}_a, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{q}_a, \mathfrak{r}_a). \tag{11}$$

Der spezielle Ansatz, der die Theorie der Elastika liefert, ist wiederum der einer quadratischen Form, und zwar — wenn wie oben noch die Nebenbedingung der Unausdehnbarkeit hinzugenommen wird —[140]):

$$\varphi = \frac{E}{2}(J_1 \mathfrak{p}_a^2 + J_2 \mathfrak{q}_a^2) + \frac{C}{2}\mathfrak{r}_a^2;$$

hierbei sind E, J_1, J_2, C Materialkonstanten; ist speziell $J_1 = J_2$ (was einem kreisförmigen Querschnitt des Drahtes entspricht), so tritt wie in (9) die Krümmung $\frac{1}{\varrho^2} = \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2$ der Kurve auf. — Durch Annahmen ähnlicher Art über die Verknüpfung der Lage des Dreikants mit der Kurve kann man von dem gleichen Ansatz aus auch alle übrigen in der Elastizitätstheorie behandelten Typen von Stäben, Drähten, Fäden darstellen, wie das *E.* und *F. Cosserat*[141]) ausführlich entwickelt haben.

Ganz analoge Betrachtungen gelten für die Theorie der *Platten;* sie seien hier nur kurz angedeutet. Man kann die Platte ansehen als ein zweidimensionales Medium mit orientierten Teilchen, deren Dreikante mit der dritten Axe stets normal zu der vom Medium jeweils erfüllten Fläche stehen sollen[142]); dann ist $\mathfrak{z}_a = \mathfrak{z}_b = 0$ und

$$\varphi = \varphi(\mathfrak{x}_a, \mathfrak{y}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{y}_b; \mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{r}_c)$$

hängt von der Dehnung und Krümmung der deformierten Fläche und der inneren Verwindung der Materie auf ihr in orthogonal invarianter Weise ab. Auch hier haben *E.* und *F. Cosserat*[143]) im einzelnen ausgeführt, wie man daraus den Energieansatz für die übliche Näherungstheorie der elastischen Platte[144]) sowie überhaupt für alle behandelten Typen elastischer Platten, Membrane und Schalen[145]) herleiten kann.

10. Dynamik idealer Flüssigkeiten. Die idealen Flüssigkeiten ordnen sich ohne weiteres als Sonderfall denjenigen elastischen Medien

---

139) *E.* und *F. Cosserat,* Corps déformables, p. 37ff.

140) *Thomson-Tait,* natural philos., new ed. I 2, p. 133ff.; dort wird auch ein allgemeinerer quadratischer Ansatz in Betracht gezogen. Vgl. auch IV 25, Nr. 17.

141) *E.* und *F. Cosserat,* Corps déform., Nr. 15—28.

142) Vgl. *E.* u. *F. Cosserat,* Corps déform., p. 105ff.

143) *E.* und *F. Cosserat,* Corps déform., Nr. 41—46.

144) *Thomson-Tait,* a. a. O.[140]) I 2, p. 184ff.

145) Vgl. insbesondere die Angaben in IV 26, Nr. 5, *H. Lamb.*

unter, die beliebige endliche Deformationen gestatten; sie sind dadurch charakterisiert, dass Arbeit nur für solche Deformationen aufgewendet werden muss, die mit einer Volumendilatation oder Kompression der kleinsten Teilchen verbunden sind[146]), und dass also die Energiedichte φ allein von der durch die Funktionaldeterminante Δ gemessenen momentanen Volumdilatation an jeder Stelle abhängt[147]):

(1) $$\varphi = \varphi(\Delta).$$

Da Δ als Orthogonalinvariante der Deformation eine Funktion der Grössen A, B, C (Nr. **9**, (4a)) ist ($\Delta^2 = 1 + 2A + 4B + 8C$), so ist (1) tatsächlich nur ein spezieller Fall des Ansatzes (4) von Nr. **9**. Aus Nr. **7**, (5) ergeben sich leicht als Komponenten der zu diesem Potential gehörigen inneren Spannung:

(2) $$\begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = \dfrac{d\varphi}{d\Delta} = p, \\ X_y = Y_x = Y_z = Z_y = Z_x = X_z = 0, \end{cases}$$

d. h. die Spannungsdyade bestimmt einen in jeder Richtung gleichmässig wirkenden „*Flüssigkeitsdruck*“ p. Man erhält dasselbe Resultat auch direkter[148]), wenn man mit Hilfe der Relation (vgl. Nr. **2**, (8'))

$$\delta\Delta = \Delta \cdot \left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)$$

die Variation des Gesamtpotentiales $\iiint \varphi\, d V_0$ bestimmt und sie dem Ausdruck Nr. **3**, (1) der virtuellen Arbeit gleich setzt. — Diese Überlegungen gelten sowohl für die Hydrostatik als für die Hydrodynamik; durch Einsetzen von (2) in die Gleichungen von Nr. **3**c bzw. Nr. **5**a ergeben sich die bekannten Grundgleichungen.

Die Gleichung (1) erscheint in der Hydrodynamik gewöhnlich in einer etwas anderen Gestalt. Da nämlich Δ umgekehrt proportional der Dichte ϱ des Mediums ist (Nr. **2**, (7)), so kann man sagen, dass sie φ als Funktion von ϱ giebt, und damit ist nach (2) auch der Druck als Funktion von ϱ gegeben:

(3) $$p = \frac{d\varphi}{d\Delta} = p(\varrho);$$

umgekehrt ist durch (3) auch die Relation (1) im wesentlichen bestimmt. In der Form (3) wird die „Zustandsgleichung“ der Hydrodynamik gewöhnlich gegeben[149]).

---

146) *Lagrange,* Méc. anal., 1. part., sect. VIII, Nr. 1.

147) *J. Hadamard,* Leçons sur la propagation des ondes (Paris 1903), p. 247 ff.

148) Dies ist im wesentlichen das Verfahren von *Lagrange*[146]); vgl. auch sect. VII, Nr. 11.

149) Vgl. die näheren Angaben in IV 15, Nr. **5**, *Love.*

Eine grosse Rolle spielt bekanntlich der Fall der *inkompressiblen Flüssigkeit,* die durch die Nebenbedingung

$$\Delta = 1 \tag{4}$$

charakterisiert ist. Für ein solches Medium verliert die Zustandsgleichung (1) ihre Bedeutung; approximiert man es aber nach Nr. 8b durch ein „nahezu inkompressibles" Medium, so wird der Druck $p = \frac{d\varphi}{d\Delta}$ in der Grenze zum Lagrangeschen Faktor der Gleichung (4), wenn man sie direkt als Nebenbedingung dem Prinzip der virtuellen Arbeit oder dem d'Alembertschen Prinzip hinzufügt, in das dann freilich nur noch äussere bzw. Trägheitskräfte, keine inneren Spannungen mehr eingehen[150]).

Die üblichen Darstellungen der Hydrodynamik gehen meist nicht von dieser Auffassung der Flüssigkeitsbewegung als einer der Elastizitätslehre einzuordnenden endlichen Deformation aus, sondern stellen die sog. *Euler*sche Auffassung in den Vordergrund, d. h. die Betrachtung des Geschwindigkeitsvektors x', y', z' an jeder Stelle. Der Flüssigkeitsdruck wird dann direkt gemäss den Gleichungen (2) zwischen den Spannungskomponenten definiert[151]) und die Bewegungsgleichungen aus dem d'Alembertschen oder aus dem Gaussschen Prinzip[152])

$$\delta \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{2} \varrho \sum_{(x,y,z)} (x'' - X)^2 dV - \iiint\limits_{(V)} p \sum_{(x,y,z)} \frac{\partial \delta x''}{\partial x} dV = 0$$

gewonnen — bei Inkompressibilität wird p Lagrangescher Faktor.

Auch speziell der Hydrodynamik hat *P. Duhem*[153]) seinen verallgemeinerten Potentialansatz Nr. 7, (7) angepasst, indem er die Energiedichte φ von den Dichtigkeiten an beiden betrachteten Stellen und deren Entfernung abhängen lässt; damit umfasst und verallgemeinert er Kräfte, die *H. A. E. Faye*[154]) zur Erklärung der Kometenschweife in Betracht gezogen hat, nämlich Attraktionskräfte, deren Intensität von der Dichte der wirkenden Teilchen abhängt.

11. Innere Reibung und elastische Nachwirkung. Bei *bewegten* elastischen Medien und Flüssigkeiten treten neben den bisher erörterten Spannungen und Drucken noch Zusatzspannungen auf, die

150) In *Lagranges* Darstellung ist die inkompressible Flüssigkeit das primäre; man vgl. jedoch die Bemerkung in 124) (Nr. 8).

151) Das entspricht der Auffassung von *Euler*; vgl. IV 15, Nr. 2, 8, *Love.*

152) Vgl. die ausführliche Darstellung von *A. Brill,* Mechanik raumerf. Massen[64]), p. 84ff.

153) *P. Duhem,* Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183.

154) *H. A. E. Faye,* Paris C. R. 47 (1858), p. 939. 1043.

durch innere Reibungen hervorgerufen werden, die also von den zeitlichen Ableitungen der Deformationsgrößen abhängen[155]). Verwendet man zur Darstellung der Bewegung nach der sog. Eulerschen Manier die Geschwindigkeitskomponenten als Funktionen des augenblicklichen Ortes jedes Teilchens

$$(1) \qquad \mathfrak{u} = x' = \mathfrak{u}(x, y, z; t) \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \end{pmatrix},$$

so können die 9 Ableitungen $x_a', \ldots, z_c'$, die oben (Nr. **6**, S. 640 und Nr. **7** f, S. 657) verwendet wurden, auch ersetzt werden durch die 9 Ableitungen $\mathfrak{u}_x, \mathfrak{u}_y, \ldots, \mathfrak{w}_z$, die lineare Funktionen von ihnen sind. Die Funktionen (1) bestimmen die unendlichkleine Deformation, die das Medium vermöge der Bewegung in einem Zeitelement erleidet; die Komponenten der zugehörigen reinen Formänderung (vgl. Nr. **9**, (5)) sind:

$$(2) \qquad \mathfrak{e}_x = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \quad \mathfrak{g}_{yz} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \end{pmatrix},$$

und von diesen Grössen wird daher die innere Reibung allein abhängen, sofern man analog zu den Verhältnissen bei elastischen Medien annimmt, dass durch Drehgeschwindigkeiten der Teilchen keine Reibungswiderstände entstehen können[156]). Man erkennt übrigens leicht, dass die Komponenten der durch (2) bestimmten symmetrischen Dyade in Bezug auf das *a*-*b*-*c*-Koordinatensystem gerade die zeitlichen Ableitungen der Formänderungskomponenten Nr. **9**, (1), sind.

Die Theorie der Reibungskräfte bei endlichen Deformationen ist bisher nur in der Hydrodynamik vollständig ausgebildet; die Grundannahme dabei ist die der Existenz einer Dissipationsfunktion D, die eine homogene quadratische Funktion der Grössen (2) ist, und die obendrein — entsprechend der isotropen Konstitution der Flüssigkeit — nur von deren Orthogonalinvarianten abhängt[157]):

$$(3) \quad D = a_1(\mathfrak{e}_x + \mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z)^2 + a_2(\mathfrak{e}_x^2 + \mathfrak{e}_y^2 + \mathfrak{e}_z^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_{xy}^2 + \mathfrak{g}_{yz}^2 + \mathfrak{g}_{zx}^2)).$$

Nach Nr. **7** f, (29') und nach Nr. **3** c, (8) werden die zugehörigen, auf den deformierten Zustand bezogenen Spannungskomponenten

$$(4) \quad \begin{cases} X_x^{(1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{(a\,b\,c)} \frac{\partial D}{\partial x_a'} x_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{u}_x} = a_1(\mathfrak{e}_x + \mathfrak{e}_y + \mathfrak{e}_z) + a_2 \mathfrak{e}_x, \\ X_y^{(1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{(a\,b\,c)} \frac{\partial D}{\partial x_a'} y_a = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{u}_y} = \frac{1}{2} a_2 \mathfrak{g}_{xy}, \ldots \end{cases}$$

---

155) Vgl. die historischen Angaben zu Nr. **12** von IV 15, *Love*.

156) *G. G. Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1845) = Math. Phys. Papers I, p. 80.

157) *W. Voigt*, Kompendium I, p. 462 ff.; einen allgemeineren Ansatz giebt *P. Duhem*, Anm. Éc. Norm. (3) 21 (1904), p. 130 ff.

Diese Spannungen treten also als Einfluss der inneren Reibung zu dem Flüssigkeitsdruck hinzu; häufig spezialisiert man die beiden Konstanten noch durch die Annahme, dass das arithmetische Mittel der drei resultierenden Normaldrucke $p + X_x^{(1)}$, $p + Y_y^{(1)}$, $p + Z_z^{(1)}$ gleich p ist, was $a_1 = -\frac{a_2}{3}$ ergiebt[158]).

In der eigentlichen Elastizitätslehre hat man die innere Reibung nur erst für unendlichkleine Deformationen in Betracht gezogen. In diesem Falle unterscheiden sich die Grössen $\mathfrak{u}, \ldots; \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}, \ldots; \mathfrak{e}_x, \ldots; \mathfrak{g}_{yz}, \ldots$ nur durch den Faktor σ von $u', \ldots; u'_a, \ldots; \varepsilon'_a, \ldots; \gamma'_{bc}, \ldots$ (in der Bezeichnung von Nr. **6**, (6) und Nr. **9**, (5)), und demgemäss wird die Dissipationsfunktion eine quadratische, die Spannungskomponenten also lineare Formen der zeitlichen Ableitungen der Formänderungskomponenten der unendlichkleinen Deformation. *W. Voigt*[159]) hat die Abhängigkeiten, die hier auftreten können, eingehend untersucht.

In naher Beziehung zu diesen Ansätzen stehen die Versuche, die Erscheinungen der *elastischen Nachwirkung* im Rahmen der Mechanik der Kontinua theoretisch zu fassen, die freilich bisher an den grossen Komplex der hier zu umspannenden Tatsachen noch nicht vollständig herangekommen sind[160]). Typisch ist hier in erster Linie der Ansatz *L. Boltzmanns*[161]), der den elastischen Spannungskomponenten ein Zeitintegral von der in Nr. **6**, (5) erörterten Form hinzufügt; er nimmt dabei — was natürlich nur für unendlichkleine Deformationen gilt — den Integranden als lineare Funktion der Formänderungskomponenten Nr. **9**, (5) an von analoger Form, wie sie die Spannungskomponenten im isotropen Medium haben:

$$(5)\begin{cases} X_x = \int\limits_{-\infty}^{t} [a_1(t-\tau)\{\varepsilon_a(\tau) + \varepsilon_b(\tau) + \varepsilon_c(\tau)\} + 2a_2(t-\tau)\cdot\varepsilon_a(\tau)]\,d\tau, \\ X_y = \int\limits_{-\infty}^{t} a_1(t-\tau)\,\gamma_{ab}(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

E. Wiechert[162]) hat diese Formeln durch spezielle Annahmen über die

158) *Stokes*, a. a. O.[156]). Vgl. auch IV 15, *Love*, Nr. **12—14** und für jene Relationen *H. Lamb*, Hydrodynamik (deutsche Ausg. Leipzig 1907), § 314.

159) Abhandl. Ges. d. Wiss. Göttingen 36 (1889); Kompendium I, p. 456 ff., 467 ff.; Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig 1910, p. 792 ff.

160) Vgl. IV 31, Nr. **13** u. **19** (*v. Kármán*).

161) Ann. d. Phys. u. Chem., Ergänzungsb. 7 (1876), p. 630.

162) Ann. d. Phys. (3) 50 (1893), p. 335.

Funktionen a_1, a_2 von $t - \tau$ ausgestaltet. Eine Reihe hierin gehöriger Probleme hat neuerdings *V. Volterra* behandelt[163]) (vgl. S. 641).

Für den Fall bleibender Formänderungen, für *plastische Medien* also, haben *A. Haar* und *Th. v. Kármán*[164]) aus ganz andern Gesichtspunkten Ansätze abgeleitet. Sie gehen aus von dem Variationsprinzip Nr. 7, (23), in dem (vgl. S. 655) für isotrope Medien H die Energiedichte und gleich einer homogenen quadratischen Funktion der ersten beiden Orthogonalinvarianten der (symmetrischen) Spannungsdyade wird:

$$(6)\quad 2H = a_1(X_x + Y_y + Z_z)^2 + a_2(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 - X_x Y_y - Y_y Z_z - Z_z X_x).$$

Zu diesem Variationsproblem mit seinen drei Nebenbedingungen (23a), Nr. 7 tritt nun als die für plastische Medien charakteristische Eigenschaft die Bedingung hinzu, dass die grösste irgendwo auftretende Schubspannung einen festen Wert K nicht überschreitet, d. h. dass die Differenzen je zweier Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} X_x - \varDelta, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - \varDelta, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - \varDelta \end{vmatrix} = 0$$

absolut genommen unterhalb K bleiben:

$$(7)\quad |\varDelta_1 - \varDelta_2| \leqq K, \quad |\varDelta_2 - \varDelta_3| \leqq K, \quad |\varDelta_1 - \varDelta_3| \leqq K.$$

Eine Lösung dieses Variationsproblemes mit drei Gleichungs- und drei Ungleichungsnebenbedingungen wird in verschiedenen Teilgebieten verschiedene Eigenschaften haben, je nachdem für sie in den Bedingungen (7) das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen gilt. Gelten alle drei Ungleichheitszeichen, so kommt man auf die Gleichgewichtsbedingungen der gewöhnlichen Elastizitätstheorie zurück, andernfalls kommt man auf neue charakteristische „halbplastische" oder „vollplastische" Zustände.

Prinzipiell wäre es ein leichtes, diesen Ansatz auf *sandartige Massen* (*Erddruckstheorie*) zu übertragen; an Stelle von (7) treten als Nebenbedingungen andere Ungleichungen, die ausdrücken, dass die Richtung der Spannung auf jedes Flächenelement nicht ausserhalb eines gewissen „Reibungskegels" fällt. Indessen fehlt es hier an sicherer Kenntnis eines Ausdruckes (6) der Verzerrungsenergie, so dass dieser Ansatz zunächst nur in dem extremen Fall brauchbar ist,

163) Rom. Acc. Linc. Rend. (5) 18, 2 (1909), p. 295, 577; (19) 1 (1910), p. 107, 239; (22) 1 (1913), p. 529. Acta math. 35 (1912), p. 295.

164) Gött. Nachr., math.-phys. Kl., 1909, p. 212.

wo zwei der Ungleichheitsnebenbedingungen als Gleichungen erfüllt sind; dann resultieren nämlich Differentialgleichungen, die von der speziellen Form des Energieausdruckes unabhängig sind[165]).

12. Kapillarität. Die Phänomene der Kapillarität enthalten den zuletzt betrachteten Erscheinungen gegenüber insofern ein wesentlich neues Moment, als sie an das Auftreten von *Grenzflächen* verschiedenartiger Medien gegeneinander geknüpft sind. Demgemäss wird man, sofern man an der Existenz eines Potentiales festhält, die Kapillaritätswirkungen aus einem Potentialbestandteil der Gestalt (6) von Nr. 7a, nämlich einem Integral über jene Grenzflächen herleiten:

$$\Phi = \iint_{(S)} \overline{\psi}\, dS = \iint_{(S_0)} \psi\, dS_0. \tag{1}$$

Der Ansatz für $\overline{\psi}$, den *Gauss*[166]) durch den oben (S. 647)[93]) angedeuteten Grenzübergang hergeleitet hat, ist, dass ψ nur von der Beschaffenheit der aneinandergrenzenden Medien, nicht von den Deformationsfunktionen abhängt; dann wird, falls nur homogene Medien auftreten, Φ gleich einem linearen Aggregat der Inhalte S_1, S_2, ... der verschiedenen Grenzflächen (im deformierten Zustande)[167]):

$$\Phi = C_1 S_1 + C_2 S_2 + \cdots. \tag{2}$$

Die Umformung von $\delta\Phi$ auf die Gestalt Nr. 3e, (15) ergibt die folgenden Wirkungen: eine innerhalb der Fläche S_i senkrecht zu jedem Linienelement ds wirkende Spannung $C_i ds$, die nur an den Grenzkurven der Flächenteile S_i zur Geltung kommt, und eine normal zu jedem inneren Flächenelement gerichtete und bis auf den Faktor $2C_i$ seiner mittleren Krümmung gleiche Druckkraft.[168])

Will man den Ansatz (1) enger mit der sonst im Vordergrunde stehenden Vorstellung räumlicher Verteilung der Energie verknüpfen, als es durch die S. 646 erwähnte rechnerische Transformation des Flächenintegrales in ein Raumintegral geschehen kann, so gelingt das

---

165) *Haar* u. *v. Kármán*, a. a. O.[164]), S. 217. Über die Erddrucktheorie vgl. IV 27 (*Reissner*), im übrigen ausser der dort gegebenen Litteratur auch *J. Sylvester* Phil. Mag. (4) 20 (1860), p. 489 = Collected Papers, vol. 2, Cambridge 1908, p. 215 und *J. Massau*, Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles, fasc. 2 et 3. Mons 1902 und 1904. (Extrait des Annales des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand.)

166) *C. F. Gauss*, Princ. generalia theoriae figurae fluidorum Comment. soc. reg. scient. Gotting. recent. 7 (1830) = Werke V, p. 29.

167) A. a. O. Nr. 18.

168) Vgl. die ausführliche Darstellung dieser Entwicklung in V 9, Nr. 2 ff. (*Minkowski*).

mit Hilfe eines Grenzüberganges, der dem in Nr. 8 zu verwandten Zwecken benutzten analog ist.[169]) Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf ein System von zwei durch die Fläche S getrennten Medien, die die Raumteile V_1, V_2 erfüllen, so kann man an seine Stelle setzen den den tatsächlichen Verhältnissen näher kommenden Fall *eines* Kontinuums, dessen Zustand sich stetig, aber in der Nähe von S ausserordentlich rasch ändert und das als abstrakten Grenzfall jenes System aus zwei Medien einschließt. Die Energiedichte φ eines solchen Mediums wird (vgl. Nr. 7a, S. 645) auch von den lokalen Ableitungen der Deformationsgrössen, d. h. von den zweiten Ableitungen der Funktionen $x(a, b, c), \ldots$ abhängen; man wird diese Abhängigkeit nur in einem kleinen S umschliessenden Gebiete $V^{(\varepsilon)}$ zu berücksichtigen brauchen, während in den Restgebieten $V_1^{(\varepsilon)}$ und $V_2^{(\varepsilon)}$ die Betrachtung der Abhängigkeit von den Deformationsgrössen erster Ordnung genügt. Approximiert man nun mit dem so beschriebenen Kontinuum das ursprüngliche System, indem man $V^{(\varepsilon)}$ sich unbegrenzt um S zusammenziehen und gleichzeitig $V_1^{(\varepsilon)}$, $V_2^{(\varepsilon)}$ gegen V_1, V_2 konvergieren lässt, so wird in der Grenze bei passender Verfügung über φ im Gesamtpotential neben dem räumlichen Potential von V_1 und V_2 gerade ein Flächenintegral vom Typus (1) auftreten. Lässt man speziell, was von dem Ansatz Nr. **10**, (1) der Hydrodynamik aus naheliegt, φ innerhalb $V^{(\varepsilon)}$ von der Ableitung $\frac{\partial \varrho}{\partial n}$ der Dichte normal zu einem $V^{(\varepsilon)}$ erfüllenden System von Parallelflächen zu S abhängen, setzt also etwa $\varphi = C \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial n}$, so tritt im Limes

$$C \cdot \iint\limits_{(S)} (\varrho_1 - \varrho_2)\, dS$$

zum Potential hinzu, wobei ϱ_1, ϱ_2 die Randwerte der Dichte in V_1, V_2 sind — d. i. bei konstanten Dichten gerade die Form (2). Für die genaue Durchführung dieses Ansatzes ist natürlich wieder (vgl. S. 660) Vorbedingung, dass die Gleichgewichtslage des approximierenden Systems in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter ε untersucht ist.

13. Optik. Um die optischen Erscheinungen dem Schema der allgemeinen Mechanik der Kontinua einzufügen, sieht man bekanntlich die Komponenten u, v, w des *Lichtvektors* als Verschiebungskomponenten der Teilchen eines deformierbaren raumerfüllenden Me-

169) Für die folgende Darstellung vgl. eine Bemerkung am Anfang der Nr. 5 in *H. Minkowskis* Referat V 9; den gleichen Weg hat *D. Hilbert* in einer Göttinger Vorlesung im W.-S. 1906/07 eingeschlagen.

diums (*Lichtäther*) an; es genügt für die Zwecke der Optik, wenn man sich dabei auf unendlichkleine Deformation beschränkt.[170]) Bei dieser Auffassung ist es aber keinesfalls erforderlich, dem Lichtäther — wie in der eigentlichen elastischen Lichttheorie — die Eigenschaften eines elastischen Mediums im engeren Sinne zuzuschreiben; vielmehr erhält man die richtigen Formeln der Optik gerade dann in einfachster Weise, wenn man nicht den Komponenten der reinen Formänderung (Nr. **9**, (5)), sondern denen der Rotation der Volumelemente

$$(1)\quad \frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c}\right),\quad \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial a}\right),\quad \frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial b}\right)$$

die bestimmende Rolle für den Wert der Deformationsenergie zuschreibt. Diesen Gedanken hat zuerst *J. Mac Cullagh*[171]) durchgeführt, und es gelang ihm auf diese Weise nicht nur, die Differentialgleichungen, sondern auch — über die elastische Lichttheorie hinaus — die richtigen Grenzbedingungen der Optik zu gewinnen.

Für *isotrope durchsichtige Medien* besteht *Max Cullagh*s Ansatz darin, im Lichtäther eine Energiedichte proportional dem Quadrate des Betrages des Rotationsvektors (1) anzunehmen[172]):

$$(2)\qquad \varphi = \frac{1}{2}A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2}A\sum_{\binom{abc}{uvw}}(w_b - v_c)^2.$$

Dann folgt aus Nr. **9**, (6) für die Spannungskomponenten

$$X_a = Y_b = Z_c = 0,$$
$$Z_b = -Y_c = A\xi,\quad X_c = -Z_a = A\eta,\quad Y_a = -X_b = A\zeta,$$

und die Gleichungen Nr. **5**, (2) für den Bewegungszustand lauten daher

$$(3\text{a})\qquad \varrho u'' = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b}\right) = A\left(\Delta u - \frac{\partial(u_a + v_b + w_c)}{\partial a}\right)\qquad \begin{pmatrix} u, v, w \\ a, b, c \\ \xi, \eta, \zeta \end{pmatrix};$$

das sind, wenn man noch die Bedingung $u_a + v_b + w_c = 0$ der Inkompressibilität hinzufügt, genau die Schwingungsgleichungen der Optik. Ebenso aber sind die Randbedingungen der Optik in den Randbedingungen enthalten, die sich analog Nr. **3**c, (5b) ergeben und die z. B. für die Grenzfläche zweier Medien mit verschiedenen Konstanten A

170) Von der Hinzufügung des unendlichkleinen Faktors σ wird im folgenden der Kürze halber abgesehen.

171) *Mac Cullagh*, An essay towards a dynam. theory of cryst. reflexion and refraction, Trans. Roy. Irish Acad., 21 (1839) = Coll. Works (Dublin 1880), p. 145. — Vgl. auch V 21, Nr. **24** (*Wangerin*) und V 22, Nr. **1** (*W. Wien*).

172) Vgl. auch die Darstellung von *W. Voigt*, Kompendium II, p. 563.

aussagen, dass die für beide gebildeten Ausdrücke

(3b) $$A(\eta \cos nc - \zeta \cos nb) \qquad \begin{pmatrix} \xi, \eta, \zeta \\ a, b, c \end{pmatrix}$$

übereinstimmen.

Das Integral der Energiedichte (2) gestattet eine Transformation, der zufolge es bis auf Randintegrale mit dem Raumintegral von

$$\frac{1}{2} A \sum_{\binom{uvw}{abc}} \{(w_b + v_c)^2 - 4 v_b w_c\}$$

übereinstimmt, d. i. aber die Energiedichte eines rein elastischen isotropen Mediums, dessen Lamésche Konstanten λ, μ in der Beziehung $\lambda = -2\mu = -2A$ stehen. Ein Medium dieser Konstitution gerade hat *W. Thomson* (Lord *Kelvin*) zur Erklärung der optischen Phänomene herangezogen[173]).

Mac Cullagh hat seinen Ansatz insbesondere für die Optik *kristallinischer Medien* durchgeführt, indem er φ gleich einer quadratischen Form von ξ, η, ζ (mit konstanten Koeffizienten)[174]) setzt:

(4) $$2\varphi = A_{11}\xi^2 + 2A_{12}\xi\eta + \cdots + 2A_{23}\eta\zeta + A_{33}\zeta^2.$$

Ganz analog wie oben folgen dann als Differentialgleichungen

(4a) $$\varrho u'' = \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial c} - \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial b}, \text{ wo } \Xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \qquad \begin{pmatrix} \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}; & \xi, \eta, \zeta \\ u, v, w; & a, b, c \end{pmatrix},$$

während in den Randbedingungen die Ausdrücke auftreten:

(4b) $$\mathsf{H} \cos nc - \mathsf{Z} \cos nb. \qquad \begin{pmatrix} \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z} \\ a, b, c \end{pmatrix}$$

E. und *F. Cosserat* haben darauf hingewiesen[175]), daß ihr „Euklidisches Potential“ auch diese *Mac Cullagh*schen Ansätze umfaßt.

Man kann auf dieser Grundlage versuchen, durch Erweiterung des Potentialansatzes nach einer der in Nr. 7 erörterten Richtungen die sämtlichen für die verschiedenen optischen Probleme notwendigen Gleichungen zu umfassen; in dieser Weise ist *W. Voigt* in seinem Kompendium[176]) systematisch vorgegangen.

In erster Linie gewinnt er den Übergang zu der *Abhängigkeit der optischen Erscheinungen von der Farbe* (Schwingungsdauer τ), indem

173) *W. Thomson,* Phil. Mag. (5) 26 (1888), p. 414 ff. Vgl. auch V 21, Nr. 31 (*Wangerin*).

174) Vgl. *Mac Cullagh,* works[171]), p. 156, wo (4) sogleich auf eine Summe von Quadraten transformiert erscheint. Siehe auch die Darstellung in *P. Volkmann,* Vorles. über die Theorie des Lichtes, Leipzig 1891, p. 260, 294.

175) *E.* u. *F. Cosserat,* Corps déform., p. 151.

176) S. namentlich V. Teil (Optik), § 7 (Bd. II, p. 563 ff.) sowie Kap. II, III dieses Teiles und vgl. auch II. Teil, § 34 (Band I, p. 486 ff.), wo die Kraftwirkungen direkt ohne Vermittlung eines Potentiales angesetzt werden.

er den Gliedern von (4) ebenso gebildete quadratische Formen der zeitlichen Ableitungen ξ', η', ζ' oder ξ'', η'', ζ'' usw. hinzufügt, freilich unter gleichzeitiger Beschränkung darauf, dass der Lichtvektor durchweg Sinusschwingungen mit der Periode τ ausführt. Er verwendet nun das Hamiltonsche Prinzip in der Form Nr. 7, (25), und kann durch partielle Integration nach der Zeit diese Zusatzglieder derart umformen[177]), dass schliesslich wiederum eine quadratische Form von ξ, η, ζ genau wie (4) die Stelle der Energiedichte einnimmt, nur daß ihre Koeffizienten A nun *Funktionen von* τ sind; die Art dieser Funktionen hängt von dem Medium ab und bestimmt sein Verhalten gegenüber den verschiedenen Farben.

In ähnlicher Weise zieht *Voigt* auch quadratische mit zeitlichen Ableitungen verschiedener Ordnung der ξ, η, ζ gebildete Terme heran und zeigt, dass man sie auf *einen* wesentlich neuen charakteristischen Bestandteil der Energiedichte zurückführen kann:

$$(5) \qquad B_1(\zeta'\eta - \eta'\zeta) + B_2(\xi'\zeta - \zeta'\xi) + B_3(\eta'\xi - \xi'\eta);$$

dabei sind B_1, B_2, B_3 gegebene Konstanten oder Funktionen von τ.[178]) Die Zusatzglieder, die hiernach zu den Differentialgleichungen und Randbedingungen zu treten haben, sind den allgemeinen Formeln leicht zu entnehmen; sie beschreiben die Veränderung, die die Lichtbewegung durch ein magnetisches Feld erleidet (*magnetische Aktivität*), und zwar hängen die Grössen B, die sich wie Komponenten eines axialen Vektors transformieren, von der Lage der magnetischen Axe an der betrachteten Stelle und der magnetischen Feldstärke ab.[179])

An dritter Stelle zieht *Voigt* endlich noch Aggregate von Produkten aus je einer zeitlichen Ableitung von u, v, w selbst und einer von ξ, η, ζ in Betracht. Auch sie haben, wie durch ähnliche Umformungen gezeigt wird[180]), das Auftreten einfacherer Glieder im Ausdruck der virtuellen Arbeit zur Folge, für die typisch ist

$$(6) \qquad C(u\delta\xi + v\delta\eta + w\delta\zeta).$$

Die Differentialgleichungen hierzu sind leicht herzustellen; sie liefern die Phänomene in den *natürlich aktiven Medien*.[181])

Mac Cullagh selbst hatte diese Medien gleichfalls in seine Betrachtungen einbezogen, indem er der Energiedichte ein Ableitungen

---

177) A. a. O.[176]), p. 569.
178) A. a. O. p. 568 ff.
179) A. a. O. p. 572, 679 ff.
180) A. a. O. p. 572 ff.
181) A. a. O. p. 574, 687 ff.

zweiter Ordnung enthaltendes Zusatzglied gab

$$(6') \qquad \frac{1}{2} C \sum_{\binom{u\,v\,w}{\xi\,\eta\,\zeta}} \xi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}\right).$$

Dann erhalten die Differentialgleichungen Ableitungen dritter statt wie bei *Voigt* erster Ordnung als Zusatzglieder.[182])

Den Übergang zu *absorbierenden Medien* gewinnt *Voigt*, indem er unter Heranziehung einer als quadratische Form der Ableitungen ξ', η', ζ' gegebenen Dissipationsfunktion (Nr. 7f, S. 657, Nr. **11**, S. 671)

$$(7) \qquad 2D = m_{11}\xi'^2 + 2m_{12}\xi'\eta' + \cdots + m_{33}\zeta'^2$$

der virtuellen Arbeit das Aggregat

$$(7\text{a}) \qquad -\left(\frac{\partial D}{\partial \xi'}\,\delta\xi + \frac{\partial D}{\partial \eta'}\,\delta\eta + \frac{\partial D}{\partial \zeta'}\,\delta\zeta\right)$$

hinzufügt; das bewirkt einfach ein Hinzutreten der Komplexe $\frac{\partial D}{\partial \xi'}, \cdots$ zu den $\Xi, \ldots$ in den Formeln (4a), (4b).[183])

Während alle diese Betrachtungen den Ausdruck der potentiellen Energie betreffen, kann man ebenso auch versuchen, Verallgemeinerungen des einfachsten Ausdruckes $\frac{1}{2}\varrho(u'^2 + v'^2 + w'^2)$ der kinetischen Energie, wie sie in Nr. **5**d diskutiert sind, in der Optik zu benutzen. In dieser Richtung liegt der bereits erwähnte Ansatz von *J. W. Strutt* (*Lord Rayleigh*)[184]), die kinetische Energie pro Volumelement des Lichtäthers als allgemeine quadratische Form der Geschwindigkeiten u', v', w' anzunehmen; dabei treten dann auf den linken Seiten der optischen Gleichungen lineare Kombinationen der Beschleunigungen u'', v'', w'' auf.

14. Beziehungen zur Elektrodynamik. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind ihrer Form nach bekanntlich im wesentlichen in den optischen Grundgleichungen und damit in dem allgemeinen Schema der Mechanik der Kontinua enthalten. Deutet man nämlich, um nur vom isotropen Medium zu reden, die zeitlichen Ableitungen der Komponenten u, v, w des soeben betrachteten Lichtvektors bis auf einen konstanten Faktor als Vektor der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$:

$$u' = \gamma_1 \mathfrak{E}_a, \quad v' = \gamma_1 \mathfrak{E}_b, \quad w' = \gamma_1 \mathfrak{E}_c,$$

und ebenso die Komponenten der Rotation eines Volumelements als

182) *Mac Cullagh*, Proc. R. Irish Ac. II (1841), p. 96 = Works, p. 187 Vgl. auch *P. Volkmann*, Theorie des Lichtes, p. 414 ff.

183) A. a. O. p. 575 f., 708 ff.

184) *J. W. Strutt*, Phil. Mag. (4) 41—43 (1871, 1872). Vgl. auch V 21, Nr. **29** (*Wangerin*).

Komponenten der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$:

$$\xi = \gamma_2 \mathfrak{H}_a, \quad \eta = \gamma_2 \mathfrak{H}_b, \quad \zeta = \gamma_2 \mathfrak{H}_c,$$

so gehen die Gleichungen (3a) und (1) von Nr. **13** bei passender Wahl der Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, A, \varrho$ über in

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{H}_c}{\partial b} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_b}{\partial c} = \dfrac{\varepsilon}{c} \mathfrak{E}_a{}' & (a, b, c), \\ \dfrac{\partial \mathfrak{E}_c}{\partial b} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_b}{\partial c} = -\dfrac{\mu}{c} \mathfrak{H}_a{}' & (a, b, c), \end{cases}$$

und das sind gerade die *Maxwellschen Grundgleichungen* im freien Äther.[185]) Ein weiteres, äusseren Kräften entsprechendes Glied, das die Gleichungen (3a) noch enthalten können, findet im ersten Tripel (1) seine Deutung als elektrischer Strom. Ähnlich kann man auch die elektromagnetischen Gleichungen für nichtisotrope Medien gewinnen.

Bei den Darstellungen, die die allgemeinen Ansätze der Elektrodynamik jetzt meist finden, geht man indessen in der Regel nicht von dieser Auffassung aus, die die elektrischen und magnetischen Grössen mit den Verschiebungen eines Mediums in so direkte Verbindung bringt; man sieht vielmehr diese Grössen als „physikalische Parameter“ im Sinne von Nr. 2b an, die den Stellen des Kontinuums als Ortsfunktionen zugeordnet sind, und von denen man allenfalls einige als abhängig von den Bewegungsfunktionen eines immateriellen Mediums — der Elektrizität — deutet. Daneben können dann noch die Bewegungsfunktionen des materiellen Mediums, in dem der Vorgang sich abspielt, in Betracht kommen. Die Gleichungen der Elektrodynamik verknüpfen nun alle diese Größen direkt mit den Kräften, Spannungen, Energiedichten. Die Variationsprinzipe, in die man sie nach dem Vorgange von *H. A. Lorentz*[186]) und *H. v. Helmholtz*[187]) vielfach zusammengefaßt hat, sind dann in gewisser Weise den mechanischen analog, nur daß sie durch die größere Anzahl der in sie eingehenden Größen sehr viel komplizierter sind. Über diese Probleme der speziellen Elektrodynamik vergleiche man die Referate von *H. A. Lorentz*, insbesondere V 13, Nr. **35—39** und V 14, Nr. **8**, **9**. Nur ein besonderer Fall sei noch hervorgehoben, als typisch dafür,

185) Vgl. *W. Thomson,* Math. phys. pap. 3 (London 1890), p. 436 ff. Man kann auch die Rolle von elektrischer und magnetischer Feldstärke gerade vertauschen; vgl. über die verschiedenen möglichen Deutungen V 13, Nr. **42**, *H. A. Lorentz.*

186) *H. A. Lorentz,* La théorie électromagn. de Maxwell (Leiden 1892), § 55 ff.

187) *H. v. Helmholtz,* Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. Ann. d. Phys. 47 (1892) p. 1 = Wissensch. Abh. III (Leipzig 1895), p. 476.

wie solche physikalischen Parameter in die Stoffgleichungen eines materiellen Mediums im früheren Sinne eingehen können.

In einem elastischen Medium sei ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ erregt; die Verallgemeinerung des früheren Ansatzes ist dann die, dass die Energiedichte φ ausser von den Deformationsgrössen $e_a, \ldots, g_{ab}, \ldots$ noch von den Komponenten der Feldstärke abhängt[188]):

$$\varphi = \varphi(e_a, \ldots, g_{ab}, \ldots; \mathfrak{E}_a, \mathfrak{E}_b, \mathfrak{E}_c). \tag{2}$$

Aus den früheren Formeln Nr. 7, (4) ergeben sich unverändert die Spannungskomponenten, die also von den elektrischen Feldstärken abhängig werden; andererseits aber ist das Potential auch gegenüber Variationen der Feldstärke $\mathfrak{E}$ zum Minimum zu machen, und daraus ergeben sich Gleichungen für die „elektrischen Momente"

$$\mathfrak{P}_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_a}, \quad \mathfrak{P}_b = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_b}, \quad \mathfrak{P}_c = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{E}_c}, \tag{3}$$

die eine Abhängigkeit des elektrischen Zustandes von der Deformation zeigen. In beiden Formelsystemen bzw. in den aus ihnen folgenden Relationen vom Typus

$$\frac{\partial X_a}{\partial\mathfrak{E}_a} = \frac{\partial\mathfrak{P}_a}{\partial x_a} \tag{4}$$

sind die sog. *Reziprozitätssätze*[189]) enthalten, die in allen diesen verschiedenartige Gebiete verknüpfenden Erscheinungen eine wesentliche Rolle spielen; hat eine Änderung des einen physikalischen Parameters eine Änderung der einem anderen zugeordneten Spannungskomponente zur Folge, so bewirkt auch eine Variation dieses Parameters eine bestimmte Änderung der jenem ersten zugehörigen Spannungskomponente. In diesen Formeln sind die Erscheinungen der *Piezoelektrizität* enthalten, die mit Hilfe einfacher Ansätze für φ entsprechend den Symmetrieverhältnissen der kristallinischen Medien genau untersucht worden sind.[190])

188) Nachdem *W. Voigt* zuerst die Theorie auf Grund direkt angesetzter Abhängigkeit der Spannungs- und Momentkomponenten von Deformation und Feldstärke behandelt hatte (Abhandl. Ges. d. Wiss. Göttingen, 36, 1890), haben *P. Duhem*, Leçons sur l'électricité 2 (1892), p. 467, *E. Riecke* (Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1893, p. 19) und *W. Voigt* (ebenda, math.-phys. Kl. 1894, p. 343) den Potentialansatz verwendet; näheres siehe in V 16, Nr. 8, *F. Pockels*.

189) Vgl. hierzu *Voigts* Kompendium II, p. 106. — Man kann diese Reziprozitätssätze, die meist nur für den Fall endlich vieler Freiheitsgrade behandelt werden (vgl. *J. J. Thomson,* Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie [Leipzig 1890] und *H. von Helmholtz,* Journ. f. Math. 100 (1887), p. 137 = Wiss. Abh. III, p. 203 ff.) in weitem Umfang auf Kontinua übertragen.

190) Vgl. die ausführliche Darstellung in V 16, Nr. 8—10, *F. Pockels*.

15. Einfügung der thermodynamischen Ansätze. Es giebt zwei Wege, von den bisher entwickelten Grundformeln der Mechanik der Kontinua zu den umfassenderen Ansätzen der Thermodynamik aufzusteigen, die im Rahmen dieses Artikels nur in aller Kürze zu skizzieren sind. Der eine schliesst an die Gleichungen der Kinetik, etwa an das Hamiltonsche Prinzip in der verallgemeinerten Gestalt Nr. 7, (26) an und geht von der Annahme aus, dass irgendeine Verbindung ω der Bewegungsfunktionen und ihrer räumlichen Ableitungen selbst nicht explizit im Integranden φ auftritt, vielmehr lediglich ihre zeitliche Ableitung. Eine solche „verborgene Koordinate", die man an Stelle einer der Bewegungsfunktionen als bewegungsbestimmend ansehen kann, kann man dann gerade so behandeln, wie man es in der *Helmholtz*schen Theorie[191]) der zyklischen Systeme in der Mechanik der Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden tut: Mit Hilfe der Eliminationsmethoden der Variationsrechnung, wie sie in der Theorie der kanonischen Transformation der Dynamik gehandhabt werden[192]), führt man im Variationsprinzip statt ω' die Ableitung $\pi = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega'}$ ein und erhält dann für den Grenzfall solcher Zustandsänderungen, bei denen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der übrigen Koordinaten (ausser ω) unendlichklein sind, ein Variationsprinzip, das sich von dem Prinzip der virtuellen Verrückungen nur durch das Hinzutreten eines Termes $\omega' \cdot \delta\pi$ unterscheidet. Das Raumintegral dieses Termes findet nun seine Deutung als die bei der virtuellen Verrückung zugeführte Wärmemenge, während ω' und π Temperatur und Entropie des Systems darstellen. Die analogen Betrachtungen finden in der Thermodynamik der Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden stets ausführlich Platz[193]); übrigens scheint aber eine explizite Anwendung innerhalb der Mechanik der Kontinua nicht vorzuliegen.

Der zweite Weg ist wesentlich mehr formaler Natur und schliesst sich den bisher zum Ausdruck gebrachten formalen Auffassungen aufs nächste an. Den Deformationsfunktionen wird — wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Statik — ein „physikalischer" Parameter im Sinne von Nr. 2b

$$s = s(a, b, c)$$

hinzugefügt, dessen Wert an jeder Stelle den „thermischen Zustand"

---

191) *H. v. Helmholtz,* J. f. Math. 97 (1884), p. 111 = Wiss. Abhandl. III, p. 119ff. Vgl. IV 11, Nr. 23, *Heun.*

192) Vgl. die Anwendungen derselben Methoden oben in Nr. 7e, S. 654 und Nr. 8b, S. 662 sowie Anm.[111]).

193) Siehe die Referate V 3, Nr. 28 ff. (*Bryan*) und IV 1, Nr. 48 (*Voss*).

des Mediums beschreibt; man bezeichnet ihn als *Entropie* des Mediums an dieser Stelle, berechnet auf die Masseneinheit, indem man Entropie eines Quantums V_0 des Mediums das Integral:

$$\iiint\limits_{(V_0)} s(a, b, c)\,\varrho_0\,d V_0 = \iiint\limits_{(V)} s(x, y, z)\,\varrho\,d V$$

nennt. Bei einer virtuellen Verrückung des Kontinuums wird auch s eine unendlichkleine virtuelle Änderung δs zu erfahren haben. Man kann dann, entsprechend dem *zweiten Hauptsatz* der Thermodynamik, das Prinzip der virtuellen Verrückungen in folgender Weise erweitern[194]):

Zu der virtuellen Arbeit δA der gesamten Kraftrichtungen tritt gleichberechtigt die „*Wärmezufuhr*" bei einer virtuellen Verrückung:

(1) $$\delta Q = \iiint\limits_{(V)} \Theta\,\delta s\,\varrho\,d V;$$

dabei bedeutet die „*Temperatur*" Θ einen den Spannungskomponenten gleichberechtigten Faktor, der für jedes Medium in charakteristischer Weise in seiner Abhängigkeit von den Deformationsfunktionen und der Entropie sowie von deren Ableitungen gegeben ist. *Thermodynamisches Gleichgewicht wird bedingt durch die Variationsgleichung*

(2) $$\delta Q + \delta A = 0,$$

die genau im alten Sinne zu verstehen ist; dabei können Nebenbedingungen auch das thermische Verhalten des Mediums, d. h. die Funktion s betreffen.

Die volle Bedeutung der Thermodynamik kommt indessen erst zum Vorschein, wenn man in diesem Ansatz den sog. *ersten Hauptsatz* zur Geltung bringt, der einen *allgemeingültigen* Zusammenhang der sämtlichen Wirkungskomponenten einschliesslich der Temperatur mit einer *einzigen* Funktion der Zustandsgrössen statuiert, von der Art wie er in Nr. 7 für einzelne Fälle diskutiert wurde.[195]) Zieht man nämlich in δA nur die inneren Wirkungen innerhalb des Mediums in Betracht, *so soll $\delta Q + \delta A$ für jede virtuelle Verrückung bis aufs Vorzeichen gleich der Variation eines in bestimmter, für jedes Medium charakteristischer Weise nur von den jeweiligen Deformationsfunktionen und der Entropie abhängigen Ausdruckes, der potentiellen Energie Φ, sein.* Was die Gestalt von Φ angeht, so ist der einfachste Fall der, dass Φ ein

194) Für die Ansätze der gewöhnlichen Thermodynamik, die sich im folgenden genau wiederholen, vgl. das Referat V 3 (*Bryan*).

195) Für kontinuierliche Medien hat namentlich *P. Duhem* diese Ansätze nach den verschiedensten Richtungen hin angewendet; man vergleiche die zusammenfassende Darstellung in seinem Traité d'Énergétique, T. II (Paris 1911), Chap. XIV.

Raumintegral über eine Funktion φ von x, y, z, ihren ersten Ableitungen und s ist[196]):

$$(3)\qquad \delta Q + \delta A = -\delta \iiint\limits_{(V_0)} \varphi(x, \ldots; x_a, \ldots; s)\, da\, db\, dc;$$

dann folgt speziell für die Temperatur

$$(4)\qquad \Theta = -\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

was den im wesentlichen unverändert bleibenden Gleichungen (4) von Nr. 7a zur Seite tritt. Aus diesen Gleichungen folgen wieder reziproke Relationen der Art

$$(5)\qquad -\varrho_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x_a} = \frac{\partial X_a}{\partial s}$$

zwischen je einem Paare thermischer und elastischer Parameter — in analoger Bedeutung, wie oben in einem anderen Fall erörtert (Nr. **14**, (4)) wurde.

Es ist häufig zweckmässig, an Stelle von s die Temperatur Θ als bestimmenden Parameter einzuführen; das ist wiederum der Form nach die in Nr. 7e (S. 654) angewandte kanonische Transformation: Berechnet man aus (4) s als Funktion von Θ und bestimmt damit

$$\psi = \varphi + \varrho_0 \Theta s = \psi(x, \ldots; x_a, \ldots; \Theta),$$

so erhält man statt (3) für alle willkürlichen Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ und $\delta \Theta$ die Identität:

$$(3')\qquad -\iiint\limits_{(V)} s\,\delta\Theta\,\varrho\, dV + \delta A = -\delta \iiint\limits_{(V_0)} \psi\, da\, db\, dc.$$

Man nennt ψ das „thermodynamische Potential bei gegebenem Deformationszustand“; zieht man gleichzeitig noch die Transformation von Nr. 7e heran, die die Deformationsgrössen durch die Spannungskomponenten ersetzt, so erhält man die anderen Arten thermodynamischer Potentiale in völliger Analogie zu den üblichen Betrachtungen der Thermodynamik der Systeme mit endlichvielen Freiheitsgraden.[197])

Indem man rechter Hand in (3) das Auftreten der Deformationsgrössen in geeigneter Weise spezialisiert, erhält man die thermodynamischen Ansätze für die einzelnen im vorigen behandelten Gebiete; dabei bedingt die Art, wie s in φ (oder Θ in ψ) mit den einzelnen Deformationsgrössen verknüpft ist, natürlich den thermischen Effekt

196) Dieser Ansatz hat für den speziellen Fall der reinen Elastizitätstheorie zuerst *W. Thomson*, Quart. Journ of Math. 1 (1857) ausgebildet; vgl. V 3, Nr. **21**, *Bryan*.

197) S. V 3, Nr. **16** (*Bryan*).

der einzelnen Arten der Deformationen bzw. die Art der Deformationen, die durch thermische Wirkungen hervorgerufen werden. Für die *Elastzitätstheorie* und die *Hydrodynamik* sind diese Zusamenhänge vielfach untersucht worden.[198])

Man hat in (3) für die potentielle Energie Φ auch andere der in Nr. 7 untersuchten Ansätze verwendet, wobei zu den früheren Formeln nur die Berücksichtigung der Abhängigkeit von s neu hinzukommt. Neben den Integralen vom Typus Nr. 7, (7), die *P. Duhem*[199]) in dieser Richtung vielfach verwendet hat, sei hier nur der Fall hervorgehoben, dass Φ als Summanden ein *Flächenintegral* etwa über die Trennungsfläche verschiedener in V enthaltenen Medien besitzt; entsprechend wird man dann auf dieser Fläche auch eine *Flächendichte der Entropie* und demgemäss ein Flächenintegral als Beitrag zur Wärmezufuhr anzunehmen haben. Diese Ansätze stellen die *thermischen Wirkungen der Kapillarität*[200]) dar.

Die weitere Ausbildung dieser thermodynamischen Ansätze erfolgt dann so, dass man in der Fundamentalgleichung neue die Konstitution des betrachteten Mediums beschreibende physikalische Parameter auftreten lässt, also etwa φ von ihnen abhängen lässt. Es genüge, als Beispiel hier zu erwähnen, dass man so durch Aufnahme der elektrischen Feldstärke wie in Nr. **14**, (2) zu den Erscheinungen der *Pyroelektrizität*, der Wechselwirkung von Wärme, Druck und elektrischer Erregung, in Kristallen geführt wird.[201])

Endlich sind hier noch die an *J. W. Gibbs*[202]) anknüpfenden *thermochemischen* Untersuchungen zu erwähnen, die auf der Vorstellung mehrerer denselben Raum simultan ausfüllender Medien beruhen, deren Zustandsparameter gleichzeitig in φ eingehen; man hat hier freilich sich bisher durchweg auf den Fall von endlich vielen Freiheitsgraden beschränkt: man nimmt die einzelnen Medien (Phasen) homogen an, so dass ihr Zustand durch eine Reihe nicht mehr vom Ort abhängiger Variabler charakterisiert wird.[203])

16. Beziehungen zur Relativitätstheorie. Es soll zum Schluss noch die Frage aufgenommen werden, die schon wiederholt gelegent-

198) Vgl. z. B. *Voigt,* Kompendium I, p. 523 ff.; *Voigt,* Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1910, p. 276 ff., p. 763 ff.; *Duhem,* Traité d'énergétique II, Paris 1911, p. 115 ff.; *G. Hamel,* Elementare Mechanik, Leipzig 1912, p. 571 ff.

199) S. insbes. Ann. Éc. Norm. (3) 10 (1893), p. 183 ff. und 21 (1904), p. 99 ff. und Traité, a. a. O.[195])

200) Vgl. V 9, Nr. **18** (*Minkowski*).

201) Siehe V 16, Nr. **11**, *F. Pockels.*

202) Trans. Connect. Acad. III (1876—1878) = Scient. Papers I (1906), p. 55.

203) Vgl. V 3, Nr. **26** (*Bryan*) und IV 11, Nr. **22—24** (*K. Heun*).

lich gestreift wurde, *wie sich die verschiedenen Ansätze der Mechanik der Kontinua bei Transformationen des verwendeten Koordinatensystems verhalten*; von hier aus wird auch die Verbindung zu den Ansätzen der modernen Relativitätstheorie hergestellt werden.

Unsere Vorstellung von der Homogenität und Isotropie des gewöhnlichen Raumes verlangt zunächst, dass die Gesetze jedes physikalischen Vorganges ungeändert bleiben, wenn man sie auf irgendein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem bezieht und gleichzeitig *alle* in den Vorgang eingreifenden Grössen der entsprechenden Transformation unterwirft; man sagt kurz, *dass die gesamte Physik invariant ist gegenüber der Gruppe der sämtlichen rechtwinkligen Koordinatentransformationen der gewöhnlichen Geometrie, der sog. „Hauptgruppe" oder „Euklidischen Gruppe"*. Hieraus folgt speziell, dass die virtuelle Arbeit der sämtlichen inneren Wirkungen in einem kontinuierlichen System bei der einer unendlichkleinen Abänderung des Koordinatensystems entsprechenden virtuellen Verrückung notwendig verschwindet, oder dass das gesamte Potential dieser Wirkungen bei jeder solchen Verrückung des Kontinuums ungeändert bleibt, d. h. im Sinne von *E.* und *F. Cosserat* ein *Euklidisches Potential* ist (vgl. Nr. 7 b, S. 650).

In analoger Weise kann man nun in der *Kinetik* fragen, ob es auch Transformationen der Zeitvariablen t oder gar simultane Transformationen der Zeit- und Raumvariablen gibt, die die physikalischen Gesetze ungeändert lassen. Legt man die kinetischen Grundansätze in ihrer ursprünglichen Gestalt (Nr. 5, (1), (5), (4), (6)) zugrunde, so ergiebt sich, dass eine Verschiebung des Nullpunktes der Zeitrechnung

$$\bar{t} = t + \beta \tag{1}$$

sowie eine gleichförmige Bewegung des rechtwinkligen Koordinatensystemes parallel mit sich

$$\bar{x} = x + \alpha_1 t, \quad \bar{y} = y + \alpha_2 t, \quad \bar{z} = z + \alpha_3 t \tag{2}$$

die kinetischen Glieder im wesentlichen nicht ändert; nur die zeitlichen Ableitungen 1. Ordnung, beispielsweise die kinetische Energie T, werden bei der Substitution (2) zunächst modifiziert, aber man sieht leicht, dass die Zusatzglieder bei der Variation fortfallen und daher die Bewegungsgesetze ungeändert bleiben. Also sind *die Theoreme der Mechanik der Kontinua in gewissem Umfange invariant gegenüber einer zehnparametrigen Gruppe linearer Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten*[204]), die sich aus den rechtwinkligen Koordinatentransforma-

204) Vgl. hierzu die Darlegungen in IV 1, Nr. **13—17**, *Voss.*

tionen, aus den Parallelverschiebungen des Axensystems mit konstanter Geschwindigkeit sowie den Änderungen des Nullpunktes der Zeitrechnung zusammensetzt; die allgemeine Substitution dieser sog. *Galilei*schen *oder Newton*schen *Gruppe* lautet:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_1 t + \beta_1 \\ \bar{y} &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_2 t + \beta_2 \\ \bar{z} &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_3 t + \beta_3 \\ \bar{t} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t + \beta, \end{aligned}$$

wo die 9 Grössen α_{ik} ein orthogonales Koeffizientensystem bilden. Die Substitutionen (3) haben die charakteristische Eigenschaft, dass sie das Differential dt ungeändert lassen, wenn aber $dt = 0$ ist, auch das Quadrat der Linienelemente $dx^2 + dy^2 + dz^2$. Eine besondere Bedeutung in der Mechanik hat auch die durch Hinzunahme aller *Ähnlichkeitstransformationen* des Raumes einerseits und der Zeitaxe andererseits erweiterte *zwölfgliedrige Gruppe*; ihre Anwendung lässt die physikalischen Grössen nicht mehr absolut invariant, sondern setzt ihre *Dimensionen* in bezug auf Längen- und Zeiteinheit in Evidenz.[205])

In der modernen Entwicklung der Optik und Elektrodynamik hat die Tatsache besondere Wichtigkeit gewonnen, dass durchaus nicht alle Gesetze der Physik diese Invarianz gegenüber der *Galilei*schen Gruppe aufweisen. Das kam einmal so zustande kommen, dass gemäss den allgemeinen Ansätzen von Nr. **5** d und **7** f ganz andersartige kinetische Glieder, als die der klassischen Mechanik den Vorgang bestimmen, andererseits aber auch dadurch, dass bei sonst unverändertem Ansatz durch den physikalischen Sachverhalt für gewisse Grössen eine andere Deutung und damit auch eine andere Behandlung bei der Transformation nahegelegt wird. So müssen z. B. die optischen Grundgleichungen (3a) von Nr. **13**, da sie genau aus dem normalen Ansatz des *d'Alembert*schen Prinzips entstehen, gegenüber der *Galilei*transformation (2) invariant seien, wenn man nur den x-y-z-Raum transformiert und a, b, c als die jedes substantielle Teilchen charakterisierenden Parameter ungeändert lässt. Dem entgegen giebt die Optik Anlass, den Lichtvektor u, v, w als Funktion der Stelle a, b, c zu betrachten und demgemäss diese Variablen a, b, c der *Galilei*transformation (2) zu unterwerfen; alsdann ist nach der Transformation die zeitliche Differentiation bei konstantem $\bar{a} = a + \alpha_1 t, \ldots$ zu vollziehen, und in diesem Sinne sind die Gleichungen der Optik nicht mehr invariant.

205) Vgl. hierüber IV 1, Nr. **10**, *Voss.*

Bestimmt man nun aber diejenigen ganzen linearen Transformationen der Variablen a, b, c, t, bei denen die Grundgleichungen der Optik in *diesem* Sinne invariant bleiben[206]), so ergeben sich die nach *H. Poincaré*s[207]) Vorschlag als *Lorentz-Transformationen* bezeichneten Transformationen, deren fundamentale Bedeutung für die Elektrodynamik und die Physik die Untersuchungen von *H. A. Lorentz*[208]), *A. Einstein*[209]), *H. Poincaré*[207]), *H. Minkowski*[210]) erwiesen haben. Es sind diejenigen „Affinitäten" des vierdimensionalen x-y-z-t-Raumes, der *Minkowski*schen „Welt":

$$(4)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + \alpha_{15} \\ \bar{y} &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t + \alpha_{25} \\ \bar{z} &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t + \alpha_{35} \\ \bar{t} &= \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t + \alpha_{45}, \end{aligned}$$

welche die Differentialform $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ (in der c die *Lichtgeschwindigkeit* bedeutet) in sich selbst transformieren:

$$(5)\qquad d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c^2 d\bar{t}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

und für die obendrein gilt:

$$(6)\qquad \frac{d\bar{t}}{dt} = \alpha_{44} > 0;$$

sie bilden wiederum eine *zehngliedrige Gruppe*, die *Lorentzgruppe*. Bemerkt man, dass wegen (5) die Transformation (4) eine orthogonale Substitution im Raume der Koordinaten $x, y, z, ct\sqrt{-1}$ darstellt, so kann man die Relationen für die Koeffizienten von (4) und die Invarianten der Gruppe leicht angeben.[211]) Übrigens kann eine etwas umfassendere „erweiterte *Lorentz*gruppe" geometrisch dadurch charakterisieren, dass sie die quadratische Fläche $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ in

206) *W. Voigt*, Nachr. Ges. d. W. Göttingen 1887, p. 41.

207) *H. Poincaré*, Rendic. Circ. mat. Palermo 21 (1906), p. 129.

208) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, § 89—92 (Leiden 1895). Amsterdam Acad. Sc. Proc. 6 (1904), p. 809. Abgedr. im Heft 2 der „Fortschr. d. math. Wissenschaften" (Leipzig 1913; hrsg. v. *O. Blumenthal*).

209) *A. Einstein*, Ann. d. Phys. (4) 17 (1905), p. 891. Abgedruckt am selben Orte.

210) *H. Minkowski*, a) Die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten Körpern, Nachr. Ges. d. W. Göttingen, math.-phys. Kl., 1908, p. 53 = Math. Ann. 68 (1910), p. 472; auch abgedr. in Fortschr. d. math. Wiss. (Leipzig 1910), Heft 1. b) Raum und Zeit, Jahresber. d. D. M. V. 18 (1909), p. 75 = Phys. Z. 10 (1909), p. 104; auch separat Leipzig 1909 und in dem in 208) genannten Heft.

211) *H. Minkowski*,[210]) a) § 5; vgl. auch *A. Sommerfeld*, Ann. d. Phys. (4) 32 (1910), p. 749; 33 (1910), p. 649.

dem dreidimensionalen unendlichfernen Gebilde des vierdimensionalen x-y-z-t-Raumes in sich transformiert, und man kann daher ihre Theorie aus bekannten Untersuchungen der projektiven bzw. affinen Geometrie entnehmen.[212]) Diese erweiterte Gruppe enthält elf Parameter statt zehn, und ihre Transformationen erfüllen die Identität (5) nur bis auf einen konstanten Faktor; bestimmt man diesen etwa durch die Determinantenbedingung

$$|a_{ik}| = 1 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

so zerfällt sie noch in zwei getrennte Kontinua, von denen das eine mit der durch (6) charakterisierten Lorentzgruppe identisch ist. Der elfte Parameter der erweiterten Gruppe entspricht einer Änderung der Masseinheit im x-y-z-t-Raum; in ihm ist tatsächlich nur *eine* Masseinheit verfügbar, da Raum- und Zeitkoordinaten durch die Forderung der Invarianz der Form (5), d. h. durch die Festlegung der Lichtgeschwindigkeit verknüpft sind, während bei der *Galilei*gruppe durch Erweiterung um zwei Parameter über Zeit- und Raumeinheit getrennt verfügt werden konnte.[213])

Lässt man nun c gegen ∞ konvergieren, so geht die erweiterte *Lorentz*gruppe über in die Gesamtheit der linearen Transformationen, welche die durch die beiden Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$ im Unendlichfernen des x-y-z-t-Raumes bestimmte quadratische Kurve (d. i. der imaginäre Kugelkreis der Räume $t =$ konst.) in sich überführen; das ist aber gerade die erweiterte *Galilei*gruppe[214]), und es ist sonach *die Galileigruppe der Grenzfall der Lorentzgruppe bei unendlich wachsender Konstante c*. Dies hat *Minkowski* veranlasst, dem sog. *Relativitätsprinzip*, das als Forderung der *Invarianz gegenüber der Lorentzgruppe* zunächst für die Gesetze der Elektrodynamik ausgesprochen wurde, als „*Postulat der absoluten Welt*“ einen weiteren Gültigkeitsbereich zu geben[215]): Was zunächst als Invarianz gegenüber der *Galilei*gruppe erscheint, ist in Wahrheit nur eine empirische Approximation an die exakte Invarianz gegenüber der *Lorentz*gruppe mit einem im Vergleich zu den gewöhnlich auftretenden Geschwindigkeiten sehr grossen c.

Die Ansätze für die Dynamik eines Kontinuums, das diesem Relativitätspostulat unterliegt, sind in den früher aufgestellten allgemeinen

---

212) *F. Klein,* Die geometr. Grundlagen der Lorentzgruppe, Jahresber. d. D. M. V. 19 (1910), p. 281.

213) Vgl. *F. Klein*, a. a. O., p. 295f.

214) *F. Klein,* a. a. O., p. 291ff.

215) *H. Minkowski,*[210]) a) Anhang; b) Cap. I, II.

Formen enthalten; es sind nur alle eingehenden Zustandsfunktionen als Invarianten bzw. Kovarianten der *Lorentz*gruppe zu wählen. Ist die Bewegung des Kontinuums wieder wie in Nr. 2, (5) gegeben, so gestalten sich die Formeln homogener, wenn man für jedes Teilchen a, b, c als Funktion von t eine „Ortszeit"

$$\tau = \tau(a, b, c;\ t)$$

einführt; setzt man noch der Symmetrie halber

$$x = x_1,\quad y = x_2,\quad z = x_3,\quad t = x_4,$$
$$a = \xi_1,\quad b = \xi_2,\quad c = \xi_3,\quad \tau = \xi_4,$$

so schreiben sich die Bewegungsgleichungen

(7) $$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

sie stellen bei variablem ξ_4 ein den vierdimensionalen Raum einfach überdeckendes System von Kurven (*Weltlinien*) dar, deren Gesamtverlauf ein vollständiges Bild der Bewegung giebt.[216])

Eine wesentliche Ergänzung des Relativitätspostulates bildet die Forderung, *dass alle überhaupt möglichen Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit c liegen*, d. h. wenn wir allgemein:

(7a) $$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

setzen, dass

$$x_{14}^2 + x_{24}^2 + x_{34}^2 < c^2 x_{44}^2,$$

oder — geometrisch gesprochen — dass jede Tangente einer Weltlinie *innerhalb* des Kegels der Richtungen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$ liegt. Äquivalent damit ist die Tatsache, dass man jedes Teilchen zu jeder Zeit durch eine passende *Lorentz*transformation (4) „auf Ruhe transformieren" kann, d. h. dass man zu einem solchen neuen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ übergehen kann, in dem bei analoger Bezeichnung wie in (7a) für den betrachteten Wertekomplex $\xi_1, \dots \xi_4$

$$\bar{x}_{14} = \bar{x}_{24} = \bar{x}_{34} = 0$$

wird. Alle möglichen „Ruhtransformationen" unterscheiden sich voneinander, abgesehen von den willkürlich bleibenden Größen $\alpha_{15}, \dots \alpha_{45}$, nur durch eine gewöhnliche orthogonale Transformation der drei Koordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$; in den verschiedenen „Ruhkoordinatensystemen" werden also die Deformationsgrössen erster Ordnung $\bar{x}_{ik}$ wohl von-

216) *H. Minkowski*,[210]) b).

einander verschieden sein können, hingegen werden die den orthogonalen Koordinatentransformationen gegenüber invarianten eigentlichen „Formänderungskomponenten" (Nr. **9**, (1))

$$e_i = \tfrac{1}{2}(\bar{x}_{1i}^2 + \bar{x}_{2i}^2 + \bar{x}_{3i}^2 - 1), \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{8}$$
$$g_{ik} = \bar{x}_{1i}\bar{x}_{1k} + \bar{x}_{2i}\bar{x}_{2k} + \bar{x}_{3i}\bar{x}_{3k}$$

unabhängig von der speziell gewählten Ruhtransformation sein. Denkt man die $\bar{x}_{ik}$ durch ihre Ausdrücke in den ursprünglichen Bewegungsfunktionen ersetzt, so sind diese *Ruhdeformationen* die *einzigen Invarianten erster Ordnung*, die das System der Weltlinien (7) gegenüber der *Lorentz*gruppe aufweist; sie sind zugleich auch von der willkürlichen Wahl des Parameters $\xi_4 = \tau$ unabhängig.[217])

Eine virtuelle Variation der Bewegung des Kontinuums stellt sich nun durch vier Funktionen δx_i $(i = 1, \ldots 4)$ dar; da die Variable $\xi_4 = \tau$ willkürlich ist, bedeutet das für die Bewegung des Kontinuums selbst, d. h. für das System der Weltlinien nur wieder drei willkürliche Funktionen. Die virtuelle Arbeit irgendwelcher am Kontinuum angreifender Volumkräfte im Intervall $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ erhält dann den Ausdruck

$$\delta A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iiint_{(V_0)} \sum_{i=1}^{4} X_i \delta x_i \varrho_0 \, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 . \tag{9}$$

Dabei bedeuten X_1, X_2, X_3 analog zu Nr. **3a**, S. 613, wenn man ihnen noch den Faktor $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{x_{44}}$ hinzufügt, die auf die Masseneinheit des undeformierten Mediums im ξ_1-ξ_2-ξ_3-Raume berechneten Kraftkomponenten; bemerkt man ferner, dass eine Variation, für die an jeder Stelle

$$\delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3 : \delta x_4 = x_{14} : x_{24} : x_{34} : x_{44} \tag{10}$$

ist, nur eine Verschiebung der Weltlinien in sich, also eine Änderung des Parameters τ bedeutet, und dass für sie also δA identisch verschwinden muss, so folgt, dass

$$-X_4 = \frac{1}{x_{44}} \sum_{i=1}^{3} x_{i4} X_i = X_1 \frac{dx_1}{dt} + X_2 \frac{dx_2}{dt} + X_3 \frac{dx_3}{dt} \tag{9 a}$$

— wiederum bis auf den Faktor $\frac{1}{x_{44}}$ — die in der Zeiteinheit an der Masseneinheit des undeformierten Mediums geleistete Arbeit bedeutet.[218])

---

217) *M. Born*, Ann. d. Phys. (4) 30 (1909), p. 1; speziell § 2. — *G. Herglotz*, Ann. d. Phys. (4) 36 (1911), p. 493; speziell § 1, 2.

218) *H. Minkowski*,[210]) a) Anhang; *G. Herglotz*, a. a. O., p. 506.

Analog wird (vgl. Nr. 5, (10)) als Arbeit irgendwelcher am Kontinuum angreifenden Spannungen bei einer virtuellen Verrückung das Integral

$$(11) \qquad \delta A_1 = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \iiint_{(V_0)} \sum_{i,k=1}^{4} X_{ik} \frac{\partial \delta x_i}{\partial \xi_k} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

die *„Spannungswirkung“* von *H. Minkowski*[219]), angesetzt; da für die virtuelle Verrückung (10) auch δA_1 identisch verschwinden muss, ergeben sich die Identitäten

$$(11\,\mathrm{a}) \qquad \sum_{i=1}^{4} x_{i4} \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial X_{ik}}{\partial \xi_k} = 0$$

im Innern des Bereiches V_0 und

$$(11\,\mathrm{b}) \qquad \sum_{i=1}^{4} x_{i4} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} X_{ik} = 0$$

am Rande, wofern dessen Gleichung

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

ist.[220]) Die schon mehrfach angewandten Umformungen gestatten aus dem verallgemeinerten *Hamilton*schen Prinzip, das das Verschwinden von

$$(12) \qquad \delta A + \delta A_1 = 0$$

für alle willkürlichen nur für $\tau = \tau_1$ und $\tau = \tau_2$ identisch verschwindenden virtuellen Verrückungen δx_i fordert, die Bewegungsgleichungen zu entnehmen:

$$(12\,\mathrm{a}) \qquad \varrho_0 X_i + \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial X_{ik}}{\partial \xi_k} = 0 \quad \text{innerhalb } V_0,$$

$$(i = 1, \ldots 4)$$

$$(12\,\mathrm{b}) \qquad \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} X_{ik} = 0 \quad \text{auf dem Rande von } V_0.$$

Vermöge der Identitäten (11a), (11b) ist je eine dieser vier Gleichungen von den drei anderen abhängig. Analog wie früher (Nr. 3c, S. 617f.) kann man in (11) statt der ξ_i die x_i als unabhängige Variable einführen, und man erhält dann eine den Gleichungen (5) von Nr. 3 entsprechende Form der Bewegungsgleichungen, wie sie von *Minkowski* angegeben wurde.[221])

219) *H. Minkowski,*[210]) a) Anhang, Formel (17).

220) *G. Herglotz,* a. a. O., p. 506f.

221) *H. Minkowski,*[210]) a) Anhang, Formel (20). Die Gleichungen erscheinen

Über die Art der Abhängigkeit der Spannungskomponenten von den Bewegungsfunktionen (7) kann zunächst ganz frei verfügt werden, wenn nur die Relationen (11a), (11b) erfüllt sind; es sei hier nur auf den Potentialansatz Nr. 7, (26) eingegangen, der auf die von *G. Herglotz*[222]) angegebene Übertragung der Formeln der gewöhnlichen Elastizitätslehre (Nr. **9**, (2), (3)) in die Relativitätstheorie der *Lorentz*gruppe führt. Es sei also

$$(13) \qquad -\delta A_1 = +\delta\Phi = \delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} dt \iiint_{(V_0)} \varphi(x_{ik})\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3,$$

wo φ nur von den ersten Ableitungen der Bewegungsfunktionen abhängen möge; dann bleibt Φ bei allen *Lorentz*transformationen nur dann ungeändert, wenn φ bis auf den Faktor x_{44} lediglich von den sechs Ruhdeformationen (8) abhängt:

$$(13\,\text{a}) \qquad \varphi = \varphi_0(e_1, e_2, e_3, g_{12}, g_{23}, g_{31}) \cdot x_{44}.$$

Durch Vergleich von (13) und (11) folgt nun

$$(13\,\text{b}) \qquad X_{ik} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{ik}},$$

und die Substitution dieser Werte in (12a), (12b) liefert die von *Herglotz* angegebenen Grundgleichungen.[223])

Minkowski hat die Analogie mit dem klassischen *Hamilton*schen Prinzip noch weiter getrieben, indem er von den Arbeitsausdrücken, in die hier von vornherein die kinetischen Glieder mit eingehen, allgemein einen rein kinetischen Teil abtrennt.[224]) Betrachtet man die Umgebung einer bestimmten Stelle x_i in einem dieser Stelle zugehörigen Ruhkoordinatensystem $\bar{x}_i$, und misst Volumen und Masse des Mediums in dem $\bar{x}_1$-$\bar{x}_2$-$\bar{x}_3$-Raume, so heißt die für den Punkt x_i sich ergebende Massendichte $\bar{\varrho}$ die *Ruhdichte* dieser Stelle. *Minkowski* lässt alsdann die Variation des als *Massenwirkung* bezeichneten, über den betrachteten vierdimensionalen Raum erstreckten Integrales

$$(14) \qquad P = \iiiint \bar{\varrho}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

---

in ein wenig modifizierter Form, da bei ihm der Parameter τ stets die nur durch (15) definierte „Eigenzeit" ist und also bei der Variation stets eine Nebenbedingung und ein Lagrangescher Faktor auftritt.

222) *G. Herglotz,* a. a. O., p. 503 ff. — Vgl. auch für den speziellen Fall der Hydrodynamik — analog Nr. **10** — die Ansätze von *E. Lamla,* Ann. d. Phys. (4) 37 (1912), p. 772.

223) a. a. O., p. 505 f.

224) *H. Minkowski,*[210]) a) Anhang, Formel (7) bis (14).

additiv zu (12) hinzutreten, wobei während der Variation die Masse konstant zu halten ist. Verwendet man nun eine spezielle Ortszeit τ, nämlich eine solche, die der Relation

$$(15) \qquad c^2\left(\frac{\partial x_4}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_2}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_3}{\partial \tau}\right)^2 = c^2$$

genügt, so wird δP bis auf Randglieder gleich

$$\iiiint \bar{\varrho}\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2}\delta x_2 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \tau^2}\delta x_3 - c_2\frac{\partial^2 x_4}{\partial \tau^2}\delta x_4\right) dx\, dy\, dz\, dt,$$

und die Faktoren der δx_i treten — in völliger Analogie zu den Grundgleichungen der *Newton*schen Mechanik — zu den Gleichungen (12) hinzu. *M. Born*[225]) hat gezeigt, wie man den Massenfaktor auch als *Lagrange*schen Faktor der Nebenbedingung (15) einführen kann.

225) Ann. d. Phys. (4) 28 (1909), p. 571.

(Abgeschlossen im August 1913.)

IV 31. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN DER FESTIGKEITSLEHRE.

Von

TH. v. KÁRMÁN

IN AACHEN

UNTER MITWIRKUNG VON **L. FÖPPL** IN WÜRZBURG.

Inhaltsübersicht.

B. Theoretische Ansätze.

I. Phänomenologischer Standpunkt.

15. Einleitung.
16. Die *St. Venant*sche Theorie der Plastizität.
17. Theorie der inneren Reibung fester Körper.
18. Theorie des Doppelmediums.
19. Theorie der Relaxation. *Maxwell* und *Boltzmann*.

II. Standpunkt der Strukturtheorie.

20. Allgemeines.
21. Bleibende Deformation in Kristallen.
22. Bleibende Deformation in kristallinischen Haufwerken.
23. Eingreifen der Thermodynamik. Phasen- und Gefügegleichgewicht.
24. Hysteresis und Nachwirkung in Kristallen und kristallinischen Haufwerken.
Schlußbemerkung.

Litteratur.

I. Lehrbücher.

C. Bach, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1889/90, 6. Aufl., Berlin 1911.
A. Brauer, Festigkeitslehre, Leipzig 1905.
J. A. Ewing, The strength of materials, Cambridge 1899, 2 ed. 1903.
Ch. Duguet, Déformation des corps solides, 2 vols., Paris 1882/5.
F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl., Berlin 1878.
J. B. Johnson, The materials of construction, 4 ed., New-York 1905.
A. Martens, Handbuch der Materialienkunde für den Maschinenbau, I. Teil, Berlin 1898; II. Teil, Hälfte A bearb. von *E. Heyn,* Berlin 1912.
L. Navier, Résumé des leçons sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, 3 éd. avec des notes et appendices par *B. de St. Venant,* 2 vols., Paris 1864.
J. Résal, Résistance des matériaux, Paris 1898.
L. v. Tetmajer, Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre Zürich 1889, 3. Aufl., Wien 1895.
W. C. Unwin, The testing of materials of construction, London 1888.

II. Monographien, Mitteilungen aus Versuchsanstalten und Kongressschriften.

C. Bach, Abhandlungen und Berichte, Stuttgart 1897.
A. Considère, Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions, Paris 1886 (auch in Annales des ponts et chaussées (6) 9 (1885 I) u. (6) 11 (1886 I); deutsch von *E. Hauff,* Die Anwendung von Eisen und Stahl bei Konstruktionen, Wien 1888.
O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, 2. Aufl. 1914.
Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction, 4 vols., Paris 1894/5.
Congrès international des méthodes d'essai des matériaux de construction tenu à Paris du 9 au 16 juillet 1900, Procès-Verbaux, Paris 1901; Communications présentées, 3 vols., Paris 1901.

Mitteilungen aus den kgl. technischen Versuchsanstalten in Berlin, Berlin 1883 ff; seit 1904 unter dem Titel: *Mitteilungen des kgl. Materialprüfungsamtes in Gross-Lichterfelde,* Berlin.

Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der technischen Hochschule in München, München 1873 ff.

Internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik; Berichte über den 1.—6. Kongress vgl. die Zeitschrift „Baumaterialienkunde" (Jg. 1 (1896) — 13 (1908)) und *Mitteilungen,* Wien-Berlin (erscheinen seit 1908).

Einleitung. Der vorliegende Artikel will zunächst eine Übersicht über die Grundtatsachen und Anschauungen bezüglich des Verhaltens fester Körper gegen mechanische Beanspruchung liefern. Trotz des sehr ausgedehnten Beobachtungsmaterials kann man heutzutage noch kaum zu einer systematischen Übersicht und zu einem klaren Verständnis der Erscheinungen gelangen. Es stehen viele Erfahrungstatsachen vereinzelt da, so dass es nicht immer möglich ist, die gesetzmässigen Zusammenhänge der einzelnen Grössen auch nur in der Form von empirischen Gesetzen mit der nötigen Klarheit festzulegen. Der Grund liegt offenbar darin, dass die Festigkeitslehre ebenso wie die übrigen technischen Wissenschaften nicht den Weg einschlagen konnte, sich zuerst auf die Substanzen einfachster Struktur und auf die Vorgänge einfachster Art zu beschränken, vielmehr entscheiden die Bedürfnisse der Praxis darüber, welche Stoffe und welche Vorgänge untersucht werden sollen. So hat man im Laufe der Zeiten eine grosse Menge für die Praxis nützlicher Beobachtungen gesammelt, mit deren wissenschaftlicher Bearbeitung jedoch erst in den letzten Jahrzehnten begonnen werden konnte.

Der *erste Teil* (A) des Artikels bietet eine Zusammenstellung der wichtigsten *Erfahrungstatsachen* über Deformations- und Bruchvorgänge. Dabei spielt das Beobachtungsmaterial, welches in den grossen technischen Laboratorien und Materialprüfungsanstalten gewonnen wurde, eine hervorragende Rolle. Es konnte dabei keine Vollständigkeit erstrebt werden; ein grosser Teil der experimentellen Untersuchungen dient hauptsächlich dem Zwecke, die Methoden der praktischen Materialprüfung[1]) zu rechtfertigen und zu vervollkommnen.

---

1) Über die Fortschritte der Methoden der praktischen Materialprüfung findet man vornehmlich in den Berichten der internationalen Kongresse Aufschluss: z. B. in den Communications présentées devant le congrès international des méthodes d'essai des matériaux de construction, Paris 1901, und den Berichten des Internationalen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik. Ein wertvolles Material — auch viel Bibliographisches — ist niedergelegt in dem Bericht der 1891 eingesetzten „Commission des méthodes d'essai des matériaux

Dieser Gesichtspunkt musste in unserer Darstellung zurücktreten; es wurde mehr das Gewicht auf die Arbeiten gelegt, die über das physikalische Verhalten der Körper neue Aufschlüsse geliefert haben.

Um das weit ausgedehnte Beobachtungsmaterial zu ordnen, unterscheiden wir *drei Stufen der Approximation,* die die Vorgänge immer mehr in den Einzelheiten verfolgen: in erster Annäherung erscheint die Deformation eines festen Körpers durch gegebene Kräfte als ein Gleichgewichtszustand, wobei Deformation und Spannungszustand einander eindeutig zugeordnet werden. In zweiter Annäherung beschränken wir uns zwar noch immer auf Gleichgewichtszustände, berücksichtigen jedoch die Tatsache, daß für jeden Zustand auch die Folge der durchlaufenen Gleichgewichtszustände (die „Vorgeschichte") massgebend ist. Schliesslich wird in dritter Annäherung auch der zeitliche Verlauf der Vorgänge in Betracht gezogen. Die Erscheinungen, durch die die einfache Vorstellung der ersten Annäherung mit der zweiten bzw. dritten Approximation modifiziert wird, bezeichnet man als „Hysteresis-" und „Nachwirkungserscheinungen". Man sieht gleichzeitig, dass die drei Annäherungen den praktischen Fällen der *langsam fortschreitenden, langsam wechselnden* und *schwingungsartigen Beanspruchung* entsprechen.

Der *zweite Teil* (B) des Referates giebt dann eine Darlegung der *theoretischen Ansätze,* die bisher für die durch die Beobachtung und das Experiment gelieferten Erfahrungen gemacht sind.

A. Empirische Tatsachen.

I. Deformations- und Bruchvorgänge bei langsam fortschreitender Belastung (erste Näherung).

1. Das Hookesche Gesetz. Die Grundlage zur Berechnung der Deformation fester Körper *innerhalb der Elastizitätsgrenze* bildet im allgemeinen die Annahme der *Proportionalität zwischen Spannungskomponenten und Deformationsgrössen.* Die Proportionalität zwischen Kraft und federnder Formänderung ist zuerst bekanntlich in einer ziemlich allgemeinen Form von *R. Hooke*[2]) ausgesprochen worden; in exakter Fassung konnte jedoch das Proportionalitätsgesetz — „verallgemeinertes *Hooke*sches Gesetz" — erst nach der Entwicklung der allgemeinen Prinzipe der Mechanik der Kontinua[3]) an der Wende des

de construction". Vgl. die Litteraturübersicht oben. Siehe auch *A. Leon,* Die Materialprüfungsmethoden, Mitteilungen des k. k. technischen Versuchsamts, Wien 1 (1912), Heft 1.

2) *R. Hooke,* Lectures de potentia restitutiva of springs, London 1686.

3) Über die historische Entwickelung der Elastizitäts- und Festigkeitslehre vgl. etwa die historische Einleitung zu *L. Navier,* Résumé des leçons sur l'ap-

18. Jahrhunderts formuliert werden. Die diesbezüglichen mathematischen Untersuchungen sind in Art. IV, 23 (*C. H. Müller-A. Timpe*) dargelegt; an dieser Stelle möge über die *Berechtigung der Proportionalitätsannahme* als gute Annäherung und über die Abweichungen vom Proportionalitätsgesetz (Nr. 2) kurz berichtet werden.

Für die in der Technik in erster Linie in Betracht kommenden isotropen Stoffe enthält der allgemeinste Ansatz für die Proportionalität zwischen den sechs Spannungskomponenten und den sechs Deformationsgrössen zwei Elastizitätskonstanten, die etwa durch Angabe des sogen. *Elastizitätsmoduls* (*Young*scher[4]) Modul) und des *Gleitmoduls*, oder aber durch den *Elastizitätsmodul* und durch die sogen. *Poissonsche Verhältniszahl* (Verhältnis der Querkontraktion zu der Längsdehnung bei einfachem Zug) festgelegt werden können.[5]) Der *Elastizitätsmodul* lässt sich durch den einfachen Zug und Druck unmittelbar bestimmen. Unter Zugrundelegung der Biegungstheorie dünner Stäbe können ausserdem Biegungsversuche dazu benützt werden. Ausser statischen Belastungsversuchen kommen auch dynamische Methoden (Beobachtung von Schwingungszeiten) in Betracht.[6]) Die *Poissonsche Verhältniszahl* kann man ebenfalls unmittelbar durch Zug- und Druckversuch bestimmen oder mittels des Biegungsversuches durch Vergleich der Krümmungen in der Biegungsebene und senkrecht dazu (antiklastische Krümmung). Den *Gleitmodul* bestimmt man am besten durch statische oder dynamische Torsionsversuche.

Man findet zunächst, dass — sobald nur genügend genaue Messinstrumente angewendet werden — die elastische (rückgängige) Deformation streng genommen stets von einer, wenn auch oft sehr geringfügigen bleibenden Formänderung begleitet wird, ferner dass der Vorgang im allgemeinen von der Belastungsgeschwindigkeit und von der Einschaltung von Ruhepausen nicht unabhängig ist. Eine Gleichgewichtslage kann eigentlich nur durch Extrapolation auf die Belastungs-

---

plication de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, 3. éd., Paris 1864, von *B. de St. Venant.* Ein historischer Rückblick auf die ersten Versuche über Elastizität und Festigkeit findet sich in dem in Fussnote 1) erwähnten Bericht über den Pariser Kongress (1900) von *Ch. Frémont.*

4) *Th. Young,* A course of lectures on natural philosophy, London 1807. T. 2, p. 46. — *Young* war der erste, der eine exakte Definition des Elastizitätsmoduls gab.

5) Über die Beziehungen dieser Konstanten zu den in der mathematischen Elastizitätstheorie üblichen vgl. Art. IV 27 (*Th. von Kármán*), Einleitung.

6) Über die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten vgl. z. B. *F. Auerbach* in *A. Winkelmann,* Handbuch der Physik, Leipzig 1908, 2. Aufl., Bd. 1.

geschwindigkeit Null bzw. unendlich lange Wartezeit bestimmt werden. Ausserdem findet oft auch in den Ruhepausen eine langsame Wanderung der durch Extrapolation gewonnenne Gleichgewichtslagen statt. Sieht man aber von diesen, bei kleinen Belastungen geringfügigen, zeitlichen Einflüssen in *erster Näherung* ab, so findet man, dass *bei einer Reihe von Stoffen die Proportionalität in einem ziemlich weiten Bereiche mit grosser*, für die praktischen Berechnungen durchaus hinreichenden, *Genauigkeit erfüllt* ist, *bei anderen Substanzen dagegen systematische Abweichungen* auftreten. Gleichzeitig beobachtet man, dass gerade bei jenen Stoffen, die erhebliche Abweichungen vom Hookeschen Gesetze zeigen, die Hysteresis stärker hervortritt (vgl. Nr. **11**).

Zu den Stoffen, die eine ziemlich vollkommene elastische Isotropie zeigen und dem Hookeschen Gesetze gehorchen, gehört vor allem *schmiedbares Eisen* und *Stahl*, während *Gusseisen* erhebliche Abweichung vom Proportionalitätsgesetz und ausgesprochene Hysteresiserscheinungen zeigt. Die meisten im Maschinenbau benutzten *anderweitigen Metalle* gehorchen dem Hookeschen Gesetze nur mit mässiger Annäherung, doch nehmen die Abweichungen durch wiederholte Belastung und Entlastung wesentlich ab[7]), so dass das Material sich scheinbar einem sog. normalen Zustande nähert, für welchen das Hookesche Gesetz strenger gültig ist.

Im Anschluss an den Ausbau der Grundlagen der Elastizitätstheorie wurde viel darüber gestritten, ob die bei isotropen Stoffen gemessenen zwei Elastizitätskonstanten voneinander unabhängig sind oder nicht (vgl. Art. IV, 23 *Müller-Timpe*, Nr. **4**c). Vom theoretischen Standpunkt aus bietet nämlich der Umstand Schwierigkeit, dass die molekulartheoretische Ableitung des Hookeschen Gesetzes für isotrope Medien zu einer universellen Beziehung zwischen Elastizitätsmodul und Gleitmodul führt; namentlich sollte die Poissonsche Verhältniszahl für alle isotrope Körper den gemeinsamen Wert 1/4 haben. Die Beobachtungen zeigen indessen, dass dies nicht zutrifft. *W. Voigt*[8]) und *W. Thomson*[9]) haben darauf hingewiesen, dass die meisten sogenannten isotropen Stoffe und insbesondere die Metalle und Gesteine eigentlich nicht als isotrope Körper, sondern nur als isotrope Konglomerate aus anisotropen Fragmenten anzusehen sind (vgl. Nr. **22**). In der Tat

7) Vgl. etwa *C. Bach*, Elastizität und Festigkeit, 6. Aufl., Berlin 1911, p. 54ff. Mitteilungen über Forschungsarbeiten 1 (1902) und ibid. 4 (1902). — *A. Miller*, München, Akad. Berichte 1 (1885) und München, Akad. Abhandlungen 15 (1886), p. 705 u. 16 (1888), p. 569; Annal. d. Phys. 45 (1892), p. 191.

8) *W. Voigt*, Annalen d. Physik 38 (1889), p. 573.

9) *W. Thomson*, Edinb. Roy. Soc. Proc. 16 (1890), p. 693.

konnte *W. Voigt* nachweisen, dass man für einen solchen „quasiisotropen" Körper durch Mittelwertbildung über die kristallinischen Bausteine zwei voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten erhält.

In der Technik spielen viele Substanzen eine Rolle, die infolge ihrer komplizierten, meist organischen Struktur sehr komplizierte Eigenschaften hinsichtlich ihrer Elastizität und Festigkeit besitzen. So ergeben sich z. B. bei *Holz*[10]), *Leder*[11]) usw. nach verschiedenen Richtungen sehr verschiedene elastische Konstanten und Festigkeitszahlen. Bei vielen Holzarten ist übrigens das Proportionalitätsgesetz ziemlich gut erfüllt, bei Leder dagegen wächst im Gegensatz zu den meisten anderen Stoffen die Formänderung erheblich langsamer als die Spannung. Beobachtungen über Elastizitätsverhältnisse dieser und ähnlicher organischen Substanzen sind zwar für praktische Festigkeitsberechnungen wohl von Interesse, einer theoretischen Einsicht sind sie jedoch infolge ihrer komplizierten Struktur kaum zugänglich.

2. Abweichungen vom Hookeschen Gesetz. Systematische Abweichungen vom *Hooke*schen Gesetz sind hauptsächlich bei *Gusseisen*, bei *Gesteinen* (Marmor, Granit, Sandstein usw.), ferner bei *hydraulischen Bindemitteln* (Zement, Beton) untersucht worden.

Die *Abweichung von Gusseisen* wurde bereits von *E. Hodgkinson*[12]) beobachtet. Er schlug für reinen Zug bzw. Druck die Formel (sogenanntes *„parabolisches Gesetz"*)

$$\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$$

vor (σ Spannung, ε Dehnung, a und b zwei im allgemeinen für Zug und Druck verschiedene Konstanten). *Homersham Cox*[13]) fand bessere Annäherung durch die Formel (*„hyperbolisches Gesetz"*)

$$\sigma = \frac{a\varepsilon}{1 + b\varepsilon}.$$

Später wurden noch die verschiedensten Formeln zur Darstellung der Beziehung zwischen Spannung und Dehnung benutzt. In neuerer

---

10) Über elastische Eigenschaften der Hölzer wurden hauptsächlich früher sehr viele Versuche gemacht, z. B. *G. H. L. Hagen*, Berliner Berichte 1842, p. 316; *L. Pacinotti* u. *G. Peri*, Il cimento 4 (1845), p. 241; *E. Lamarle*, Annales des trav. publics de Belgique 3 (1845), p. 1 u. 4 (1846), p. 1; *E. Wertheim* u. *E. Chevandier*, Mémoire sur les propriétés mécaniques du bois, Paris 1848; *F. Fowke*, Reports on the Paris Universal Exhibition I (1856), p. 402.

11) *C. Bach*, Abhandlungen und Berichte, Stuttgart 1897, p. 5; auch Z. d. Ver. d. Ing. 31 (1887), p. 221,

12) Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures, London 1849, p. 47ff.

13) *Homersham Cox*, Cambridge Phil. Soc. Trans. 9 (1850), p. 177.

Zeit haben *C. Bach*[14]) und *W. Schüle*[14a]) das schon von *G. B. Bülffinger*[15]) und *E. Hodgkinson*[16]) benutzte „*Potenzgesetz*"

$$\varepsilon = \alpha \sigma^m$$

als allgemeine Interpolationsformel vorgeschlagen. Diese Formel kann aber für kleine Werte von ε bzw. σ keine richtigen Werte liefern, da $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ je nachdem $m \gtrless 1$ ist, für $\varepsilon = 0$ unendlich gross oder Null wird. In der Tat haben *E. Grüneisen*[17]), ferner *F. Kohlrausch* und *E. Grüneisen*[18]) nachgewiesen, dass auch bei Stoffen, bei welchen für grössere Dehnungen das Potenzgesetz die Versuchsresultate gut darstellt, bei ganz kleinen Deformationen eine lineare Beziehung zwischen Spannung und Formänderung besteht. Daraus folgt, dass nur solche Funktionen als Interpolationsformeln Berechtigung haben, die für die Ableitung $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ stetigen Übergang durch den Punkt $\varepsilon = 0$ liefern. *E. Grüneisen* findet bei einer Reihe von Metallen, dass der jeweilige Elastizitätsmodul $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ angenähert linear mit σ abnimmt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 - a\sigma,$$

woraus die Beziehung

$$\sigma = \frac{E_0}{a}(1 - e^{-a\varepsilon})$$

folgen würde.[19]) Im allgemeinen kann man wohl sagen, dass allen diesen Formeln nur die Bedeutung von Interpolationsformeln für gewisse Gruppen von Substanzen zukommt, und dass bisher nicht von einem allgemeinen Gesetz bei elastischen Dehnungen gesprochen werden kann.[20])

Die Poissonsche Verhältniszahl ist für Stoffe, die von dem Hookeschen Gesetze erheblich abweichen, wenig untersucht worden. *J. Morrow*[21])

---

14) *C. Bach,* Z. d. Ver. d. Ing. 32 (1888), p. 193, 221, 1098, ibid. 39 (1895), p. 489, ibid. 40 (1896), p. 1381, ibid. 41 (1897), p. 248. — Mitteilungen über Forschungsarbeiten 1 (1901) auch Abhandlungen und Berichte, Stuttgart 1897, p. 289.

14a) *W. Schüle,* Dinglers polytechn. Journal 317 (1902), p. 149.

15) *G. B. Bülffinger,* Comm. Acad. Petrop. 4 (1729), p. 164.

16) *E. Hodgkinson,* Manch. Phil. Soc. Mem. 4 (1824) [1822], p. 225.

17) *E. Grüneisen,* Verhandl. phys. Ges. 4 (1906), p. 469.

18) *F. Kohlrausch* u. *E. Grüneisen,* Berlin. Ber. 1901, p. 1086.

19) Dieselbe Beziehung findet sich bei *E. Hartig,* Zivilingenieur 39 (1893), p. 113.

20) Eine vollständige Zusammenstellung der verschiedenen Interpolationsformeln findet man bei *R. Mehmke,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 42 (1897), p. 327.

21) *J. Morrow,* London Roy. Soc. Proc. 73 (1904), p. 13.

fand z. B., dass bei Abweichung vom Hookeschen Gesetz das Verhältnis der Längs- und Querdehnung sich im allgemeinen auch mit der Spannung ändert.

3. Proportionalitätsgrenze, Elastizitätsgrenze, Fliessgrenze. Wenn man auch keine Spannung als ausgeprägte obere Grenze für das rein elastische Verhalten des Materials angeben kann, so ist es doch gewissermassen berechtigt, die beiden Spannungsbereiche, in denen die federnden bzw. die bleibenden Formänderungen vorherrschen, zu trennen.[22]) Man nennt jene Spannung, bei welcher bei steigender Zug- oder Druckbelastung zuerst erhebliche bleibende Formänderung beobachtet wird, schlechthin *Elastizitätsgrenze.* Bei vielen Stoffen und insbesondere bei denen, die dem Hookeschen Gesetze gut gehorchen, fällt das Auftreten bleibender Änderungen mit den ersten wesentlichen Abweichungen vom Proportionalitätsgesetz nahezu zusammen; dagegen kann man bei anderen Stoffen vor der Überschreitung der Elastizitätsgrenze zuerst eine *Proportionalitätsgrenze* erkennen, als obere Grenze für die angenäherte Gültigkeit der linearen Spannung-Dehnungsbeziehung.

Beide Grenzen sind zunächst für einfachen Zug bzw. Druck definiert. Spricht man schlechthin von Biegungs- und Torsionselastizitätsgrenze, so versteht man darunter jenen Spannungszustand, der bei den betreffenden Belastungsarten zuerst zu erheblichen Abweichungen von der Proportionalität bzw. zu erheblichen bleibenden Formänderungen führt. Über den Zusammenhang dieser Grenzzustände mit der Zug- bzw. Druckelastizitätsgrenze vgl. Nr. **11**.

Keine der erwähnten beiden Grenzen ist scharf zu bestimmen, da beide davon abhängen, welche Abweichungen vom Hookeschen Gesetz bzw. von der exakten Reversibilität der Deformation als erheblich erachtet werden.[23]) Eine scharf ausgeprägte Grenze wird dagegen

---

22) Die Ansichten über die Begriffsbestimmung der Elastizitätsgrenze haben sich durch Verfeinerung der Messinstrumente wesentlich geändert. Während man vor Einführung der Spiegelablesung bei technischen Versuchen Längenänderungen etwa bis 0,01 mm messen konnte, ist diese Grenze durch die Spiegelapparate auf 0,0005 mm und durch Interferenzmethoden etwa auf 0,00001 mm heruntergedrückt worden.

23) Die in Paris 1891 eingesetzte Commission des méthodes d'essai hat drei Grenzspannungen festgelegt:

α) „Proportionalitätsgrenze" heißt die Spannung, bei welcher die Abweichung vom Hookeschen Gesetz auf 20 cm Messlänge 0,001 mm übertrifft.

β) „Elastizitätsgrenze" ist die Spannung, bei welcher 15 Minuten nach der Entlastung ein Dehnungsrest vom gleichen Betrag vorhanden ist.

bei vielen Substanzen durch die sogenannte *Fliessgrenze* (Streck- oder Quetschgrenze) dargestellt. Bei vielen Stoffen setzt nämlich die bleibende Formänderung plötzlich mit einer im Verhältnis zu der vorangegangenen elastischen Deformation sehr erheblichen Streckung bzw. Verkürzung unter fast konstanter oder abnehmender Last ein, während die weitere Streckung wieder Kraftsteigerung erfordert. Die diesem Zustande entsprechende Spannung wird als *Fliessgrenze* bezeichnet. Nimmt während der Fliessperiode die Last ab, so unterscheidet man nach dem Vorschlag von *C. Bach*[24]) eine „obere" und eine „untere Fliessgrenze", entsprechend dem Maximalwert der Spannung vor der Streckung und dem darauffolgenden Minimalwert vor der weiteren Kraftsteigerung.

Von genaueren Beobachtungen über die Fliessgrenze seien hier diejenigen *W. C. Unwin*[25]) und *C. Bach*[24]) erwähnt. *Unwin* bemerkte, dass der Rückfall der Belastung vornehmlich bei Metallen auftritt, die im plastischen Zustand (warm) gewalzt oder gehämmert wurden, und zwar lediglich bei der ersten Belastung. Bei wiederholter Belastung tritt keine getrennte obere und untere Fliessgrenze mehr auf, doch kehrt die Erscheinung zurück, falls das Material ausgeglüht wird.

Die Ansichten über die *Entstehung der Fliessgrenze* sind bisher nicht völlig geklärt. Nach *F. Osmond* und *H. Werth*[26]) ist die Streckung bei Eisen von einem Übergang in eine allotrope Modifikation begleitet (vgl. Nr. **21**), sie erfolgt daher im Prinzip unter konstanter Last. Nimmt man jedoch an, dass der Übergang in die stabile Modifikation, wie dies bei thermodynamischen Vorgängen oft vorkommt, verzögert wird, so kann dadurch die Steigerung der Last über den Gleichgewichtszustand hinaus zwanglos erklärt werden. Nach der Auffassung von anderen Autoren ist die Irregularität bei dem Übergang vom elastischen und unelastischen Gebiet nur der elastischen Nachwirkung zuzuschreiben. *H. Hort*[27]) weist auf das Analogon mit der Reibung

---

γ) „Sichtbare Elastizitätsgrenze" wird jene Spannung genannt, bei der die bleibende Dehnung ohne Präzisionsinstrumente festgestellt werden kann. In neuerer Zeit bezeichnen einige Werke (Friedr. Krupp u. a.) als Elastizitätsgrenze jene Spannung, die eine bleibende Dehnung von 0,03 % hervorruft.

24) *C. Bach,* Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 29, Berlin 1905, p. 61, Z. d. Ver. d. Ing. 48 (1904), p. 1040.

25) *C. Unwin,* Lond. Soc. Proc. 57 (1895), p. 178.

26) *F. Osmond* und *H. Werth,* Ann. des mines (8) 8 (1885), p. 19. Vgl. auch *P. Charbonnier* und *Ch. Galy-Aché,* Congrès international des méthodes d'essai, Paris 1901, Bd. 1, p. 235; ferner *Ch. A. Carus-Wilson,* Phil. Mag. (5) 29 (1890), p. 503.

27) *H. Hort,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 50 (1906), p. 2110.

fester Körper hin; wie die Reibung der Ruhe die Reibung der Bewegung im allgemeinen übertrifft, so soll ein Material der ersten bleibenden Änderung grösseren Widerstand leisten wie der weiteren Deformation. Nach dieser Vorstellung würde man die wahre Elastizitätsgrenze finden, indem man die Kurve der unelastischen Dehnungen bis zu der geraden Linie der elastischen Formänderungen fortsetzt. Dagegen würde nach der Auffassung von *Osmond* die untere Fliessgrenze die eigentliche Elastizitätsgrenze darstellen (d. h. den Spannungszustand, der der Koexistenz der beiden allotropen Modifikationen entspricht). Für diese Auffassung spricht die Beobachtung von *C. Bach*[24]), dass die obere Fliessgrenze von der Querschnittsform und anderen Nebenumständen abhängt, dass dagegen die untere Fliessgrenze von ähnlichen Einflüssen unabhängig ist.

H. Bouasse[28]) hält jede Abweichung von einem sanften Übergang von der Hookeschen Geraden in die Kurve der bleibenden Formänderungen für eine Folge vorangegangener Beanspruchungen. Nach seiner Auffassung dürfte man überhaupt nicht von Elastizitätsgrenze sprechen, da der unsanfte Übergang nur durch unsere Beobachtungsmethoden bedingt ist (vgl. Nr. **11**).

Auf die an der Fliessgrenze auftretenden Labilitätserscheinungen kehren wir in Nr. 7 zurück.

4. Allgemeines über Formänderungskurve, Sprödigkeit und Zähigkeit. Die Beziehung zwischen Formänderung und Belastung ist *jenseits der Elastizitätsgrenze* in viel grösserem Masse abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit und von der Ruhezeit als im elastischen Bereich, so dass die Gleichgewichtskurve (Kurve der unendlich langsamen Dehnungen) stets mit gewisser Unsicherheit behaftet ist. Zumeist verfährt man in der Weise, dass man den Versuch nach gewissen Belastungsstufen unterbricht und den Probestab unter Last sich weiter dehnen lässt. Infolge der elastischen Entlastung der Festigkeitsmaschine selbst wird dann die Belastung sinken, und nach einiger Zeit stellt sich ein Zustand ein, welcher praktisch von dem gesuchten Gleichgewichtszustand wenig verschieden ist. Die zu diesem Zustande zugehörigen Werte der Belastung und Deformation trägt man als Punkte der *Kurve der unendlich langsamen Dehnungen* (*Formänderungskurve*) auf. Verfügt man über sehr gleichmässiges Material, so ist es auch möglich, eine Reihe von Versuchen an identischen Probekörpern mit verschiedener Belastungsgeschwindigkeit auszuführen und die zur

28) *H. Bouasse,* Essais des matériaux, Grenoble 1905, p. 42.

Geschwindigkeit Null zugehörende Kurve durch Extrapolation zu ermitteln.

Die gesamte zu einer bestimmten Last gehörende Formänderung wird zumeist in *rückgängige* (federnde, elastische) und *bleibende* getrennt. Die letztere wird durch Rückgang auf die Belastung Null ermittelt und wird auch als *Dehnungsrest* (set) bezeichnet. Man war früher bemüht, einfache Formeln zu finden, die die Abhängigkeit des Dehnungsrestes von der Gesamtdehnung oder auch von der Belastung wiedergeben sollten [29]) Diese Interpolationsformeln wurden später zumeist aufgegeben, und heutzutage begnügt man sich wohl allgemein mit einer graphischen Darstellung der Formänderungskurve.

In erster Annäherung mit Vernachlässigung der Hysteresis und des zeitlichen Verlaufs findet man das Verhalten der meisten hier in Betracht kommenden Stoffe jenseits der Elastizitätsgrenze durch folgende beide Regeln charakterisiert:

a) *Die rückgängige Änderung ist auch nach bleibenden Formänderungen proportional der jeweiligen Belastung, und zwar ist der Elastizitätsmodul nahezu gleich dem ursprünglichen Werte.*

b) *Bei Wiederbelastung setzt eine weitere bleibende Formänderung erst etwa bei der vor der Entlastung erreichten Maximallast ein.*

Die erste Regel wurde von *Ch. A. Coulomb* [30]) bei Torsionsversuchen und später von *F. G. v. Gerstner* [31]) allgemein erkannt („*Gerstnersches Gesetz*"). Nach dieser Auffassung ist ein über die Elastizitätsgrenze hinaus in Anspruch genommener Körper als ein elastischer Körper mit erhöhter Elastizitätsgrenze anzusehen. *B. de St. Venant* [32]) war der Ansicht, dass die Erhöhung der Elastizitätsgrenze einen Übergang in eine stabilere Konfiguration der Moleküle bedeutet, und nannte diesen Vorgang „écrouissage". Nach dem deutschen Sprachgebrauch spricht man von einer „*Härtung*" des Materials (Härtung durch Beanspruchung, durch Kaltbearbeitung).

---

29) *F. E. Neumann* hat eine der Elastizitätstheorie nachgebildete Theorie der bleibenden Formänderungen aufgestellt (Abhandl. Akad. Berlin (1841) [1843], p. 1), seine Annahmen sind jedoch ziemlich willkürlich; *F. J. v. Gerstner* (Mechanik fester Körper, Prag 1833, p. 265 ff.) giebt für die Gesamtdehnung die Formel $\frac{P}{P_m} = \frac{\lambda}{\lambda_m}\left(2 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)$, wobei P_m die maximale Last und λ_m die zugehörige Dehnung bedeutet. *E. Hodgkinson* stellt die Resultate seiner Versuche mit Gusseisen, British Assoc. 2 (1843), p 26 und Iron Commissioner Report, London 1849, p. 60, ebenfalls durch eine quadratische Interpolationsformel dar.

30) *Ch. A. Coulomb,* Histoire de l'Acad. Paris 1784 [1787], p. 229.

31) *F. G. v. Gerstner,* Mechanik fester Körper, Prag 1833, Ann. d. Physik 26 (1832), p. 269.

32) *B. de St. Venant* in *L. Navier,* Résumé des leçons, Paris 1864, I 1, p. 22.

Es besteht keine Übereinstimmung darüber, wie man die Stoffe nach den Typen des Formänderungsgesetzes klassifizieren soll. Man nennt schlechthin alle Stoffe, die erhebliche bleibende Änderungen ohne Bruch zeigen, „*bildsam*" (duktil) im Gegensatz zu den „*spröden*" Körpern, bei denen der Bruch bald nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze erfolgt. Unter den bildsamen Stoffen unterscheiden einige Autoren *plastische* und *zähe* Stoffe, je nachdem die bleibende Dehnung unter konstanter Last vor sich geht, oder aber das Material eine Härtung erfährt. Andere Autoren benutzen den Ausdruck Zähigkeit statt Bildsamkeit (Duktilität) für alle Stoffe, die erhebliche bleibende Formänderung ohne Bruch erfahren. In vorliegendem Referate soll unter Zähigkeit Härtungsfähigkeit verstanden werden, Körper dagegen, die sich bei konstanter Belastung deformieren lassen, sollen als vollkommen plastisch oder kurzweg plastisch bezeichnet werden. Nach diesem Sprachgebrauch kann man mit *A. Considère*[33]) das Verhältnis der Maximalbelastung zu der Streckgrenze als Mass für die Zähigkeit, den reziproken Wert dieser Verhältniszahl als Mass für die Sprödigkeit betrachten.[34])

Versuche unter allseitigem Druck zeigen übrigens, dass Zähigkeit und Sprödigkeit gewissermassen vom Spannungszustand abhängen. So werden Gesteine, die beim gewöhnlichen Druckversuch sich nahezu vollkommen spröde verhalten, unter grossem allseitigen Druck bildsam, wenigstens soweit Trennungsbruch nicht in Betracht kommt (vgl. Nr. 8). Die Bedeutung dieser Tatsache, die von *F. Kick*[35]) *F. D. Adams* und *J. T. Nicolson*[36]) nachgewiesen wurde, spielt eine grosse Rolle für den Mechanismus der Gebirgsbildung.[37]) Die Formänderungskurve kann, wie *Th. von Kármán* an Marmor- und Sandsteinkörpern gezeigt hat, durch Variation des allseitigen Druckes von der typischen Form der spröden Körper stetig in die Fliesskurve der zähen Körper übergeführt werden.[38])

---

33) *A. Considère*, Commission des méthodes d'essai, Paris 1889; *F. Auerbach*, Ann. d. Physik 45 (1892), p. 277 definiert die Differenz der beiden Werte, dividiert durch ben Maximalwert als Mass der „Plastizität".

34) Eine Zusammenstellung der Terminologie und der Vorschläge zur Massbestimmung der Zähigkeit findet man bei *P. Ludwik*, Z. für Werkzeugmaschinen 12 (1908), p. 327, ferner *A. Martens*, Materialienkunde, Berlin 1890, p. 244 ff.; *F. Osmond*, Commission des méthodes d'essai, Paris 1893.

35) *F. Kick*, Z. d. Ver. d. Ing. 36 (1892), p. 278 u. 919, Z. des österr. Ing. u. Arch. Ver. 43 (1891), p. 60.

36) *F. D. Adams* u. *J. T. Nicolson*, Lond. Philos. Trans. 195 (1901), p. 363.

37) Vgl. etwa *A. Heim*, Mechanismus der Gebirgsbildung, Basel 1878.

38) *Th. v. Kármán*, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 55 (1911), p. 1749.

5. Beziehungen zwischen Formänderungskurven bei verschiedener Beanspruchung. Unter „*Formänderungsgesetz*" eines Materials versteht man in der Praxis zumeist die *Beziehung zwischen Spannung und linearer Formänderung bei einfachem Zug-* und *Druckversuch.* Um aus der unmittelbar beobachteten Kraftdehnungskurve die Kurve der effektiven Spannungen zu ermitteln, muss man die Änderung des Stabquerschnittes während der Deformation berücksichtigen. Man hat im allgemeinen gefunden, dass die bleibende Änderung ohne nennenswerte Änderung der Dichte vor sich geht; solange daher die Deformation sich gleichmässig über den Stab verteilt, erhält man die effektive Spannung aus der Kraft P, dem ursprünglichen Querschnitt f und der linearen Dehnung λ durch die Formel

$$\sigma = \frac{P(1+\lambda)}{f}.$$

Die auf den ursprünglichen Querschnitt bezogenen Spannungen werden bei Zug vergrössert, bei Druck vermindert.

In einfachem Zusammenhang mit der Formänderungskurve für Zug und Druck steht die *Formänderungskurve für Biegungsbeanspruchung,* sobald man annimmt — wie es für Biegung durch reine Biegungsmomente streng richtig ist —, dass die Querschnitte auch bei nichtlinearem Spannungsgesetz eben bleiben und die Querspannungen vernachlässigt werden können. Alsdann besteht zwischen den Spannungen in den einzelnen Fasern und den zugehörigen Dehnungen dieselbe Beziehung wie bei einfachem Zug- bzw. Druckversuch; da die Dehnungen bei eben bleibenden Querschnitten mit der Schwerpunktsentfernung proportional sind, so liefert die Zug-Druckkurve unmittelbar die Spannungsverteilung.

Erfährt ein gerader Stab die Krümmungsänderung $\varkappa$, so hat man zwei Bedingungen: zuerst müssen die Dehnungen der äussersten Fasern ε_1 und ε_2 der Gleichung

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = h\varkappa$$

genügen (h der Abstand der äussersten Fasern), alsdann muss die Resultierende der Spannungen bei reiner Biegung gleich Null, bei exzentrischer Druckbeanspruchung gleich der Normalkraft sein. Man sieht leicht ein, dass diese beiden Bedingungen die Spannungsverteilung und somit das zu einer vorgegebenen Krümmung gehörende Biegungsmoment bestimmen. *Eugen Meyer*[39]) zeigte durch ein graphisches Verfahren, dass die aus der Zug-Druckkurve abgeleitete Biegungskurve

39) *E. Meyer,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 52 (1908), p. 167, Phys. Z. 8 (1907), p. 827.

bei Flusseisen bis zu ganz erheblichen Deformationen mit der Beobachtung gut übereinstimmt.

Verhält sich das Material gegen Zug und Druck verschieden, so ist dieses Verfahren insoweit nur angenähert, als infolge der Verrückung der neutralen Axe die naheliegenden Fasern zuerst auf Druck, dann auf Zug beansprucht werden; es müsste somit berücksichtigt werden, dass durch die vorangegangene Druckbeanspruchung ihre Streckgrenze gegen Zug verändert wurde.

Umgekehrt kann man aus der Beziehung zwischen Biegungsmoment und Krümmung die Formänderungskurve für Zug und Druck ableiten, sobald man noch die Dehnung ε_1, ε_2 der äussersten Faser misst. Bei einem Stab von viereckigem Querschnitt (Breite b, Höhe h) lassen sich die Formänderungsgesetze für Zug und Druck aus der empirisch festgestellten Abhängigkeit des Biegungsmomentes M_b von der Krümmung $\varkappa$ mit Hilfe der Formeln

$$\sigma(\varepsilon_2) = \frac{2 M_b + \varkappa \dfrac{d M_b}{d \varkappa}}{b h \dfrac{d \varepsilon_2}{d \varkappa}},$$

$$\sigma(\varepsilon_1) = \frac{2 M_b + \varkappa \dfrac{d M_b}{d \varkappa}}{b h \dfrac{d \varepsilon_1}{d \varkappa}},$$

berechnen.

Diese Formeln wurden von *H. Herbert*[40]) zur Ermittlung der Zug- und Druckkurve des Gusseisens aus Biegungsversuchen angewendet. Es zeigten sich zwar nicht unerhebliche Abweichungen gegenüber den beobachteten Formänderungskurven, sie lassen sich jedoch wahrscheinlich durch Vorhandensein von Gusspannungen erklären. Über weitere Untersuchungen in dieser Richtung vgl. IV 27 (*v. Kármán*), Nr. 2d.

Ganz ähnlich kann man aus Torsionsversuchen die *Beziehung zwischen Schubspannung und Winkeländerung* ableiten. Für einen runden Stab vom Halbmesser R erhält man (γ Winkeländerung, τ Schubspannung)

$$\tau(\gamma) = \frac{3 M_t + \alpha \dfrac{d M_t}{d \alpha}}{2 \pi R^3},$$

wobei M_t und α entsprechende Werte von Verdrehung und Torsionsmoment bezeichnen.

40) *H. Herbert,* Diss. Gött. 1909 auch Mitteilungen über Forschungsarbeiten 1909, Heft 89, p. 39.

Beim Vergleich von verschiedenen Beanspruchungen liegt der Kernpunkt der Frage darin, die *Beziehung zwischen den Zug-, Druck- und Schubspannungskurven* zu ermitteln. Offenbar ist dies identisch mit der Frage, von welchen Parametern die Härtung abhängt, oder welche Punkte der verschiedenen Formänderungskurven identischen inneren Zuständen des Materials entsprechen.

Wir beschränken uns auf sogen. bildsame Materiale, da spröde Stoffe schon bei kleinen elastischen Deformationen zumeist verschieden gegen Zug und Druck sich verhalten und so kaum zu erwarten ist, dass bei grösseren Deformationen zwischen Zug- und Druckkurve einfache Beziehungen bestehen. Die einfachste Annahme ist die, dass die Härtung eine Funktion der grössten Längenänderung sei, doch dürfte dies kaum zutreffen. *A. Mesnager*[41]) geht von der Vorstellung aus, dass bleibende Deformationen durch Verschiebung längs gewisser „Gleitflächen" entstehen, und leitet aus dieser Annahme ab, dass man als Zustandsparameter die Summe der nacheinander folgenden infinitesimalen Längenänderungen, d. h. das Integral $\int \frac{d\lambda}{1+\lambda}$ zu betrachten hat; die infinitesimale Dehnung $d\lambda$ ist dabei stets nach der Richtung der grössten Längenänderung zu nehmen. Für eine nach demselben Sinn fortschreitende Deformation würde als Mass $\log(1+\lambda)$ sich ergeben. Zu ähnlichen Resultaten gelangt *P. Ludwik*[42]), der als Parameter die Summe der infinitesimalen Schiebungen (Winkeländerungen der Gleitflächen) einführt. Für bildsame Metalle fallen die Gleitflächen mit den Flächen grösster Schubspannung zusammen, und so wird die Schiebung durch die grösste Winkeländerung ausgedrückt. Mit dieser Annahme erhält *Ludwik* als Parameter für Zug und Druck $\frac{1}{2}\log(1+\lambda)$, für Torsion die gemessene Winkeländerung γ selbst, und er zeigt, dass die Kurven der Zug-, Druck- und Torsionsspannungen durch Reduktion auf diese Parameter zur Deckung gebracht werden und somit auf eine einzige, dem Material eigentümliche „Fliesskurve" zurückgeführt werden können.

6. Härte. Mass der Härtung. Es ist versucht worden, die Höhe der Streckgrenze und die Erhöhung derselben durch Beanspruchung mit der *Härte des Materials* in Beziehung zu bringen. Über eine genaue Definition der Härte ist bisher keine Übereinstimmung erzielt worden. Die mineralische Härteskala liefert bekanntlich nur eine Methode, mit deren Hilfe entschieden werden kann, welcher von zwei

41) *A. Mesnager,* Congrès international des méthodes d'essai, Paris 1901, vgl. auch Paris C. R. 126 (1898), p. 515.

42) *P. Ludwik,* Elemente der technolog. Mechanik, Berlin 1909.

Körpern härter ist, sie liefert kein quantitatives Mass für die Härte selbst. Das zur mineralogischen Härtemessung dienende Ritzverfahren wurde zwar (zuerst von *A. Seebeck*[43]) mit Hilfe des sog. Sklerometers zu einem quantitativen Messverfahren ausgebildet, doch blieb das Mass der Härte dabei vollkommen willkürlich. Ein absolutes Mass suchte *H. Hertz*[44]) im Anschluss an seine bekannten Untersuchungen über die Berührung elastischer Körper (vgl. Art. 27, Nr. **10**, *Th. v. Kármán*) dadurch zu finden, dass er als „Härte" den mittleren Normaldruck p auf eine kreisförmige Druckfläche einführte, der beim Zusammenpressen zweier Stücke des betreffenden Materials die Überschreitung der Elastizitätsgrenze zur Folge hat. Hierbei hatte *Hertz* insbesondere spröde Körper, z. B. Glas, vor Augen, bei denen sich die Überschreitung der Elastizitätsgrenze durch einen Riss bemerkbar macht. Der mittlere Normaldruck, der eine gegebene grösste Zugspannung zur Folge hat, sollte nach der Theorie unabhängig sein von der Krümmung der gegeneinander gedrückten Körper. *F. Auerbach*[45]) fand jedoch, dass dies nicht allgemein zutrifft. Er fand vielmehr, dass z. B. bei Berührung einer Kugelfläche und einer ebenen Fläche aus demselben Material der Normaldruck, bei dem die Elastizitätsgrenze überschritten wird, umgekehrt proportional ist zu $\sqrt[3]{R}$ (R der Halbmesser der Kugelfläche). *Auerbach* schlug deshalb den Ausdruck $\sqrt[3]{R}\cdot p$ als absolutes Härtemass vor. Bei bildsamen Materialien ist das Überschreiten der Elastizitätsgrenze schwer festzustellen, da dies bereits bei sehr kleinen Belastungen erfolgt; nach Überschreitung der Elastizitätsgrenze wächst jedoch der spezifische Normaldruck (Last-Druckfläche) nur bis zu einer gewissen Grenze. *Auerbach*[46]) fand, dass dieser Höchstwert ebenfalls $\frac{1}{\sqrt[3]{R}}$ proportional ist, so dass er multipliziert in $\sqrt[3]{R}$ als Mass der Härte dienen kann.

Weitere Versuche lieferten voneinander abweichende Resultate. *F. M. Schwerd*[47]) fand *Auerbachs* Resultate bestätigt. Dagegen fanden

---

43) *A. Seebeck*, Programm des Kölner Realgymnasiums (1833), vgl. auch *W. F. Grailich* und *F. Pekarek*, Berichte Akad. Wien 13 (1854), p. 410, ferner *A. Martens*, Handbuch der Materialienkunde Bd. I.

44) *H. Hertz*, Journal f. Math. 92 (1882), p. 156, ferner Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleisses in Preussen 61 (1882), p. 449; Ges. Werke, Bd. 1, Leipzig 1895, p. 155 u. 174.

45) *F. Auerbach*, Gött. Nachr. 1890, Ann. d. Phys. 43 (1891), p. 61; ibid. 58 (1896), p. 357.

46) *F. Auerbach*, Ann. d. Phys. 45 (1892), p. 262; ibid. 3 (1900) p. 108.

47) *F. M. Schwerd*, Mitteilungen Lab. München 25 (1897), p. 37. — Baumaterialienkunde 2 (1897/8), p. 327.

R. Stribeck[48]) und *W. Schwinning*[49]) den Höchstwert des Druckes vom Kugeldurchmesser nahezu unabhängig.

Das *Auerbach*sche Verfahren wurde von *A. Föppl* und *J. Schenk*[50]) insofern modifiziert, als sie aus praktischen Rücksichten keine Kugelfläche und Ebene, sondern zwei gekreuzte Kreiszylinder von gleichem Halbmesser gegeneinander benutzten.

In neuerer Zeit wurde wesentlich von praktischen Gesichtspunkten aus die Härteprüfung dadurch abgeändert, dass man nicht zwei Stücke desselben Materials gegeneinander presst, sondern das Eindringen eines im Verhältnis zu den untersuchten Materialien sehr harten Körpers in das betreffende Material beobachtet. Bei dem sogenannten *Brinellschen Kugeldruckverfahren*[51]) („*Kugelprobe*") wird eine harte Stahlkugel in die ebene Oberfläche des Materials eingedrückt. *J. A. Brinell* hat die auf die Flächeneinheit der beim Eindruck gebildeten Kugelkalotte bezogene Druckkraft als „*Härtezahl*" vorgeschlagen. Die weiteren experimentellen Untersuchungen zeigten jedoch, dass diese Zahl von dem Verhältnis der Eindrucktiefe (oder Durchmesser der Eindruckfläche) zum Kugeldurchmesser abhängt.[52]) Um eine von den Abmessungen unabhängige Härtezahl für die Praxis zu erhalten, hat *P. Ludwik*[53]) statt der „Kugelprobe" eine „*Kegelprobe*" vorgeschlagen, bei der eine harte Kegelspitze von gegebenem Öffnungswinkel in das Material eingedrückt wird. Bei dieser Anordnung strebt der auf die Flächeneinheit des

48) *R. Stribeck,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 45 (1901), p. 73; Annalen für Gewerbe- und Bauwesen 49 (1901), p. 2.

49) *W. Schwinning,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 45 (1901), p. 332.

50) *A. Föppl* u. *J. Schenk,* Mittl. Lab. München 28 (1902), p. 34.

51 *J. A. Brinell,* Communications présentées devant le congrès international des méthodes d'essai, Paris 1901, 3, p. 83, Baumaterialienkunde 5 (1900), p. 276; 6 (1901) p. 268; 8 (1903), p. 7; 9 (1904), p. 318; 10 (1905), p. 54; 11 (1906), p. 6. Dinglers polyt. Journ. 317 (1902), p. 419, 318 (1903), p. 188; Internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik, Brüsseler Kongress 1906. Bericht über Aufgabe 27.

52) *C. Benedicks,* Recherches physiques et physico-chimiques sur l'acier au carbone, Upsala 1904; *W. Ast,* Internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik, Brüsseler Kongress 1906, Aufgabe 2, p. 18; *M. Breuil* ibid. rapport non officiel; *H. Le Chatelier,* Revue de métallurgie 3 (1906), p. 527; *J. A. Brinell* und *G. Dillner,* Internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik, Brüsseler Kongress 1906, Aufgabe 27; *A. Leon,* Stahl und Eisen 27 (1907), p. 1820; *R. Malmström,* Dingler, polyt. Journ. 322 (1907), d. 34; *E. Meyer,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 52 (1908), p. 167; ferner Phys. Zeitschr. 9 (1908), p. 66; *A. Rejtö,* Baumaterialienkunde 2 (1907), p. 257.

53) *P. Ludwik,* Zeitschr. d. öst. Arch.- u. Ing.-Ver. 59 (1907), p. 191, Internationaler Verband für die Materialprüfungen der Technik, V. Kongress, Kopenhagen 1909.

Eindruckkreises bezogene mittlere Druck einem von den Abmessungen und Eindruckstiefe unabhängigen Grenzwert zu, der dann als für das Material charakteristische Härtezahl betrachtet werden kann.

Wenn auch die direkte Proportionalität zwischen Härte und Zerreissfestigkeit oder Härte und Streckgrenze, wie sie von *Brinell* vermutet wurde, im allgemeinen sich nicht bestätigt hat, so ist man doch in der Lage, aus den Härtebeobachtungen gewisse Schlüsse auf die Festigkeitseigenschaften und hauptsächlich auf die vorangegangenen Beanspruchungen (Härtung) zu schliessen. Dies ist von praktischen Gesichtspunkten aus deshalb wichtig, weil die Härteprobe an den betreffenden Körpern selbst in einfacher Weise vorgenommen werden kann, während alle übrigen Versuche Herstellung besonderer Probestäbe erfordern. Eine genauere Einsicht erhält man in diese ziemlich verwickelten Verhältnisse durch die Untersuchungen von *Eugen Meyer*[54]) und *A. Kürth*[55]). Diese Autoren verzichten darauf, die Härte des Materials durch eine einzige Zahl zu bestimmen, und betrachten die „*Härtekurve*" (Beziehung zwischen Belastung und Eindruckdurchmesser d) in ihrer Gesamtheit als charakteristisch für den Härtezustand des Materials. *E. Meyer* fand, dass die Härtekurve für denselben Kugeldurchmesser sehr genau durch die Interpolationsformel

$$P = a d^n$$

dargestellt wird. Die Härtezahl ist dann gleich

$$H = \frac{P}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{4}{\pi} a d^{n-2}$$

oder

$$H = \frac{4}{\pi} \alpha \left(\frac{d}{D}\right)^{n-2},$$

wo α und n nur vom Material bzw. vom Zustand desselben abhängen und D den Kugeldurchmesser bedeutet. Nach den Beobachtungen von *A. Kürth* wächst bei Härtung des Materials *die Härtezahl für denselben Wert von* $\frac{d}{D}$ *sehr genau proportional mit der Streckgrenze für Zug.* Es ist auch interessant, dass der Exponent n, der für den ausgeglühten Zustand einen maximalen Wert hat, mit zunehmender Härtung abnimmt und für die maximale Härtung — unmittelbar vor dem Bruch — dem Werte $n = 2$ zustrebt, so dass H von $\frac{d}{D}$ unabhängig wird.

54) *E. Meyer,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 52 (1908), p. 645, Phys. Zeitschr. 9 (1908), p. 66.

55) *A. Kürth,* Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 52 (1908), p. 1560 u. 1608.

Aus diesen Versuchen kann man schliessen, dass die Zunahme der Streckgrenze für den Zugversuch gewissermassen als Mass für den inneren Zustand des Materials dienen kann. *Kürth* hält für das wesentliche Merkmal der Härtung eine Zunahme der inneren Energie, die — wie auch aus Beobachtungen über das thermische und magnetische Verhalten der Körper bei Streckung zu schliessen ist — wahrscheinlich proportional der Zunahme der Streckgrenze erfolgt.[56])

7. Labilitätserscheinungen: Bruch. Sind bei fortschreitender Beanspruchung verschiedene Möglichkeiten für die Verteilung der Deformation an dem beanspruchten Körper vorhanden, so wird — wie man wohl auch mit Hilfe allgemeiner Stabilitätsbetrachtungen nachweisen kann[57]) — jener Deformationszustand eintreten, bei dem dieselbe resultierende Deformation (z. B. gleiche Gestamtdehnung, gemessen zwischen den Einspannköpfen) mit möglichst geringer Belastung erreicht wird. So wird z. B. der gleichförmige Deformationszustand eines zylindrischen, auf Zug beanspruchten Stabes labil, sobald man dieselbe Gesamtdehnung durch ungleichförmige Verteilung der Dehnung mit einer geringeren Belastung erzielen kann. In solchen Fällen treten im allgemeinen lokale Deformationen, eventuell Risse oder ein vollständiges Zerfallen des Körpers ein. Betrachtet man den Probekörper und die Festigkeitsmaschine (oder bei Baukonstruktionen das gesamte elastische Bauwerk) als ein einziges mechanisches System, so können wir *drei Fälle* unterscheiden:

a) *stetige Folge labiler Gleichgewichtslagen;*

b) *sprungweiser Übergang in eine stabile Lage;*

c) *Bruch im Falle des Fehlens einer stabilen Lage, bei welcher der Zusammenhang des Körpers bewahrt bleiben könnte.*

In folgendem führen wir für jeden dieser Fälle einige *typische Beispiele* an.

a) Der *erste Fall* tritt z. B. beim *einfachen Zugversuch an einem zylindrischen Probekörper* ein. Hier ist die — abgesehen von dem Einfluss

---

56) Bezüglich energetischer und thermodynamischer Betrachtungen über die Vorgänge beim Kaltrecken vgl. *H. Hort,* Diss. Göttingen 1906, auch Mitteilungen über Forschungsarbeiten 1907, Heft 41, ferner *R. Plank,* Z. d. Ver. d. Ing. 54 (1910), p. 1854.

57) Allgemeine Untersuchungen über die Stabilität von Gleichgewichtszuständen jenseits der Elastizitätsgrenze fehlen bisher; man findet in der Litteratur nur vereinzelte Ansätze und Bemerkungen (s. weiter unten). Es wäre aber wohl möglich, den unter Wärmeentwicklung dauernd deformierten Körper einschliesslich der äusseren Kräfte als thermodynamisches System aufzufassen und sowohl die Gleichgewichts- als die Stabilitätsbedingungen aus allgemeinen Minimalprinzipien abzuleiten.

der Stabenden[58]) — gleichförmige Deformationsverteilung so lange stabil, als im Last-Dehnungsdiagramm einer gegebenen Zugkraft P nur ein einziger Wert der Dehnung λ entspricht. Giebt es jedoch zwei Dehnungswerte, die zu derselben Last gehören, z. B. λ_1 und λ_2, so ist ein Gleichgewichtszustand mit derselben Gesamtdehnung auch dadurch möglich, dass ein Teil des Körpers die Dehnung λ_1, ein anderer Teil dagegen die Dehnung λ_2 erleidet. Da nun zwischen λ_1 und λ_2 ein Maximalwert von P liegt, so wird für die ungleichförmige Deformation P offenbar kleiner ausfallen als für die derselben Gesamtdehnung entsprechende gleichförmige; folglich wird die gleichförmige Deformationsverteilung labil. Man kann daraus schliessen, dass der Stab nur so lange gleichförmig deformiert wird, bis die Last einen Maximalwert erreicht.

Diese einfache Betrachtung wurde von *A. Considère*[59]) zur Erklärung der Einschnürung plastischer Körper bei Zugbeanspruchung herangezogen. Sobald die ungleichförmige Deformation einsetzt, darf man natürlich keine gleichförmige Verteilung mehr über den Querschnitt voraussetzen, man hat dann im allgemeinen eine sehr komplizierte Spannungsverteilung, die vielleicht mit Hilfe der Ansätze der Plastizitätstheorie (vgl. Nr. **16**) ermittelt werden könnte. Qualitative Betrachtungen über die Spannungsverteilung in der Umgebung der eingeschnürten Stelle hat *J. Barba*[60]) angestellt.

Aus der *Considère*schen Betrachtung geht hervor, dass die maximale Spannung, die während des Zugversuches auftritt, nicht mit der maximalen Last zusammenfällt. Der Maximalwert der Belastung bedeutet nur die Grenze der gleichförmigen Deformation. Bedeutet $\sigma(\lambda)$ die effektive Spannung als Funktion der Dehnung, f den ursprünglichen Querschnitt, so ist die Last angenähert

$$P = \frac{\sigma(\lambda)}{1+\lambda} f;$$

der Höchstwert der Last, d. h. die Grenze der gleichförmigen Deformation, ist alsdann durch

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\sigma(\lambda)}{1+\lambda}\right) = 0$$

---

58) Für die praktische Materialprüfung ist natürlich eine wichtige Frage, wie weit der Einfluss der Stabenden bzw. der Einspannköpfe die Spannungsverteilung modifiziert. Versuche darüber haben angestellt: *A. Considère,* Annales des ponts et chausées (6) 9 (1885); *J. Barba,* Paris, Mém. soc. civ. ing. 1880 (I), p. 682; *J. Barba* und *Duplaix,* Commission des méthodes d'essai, Paris 1895. Vgl. auch *A. Martens,* Handbuch der Materialienkunde, Berlin 1898, p. 60.

59) *A. Considère,* Ann. des ponts et chaussées (6) 9 (1885).

60) Vgl. Fussnote 58.

oder

$$(1+\lambda)\frac{d\sigma}{d\lambda} = \sigma(\lambda)$$

gegeben. Die effektive Spannung steigt während der Einschnürung weiter, nur nimmt der Querschnitt stärker ab, als die Spannung zunimmt. Die Fortsetzung der Kurve der effektiven Spannung kann man angenähert dadurch bestimmen, dass man über dem kleinsten Querschnitt an der Einschnürungsstelle einen Mittelwert der Spannung rechnet[61]) und den zugehörigen Wert der Dehnung aus der angenäherten Konstanz der Dichte durch die Formel $f'(1+\lambda) = f$ ermittelt, wobei f' die an der Einschnürungsstelle gemessene Querschnittsfläche bedeutet. *P. Ludwik*[62]) zeigte, dass bei Stoffen, die sich gegen Zug und Druck ähnlich verhalten, die so gewonnene Fortsetzung der Zugspannungskurve auf dieselbe „Fliesskurve" führt (vgl. Nr. 5), wie die den Druckversuchen unmittelbar entnommene Druckspannungskurve.

Man betrachtet zumeist als *Mass der Dehnbarkeit* die sog. „Bruchdehnung", d. h. die unmittelbar vor dem Bruch erreichte maximale Dehnung. Infolge der ungleichförmigen Verteilung der Deformation ist diese Grösse abhängig vom Verhältnis der Messlänge zu den Querschnittsabmessungen. Eher unabhängig von den Nebenumständen ist vielleicht die maximale Einschnürung, die ebenfalls als Mass für die Dehnbarkeit vorgeschlagen wurde.[62])

Die Beobachtung des Kraftdehnungsverlaufs während der Einschnürungsperiode gestaltet sich zumeist unsicher, weil der Vorgang rasch vor sich geht. Dies liegt jedoch nur an der Einrichtung der

---

61) Man hat auch eine unmittelbare Bestimmung der maximalen Spannung vorgeschlagen, und zwar in der Weise, dass man die Einschnürung künstlich hindert. In der Tat liefern Zugstäbe, die mit Einkerbung versehen sind, grössere Festigkeit als zylindrische Stäbe. Vgl. *J. Barba* l. c. (Fussnote 58), *A. Rejtö*, Baumaterialienkunde 6 (1901), p. 111, *A. Martens,* Handbuch der Materialienkunde, Berlin 1898, *W. C. Unwin,* Inst. Mech. Eng. Proc. (1881), p. 319, *A. B. W. Kennedy,* Results of of experiments on riveted joints (Memorandum of the Board of Trade) 1881, p. 18, auch Inst Mech. Eng. Proc. (1881), p. 215, *C. E. Strohmeyer,* Inst. Civ. Eng. Min. of Proc. (1884). Es stellte sich jedoch heraus, dass die Ergebnisse von Versuchen dieser Art sehr von Abmessungen und Form der Einkerbung abhängig sind; vgl. *A. Martens,* Z. d. Ver. d. Ing. 45 (1901), p. 805. *Baker*, Inst. Civ. Ing. Min. of Proc. 84, p. 165.

62) Vgl. *A. Martens,* Handbuch der Materialienkunde, Berlin 1898, p. 244. Einige Autoren betrachten als Mass der Dehnbarkeit (Plastizität) das Produkt von Bruchdehnung und Höchstspannung, andere den Flächeninhalt des Spannung-Dehnungsdiagramms (Arbeitsmenge). Eine Zusammenstellung der Vorschläge bei *P. Ludwik,* Z. für Werkzeugmaschinen 12 (1908), p. 327.

Materialprüfungsmaschine; der Zustand des Stabes wäre bei festen Einspannköpfen an und für sich stabil; falls aber die Belastung nicht entsprechend der Dehnung vermindert wird, so ist infolge des vorhandenen Kraftüberschusses das sich selbst überlassene System labil und durchläuft eine Folge der Gleichgewichtslagen mit wachsender Geschwindigkeit. Dies gilt jedoch nur so lange, bis die Abnahme der Kraftdehnungskurve langsamer erfolgt wie die Selbstentlastung der Festigkeitsmaschine; trifft dies nicht zu, so kann das System keine stetige Reihe von Gleichgewichtslagen durchlaufen, und es erfolgt entweder der Übergang sprungweise in eine entfernt gelegene stabile Lage, oder aber der Körper muss seinen Zusammenhang einbüßen.

b) Den *zweiten Fall* kann man bei der *Streckung von plastischen Stoffen* beobachten, die eine obere und untere Fliessgrenze besitzen. Nach Überschreitung der oberen Fliessgrenze fällt infolge der Labilität die Belastung zumeist plötzlich auf die untere Fliessgrenze herunter. Genauere Betrachtungen über den Vorgang haben *C. Bach*[63]) und *H. Hort*[64]) angestellt.

Die Labilität in der ersten Phase der Streckung liefert wahrscheinlich die Veranlassung zu den sog. *„Fliessfiguren"*[65]) (auch *„Lüderssche" oder Hartmannsche Linien"* genannt.) Ein Beweis für diese Vermutung liegt zwar bisher nicht vor, doch stimmen viele Beobachter darin überein, dass gerade jene Stoffe ausgeprägte Fliessfiguren zeigen, bei denen obere und untere Fliessgrenze scharf zum Ausdruck kommen. Die Fliessfiguren würden dann lediglich den Spuren jener Gleitflächen entsprechen, die *Ch. A. Coulomb*, *Ch. Duguet, A. Mesnager* und *O. Mohr* (vgl. Nr. **10**) mit Hilfe der Vorstellung der inneren Reibung abgeleitet haben. Dass dann gewisse der im allgemeinen gleichmässig und überall dicht verteilten Gleitlinien in bestimmten Abständen sichtbar werden, kann man durch die Labilität der gleichförmigen Dehnung erklären, indem die Deformation — wie man auch mit Hilfe der Plastizitätstheorie genauer zeigen kann — von schwächeren Stellen längs der Gleitlinien ausgeht. Da die Last nach der Streckung wieder

---

63) *C. Bach,* Z. d. Ver. d. Ing. 48 (1904), p. 1040.

64) *H. Hort,* Z. d. Ver. d. Ing. 50 (1906), p. 2110.

65) *L. Hartmann,* Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts, Paris 1896, auch Congrès international d'essai des méthodes, Paris 1901, p. 95, ferner Paris C. R. 118 (1894), p. 520 u. 738; *A. Mesnager,* Paris C. R. 126 (1898), p. 515; *G. Faurie,* Paris C. R. 126 (1898), p. 400; *A. Rejtö,* Baumaterialienkunde 4 (1899), p. 52; *W. Mason,* Lond. Phys. Soc. Proc. 23 (1911), p. 305; *B. Kirsch,* Mitteilungen aus den techn. Versuchsanstalten in Berlin 5 (1887), p. 64; 6 (1888), p. 37; 6 (1888), p. 9.

ansteigt, so treten keine gröberen Risse auf, und die weitere Deformation geht wieder gleichförmig vor sich.[66])

Ähnliche Labilitätserscheinungen können bei anderer Art der Beanspruchung ebenfalls vorkommen. Die Beobachtung der Fliessfiguren kann als Merkmal für eine lokale Überschreitung der Elastizitätsgrenze bei komplizierteren Spannverteilungen gute Dienste leisten.[67])

c) Es liegt nahe, als *dritten Fall* den *Bruch* in diese Klasse der Labilitätserscheinungen durch die Annahme einzureihen, daß der Körper zerfällt, sobald kein stabiler Gleichgewichtszustand vorhanden ist, der mit dem Zusammenhang des Körpers verträglich wäre. In der Tat wird unmittelbar vor dem Bruch stets eine rapide Abnahme der Belastung beobachtet, die auf Labilität hindeutet, nur ist es leicht möglich, dass dies bereits eine Folge der lokalen Trennung der Teilchen ist. Die allgemeinen Bedingungen des Bruches sind eben schwer zu erkennen, da wir über die Natur der Kohäsionskräfte im festen Körper wenig unterrichtet sind; man muss sich daher zumeist auf eine äusserliche Beschreibung des Vorganges beschränken.

Man kann im allgemeinen zwei Haupttypen des Bruchs unterscheiden, die wir nach einem Vorschlage von *L. Prandtl*[68]) als *Trennungsbruch* und *Verschiebungsbruch* bezeichnen wollen. Beim Trennungsbruch spaltet sich der Körper längs einer nahezu ebenen Bruchfläche senkrecht zur Richtung der grössten Zugspannung; die Bruchfläche ist hart und körnig. Beim Verschiebungsbruch dagegen entsteht die Trennung durch Verschiebung der beiden Teile längs Flächen, die mit den Hauptspannungsebenen einen im allgemeinen vom Spannungszustand abhängigen schiefen Winkel einschliessen; die Bruchfläche ist oft bedeckt mit einem feinen Mehl, das offenbar durch Zerreiben des Materials bei der Verschiebung entsteht.

Die beiden Typen des Bruchs erscheinen selten ganz rein abgesondert. So ist z. B. der Verschiebungsbruch beim Druckversuch an Gesteinen zumeist durch sekundäre Trennungsbrüche begleitet. Ein charakteristisch gemischter Bruchvorgang ist das Zerreissen von sich einschnürenden Metallstäben. Durch die Untersuchungen von *J. Barba*[69])

---

66) Andere Erklärung für die Entstehung der Fliessfiguren (durch Betrachtung von Wellensystemen) gaben *F. Osmond*, Paris C. R. 118 (1894), p. 650 und *M. Réthy*, Math.-naturw. Berichte aus Ungarn 27 (1911), p. 22.

67) Z. B. *A. Leon*, Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst 16 (1910), p. 641 u. ebd. 18 (1912), p. 381, *S. Timoschenko*, Annales de l'Institut polyt. Kiew 1912 (russ.).

68) *L. Prandtl*, Verhandlungen deutscher Naturforscher und Ärzte, Dresden 1907, vgl. auch *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 38 (1869), p. 71.

69) *J. Barba*, vgl. Fussnote 58.

und *B. Kirsch*[65]) ist es sicher gestellt, dass die primäre Erscheinung ein Trennungsbruch ist, der von der Mittelfaser ausgeht; nachher bilden sich erst die sog. Trichter, d. h. kegelförmige Verschiebungsflächen, längs deren das Material abgeschoben wird.

8. Trennungsbruch. a) *Annahme der grössten Zugspannung.* Typische Trennungsbrüche zeigen die Zug-, Biegungs- und Torsionsversuche an spröden Körpern. Die Versuchsergebnisse machen es sehr wahrscheinlich, dass dabei der Wert der Zugspannung für den Bruch massgebend ist, so dass ein gewisser maximaler Betrag der größten Zugspannung unabhängig von der Art des Spannungszustandes zum Trennungsbruch führt. Dieser Grenzwert der Zugspannung wird schlechthin als *Zugfestigkeit* $\varkappa_z$ des Materials bezeichnet.

Vernachlässigt man den Einfluss der Abweichungen vom Hookeschen Gesetz in der bleibenden Änderung auf die Spannungsverteilung bis zum Bruch, so kann man in erster Näherung die Widerstandsfähigkeit eines spröden Körpers gegen Biegung und Torsion in der Weise beurteilen, dass man die grösste nach den Formeln der Elastizitätstheorie gerechnete Zugspannung mit der Zugfestigkeit des Materials vergleicht. Man bezeichnet die so berechneten maximalen Zugspannungen als *Biegungsfestigkeit* $\varkappa_b$, bzw. *Torsionsfestigkeit* $\varkappa_t$. Bei Stoffen, die erhebliche Abweichungen vom Hookeschen Gesetz und keine vollkommene Sprödigkeit zeigen, weichen diese Werte von der Zugfestigkeit $\varkappa_z$ beträchtlich ab.

Für die Biegungsfestigkeit findet man nach *C. Bach*[70]) die Regel, dass das Verhältnis $\frac{\varkappa_b}{\varkappa_z}$ desto grösser ausfällt, je mehr der Querschnitt nach der Schwerpunktsaxe hin gedrängt ist. Dies erklärt auch das sog. *Emersonsche Paradoxon*, dass ein Stab mit dreieckigem Querschnitt durch scheinbare Schwächung des Querschnittes (Abhobeln der Kante) an Gesamtwiderstand gegen Biegung gewinnen kann. *Bach* findet, dass man die Verhältniszahl $\frac{\varkappa_b}{\varkappa_z}$ angenähert proportional zu $\sqrt{\frac{e}{z_0}}$ setzen darf, wo e und z_0 den Abstand der äussersten Faser und der Schwerpunktsfaser der auf Zug beanspruchten Querschnittshälfte von der Schwerpunktsaxe des Gesamtquerschnittes bezeichnet.

Um die Beziehung zwischen Biegungs- und Zugfestigkeit rechnerisch zu ermitteln, hat *St. Venant*[70]) für das Formänderungsgesetz den Ansatz

$$\sigma = \alpha(1 - (1 - \beta\varepsilon)^n)$$

70) *B. de St. Venant* in den Noten zu *Navier,* Résumé des leçons, Paris 1864, I. 1, p. 165.

eingeführt, der durch Wahl des Exponenten n dem Charakter der Formänderungskurve angepasst werden kann. Variiert n zwischen 1 und ∞, so liegt $\frac{\varkappa_b}{\varkappa_z}$ für rechteckigen Stabquerschnitt zwischen 1 und 3.

In neuerer Zeit haben *C. Bach*[71]) und *W. Schüle*[71]) ähnliche Berechnungen auf Grund des Potenzgesetzes (vgl. Nr. 2) angestellt. Da aber die Potenzformel sich der Kurve der bleibenden Änderungen nicht gut anschliesst, so gelangt man zu besseren Resultaten durch ein graphisches Verfahren, welches auf die in Nr. 5 dargelegten Überlegungen basiert ist. Nach *C. Bachs*[72]) Berechnungen ist die im Moment des Bruchs auftretende effektive Zugspannung bis auf kleine Abweichungen gleich der direkt ermittelten Zugfestigkeit. *W. Pinegin*[73]) findet erheblichere Abweichungen, dagegen fand *P. Ludwik*[74]) auch bei krummen Stäben das Resultat von *Bach* bestätigt.

Wird ein Hohlring durch inneren Druck beansprucht, so kann die Spannungsverteilung ebenfalls auf Grund der Zug- und Druckkurve ermittelt und die dem Bruch entsprechende Zugspannung mit der Zugfestigkeit verglichen werden. *M. Grübler*[75]) fand bei Versuchen dieser Art an Zementkörpern die grösste Zugspannung nahezu gleich der Zugfestigkeit.

Drehungsversuche an spröden Körpern, z. B. an Gusseisen, liefern ebenfalls einen Trennungsbruch, der an der Neigung der Bruchflächen (unter 45^0 gegen die Stabaxe) zu erkennen ist. Die dem Bruch entsprechende effektive Zugspannung wurde bisher mit Berücksichtigung des Formänderungsgesetzes nicht nachgerechnet. Das Verhältnis der nach der Elastizitätslehre gerechneten Torsionsfestigkeit hat *C. Bach*[76]) für eine Reihe von Querschnittsformen bestimmt; es zeigt sich, wie man auch erwarten kann, dass die Fasern in der Mitte einen grösseren Anteil an der Tragfähigkeit haben als bei der elastischen Spannungsverteilung.

Gegen die Annahme, dass beim Trennungsbruch ein bestimmter Wert der Zugspannung den Bruch veranlasst, sprechen die Zugversuche von *W. Voigt*[77]) und seinen Schülern unter allseitigem Druck.

---

71) *C. Bach,* Abhandlungen und Berichte. Stuttgart 1897, p. 60. Z. d. Ver. d. Ing. 32 (1888), p. 198 und p. 1089. *W. Schüle,* Dinglers pol. Journal 317 (1902), p. 149.

72) *C. Bach,* Elastizität und Festigkeit, Berlin 5. Aufl. 1911.

73) *W. Pinegin,* Z. d. Ver. d. Ing. 50 (1906), p. 2029.

74) *P. Ludwik,* Technische Blätter 37 (1905), Heft 1 u. 2.

75) *M. Grübler,* Z. d. Ver. d. Ing. 51 (1907), p. 176.

76) *C. Bach,* Abhandlungen und Berichte, Stuttgart 1897.

77) *W. Voigt,* Annalen der Physik 4 (1901), p. 567, ibid. 53 (1894), p. 43, 67

Es wurden Probekörper aus einem sehr spröden Präparate gleichzeitig durch Federkraft gezogen und einem allseitig gleichförmigen Manteldruck (erzeugt durch komprimierte Kohlensäure) unterworfen. Es zeigte sich, dass der Bruch bei verschiedenen Manteldrücken nicht bei einem konstanten Werte der Zugspannung, sondern bei einer konstanten Differenz der Zugspannung und des Manteldruckes erfolgt. Die *Voigt*schen Versuche lassen sich bisher mit unseren übrigen Erfahrungen über Trennungsbruch schwer vereinigen. Es ist nicht unmöglich, dass durch das Eindringen des Gases in die Poren des Materials (wodurch in den Zwischenräumen derselbe Druck herrscht wie im Aussenraum) die Art der Beanspruchung modifiziert wird.

b) *Annahme der grössten Dehnung. B. de St. Venant*[78]) hat — der molekulartheoretischen Vorstellung von *J. V. Poncelet*[79]) folgend, — jeden Bruch als Trennungsbruch gedeutet, doch als Mass der Bruchgefahr dazu nicht die Spannung, sondern einen bestimmten Wert der grössten linearen Dehnung angenommen. So ist nach seiner Auffassung für die Druckfestigkeit eines spröden Körpers die Querdehnung massgebend; der Bruch erfolgt, wenn die Querdehnung den beim Zugversuch der Zugfestigkeit entsprechenden Wert der Längsdehnung erreicht. Mit dem Wert 1/4 für die *Poisson*sche Zahl, der nach der von *St. Venant* vertretenen unikonstanten Theorie für alle isotropen Medien gemeinsam ist, beträgt danach die Druckfestigkeit das Vierfache der Zugfestigkeit. Für die Torsionsfestigkeit erhält man nach der *St. Venant*schen Annahme (m die Poissonsche Verhältniszahl) $\frac{m}{m+1}\varkappa_z$.

In der Praxis werden — namentlich in Deutschland und Frankreich — die auf Grund der Annahme der grössten Dehnung abgeleiteten Formeln für die Festigkeitsberechnung bei zusammengesetzter Beanspruchung noch heute allgemein benutzt, allerdings mit dem Zusatz, dass ausser der grössten positiven Dehnung ein besonderer Höchstwert der negativen Dehnung eingeführt wird.

Es ist klar, dass in allen Fällen, wo ein Verschiebungsbruch klar zu erkennen ist, die *St. Venant*sche Annahme physikalisch keine Berechtigung hat. Dies ist z. B. im allgemeinen bei Druckversuchen an spröden Körpern der Fall, obwohl ausserordentlich spröde Körper sich oft nach der Längsrichtung spalten und scheinbar einen Trennungs-

---

(1899), p. 452. Die Versuche wurden mit ganz ähnlichem Resultate wiederholt von *W. E. Williams*, Phil. Mag. (6) 15 (1908), p. 81.

78) *B. de St. Venant* bei *Navier*, Résumé des leçons, Paris 1864. 3. Aufl., I. 1, p. 6 und 22.

79) *J. V. Poncelet*, Cours de mécanique appliquée, Paris 1839.

bruch im Sinne der *St. Venant*schen Annahme liefern. Solche Trennungsbrüche haben z. B. *A. Winkelmann* und *O. Schott*[80]) bei Glas beobachtet. Andererseits ist es möglich, dass bei diesen Druckversuchen der Bruch eigentlich durch geringe Zugspannungen hervorgerufen wird, welche senkrecht zur Bruchrichtung durch Unebenheit der Druckplatte oder durch verschiedene Querdehnung der sich berührenden Flächen hervorgerufen werden.

Die Auffassung von *A. Mesnager* nimmt eine Zwischenstellung zwischen der Annahme der grössten Spannung und der grössten Dehnung ein. *Mesnager* hält für den Trennungsbruch beim Zugversuch die Grösse der Zugspannung massgebend, dagegen erfolgt nach seiner Auffassung auch beim Druckversuch ein Trennungsbruch, wenn die Querdehnung so gross wird, dass jene Zugspannung, die sie durch radialen Zug in der Querrichtung hervorrufen würde, der Zugfestigkeit gleichkommt. Er erhält somit als Verhältnis der Zug- und Druckfestigkeit für sehr spröde Körper $\frac{1}{m-1}$ statt $\frac{1}{m}$ nach der *St. Venant*schen Theorie.

c) *Annahme der grössten Formänderungsarbeit.* *R. Girtler*[82]) hat es versucht — einer Anregung von *E. Beltrami*[83]) folgend — als allgemeingültiges Mass für die Bruchgefahr die in der Volumeinheit aufgespeicherte Formänderungsenergie einzuführen und die Druckfestigkeit spröder Körper von dieser Annahme aus abzuleiten. Es scheint aber, dass die Berechnung der komplizierten Spannungsverteilung in der Nähe der Einspannfläche keine sichere Grundlage für den Beweis der Annahme bietet.

9. Verschiebungsbruch. Ein typisches Beispiel für den Verschiebungsbruch liefern (wenigstens soweit keine Spaltung nach der Längsrichtung eintritt), Druckversuche an spröden Körpern (Gusseisen, Gesteine). Allerdings stösst es auf Schwierigkeiten, die wahre Druckfestigkeit zu bestimmen, da der Einfluss der Reibung an der Druckfläche die Spannungsverteilung gerade an jener Stelle stört, von welcher die Bruchfläche ausgeht. Bei spröden Stoffen führt die Reibung an den Druckplatten zur Ausbildung der sog. „Druckkegel", die dann bei weiterer Deformation auf den Probekörper eine Sprengwirkung ausüben.[83a]) Dies hat zur

---

80) *A. Winkelmann* und *O. Schott,* Ann. d. Physik 51 (1894), p. 712.

81) *A. Mesnager,* Congrès international des méthodes d'essai. Paris 1901. I., p. 143.

82) *R. Girtler,* Wien Ber. 116 (1907), p. 509.

83) *E. Beltrami,* Ist. Lombordo, Rendiconti 18 (1885) p. 704 auch Math. Ann. 57 (1903), p. 94.

Folge, dass, wie *J. Bauschinger*[84]), *A. Martens*[85]) und später *L. Prandtl* und *F. Rinne*[86]) festgestellt haben, die Tragfähigkeit eine Funktion des Verhältnisses: Länge zum Querschnittsdurchmeser ist, und zwar besitzen kurze Stücke erheblich grössere Tragfähigkeit als mittellange. Man hat es versucht, durch Einführung von Schmiermitteln und elastischen Zwischenlagen den Einfluss der Druckplatten zu beseitigen, doch scheint es, dass das Eindringen des Schmiermittels in die Poren, ferner die verschiedene Ausdehnung der elastischen Zwischenlage störende Einflüsse mit sich bringen.[87]) Man erhält die sichersten Werte, wenn man die Probekörper genügend lang wählt, wobei allerdings durch die Knickgefahr bald eine obere Grenze gesetzt wird. Für genaue Untersuchungen kann man eine Reihe Versuche mit verschieden langen Probekörpern vornehmen und so den richtigen Wert der Druckfestigkeit durch Extrapolation ermitteln. Den Einfluss der Druckflächen theoretisch zu ermitteln, ist bisher in befriedigender Weise nicht gelungen.[88])

An dem typischen Beispiel der Druckfestigkeit spröder Körper hat *Ch. A. Coulomb*[89]) die *Theorie des Verschiebungsbruches* entwickelt. Nach seiner Vorstellung setzt der Körper der Verschiebung längs jeder Ebene einen Widerstand entgegen, welcher aus einem der Kohäsion entsprechendem Beitrage τ_0 und einem der Normalspannung auf die Verschiebungsfläche proportionalen Anteile $f\sigma$ besteht. Der zweite Betrag ist nach der Analogie der Reibung zwischen festen Körpern angesetzt, f bedeutet eine Reibungsziffer. Die Gleichgewichtsbedingung lautet für ein beliebiges Flächenelement (τ Schubspannung)

$$|\tau| \leqq \tau_0 + f\sigma.$$

Coulomb sucht nun jene Ebene zu bestimmen, längs welcher die Schubspannung zuerst dem Ausdruck an der rechten Seite gleich wird. Eine elementare Rechnung zeigt, dass die erste Verschiebung längs jener

83a) Vgl. *G. Lang*, Armierter Beton 5 (1912), p. 311 ff.; hier auch weitere Literaturnachweise.

84) *J. Bauschinger*, Mitteilungen aus d. mech. techn. Labor. München 6 (1876).

85) *A. Martens*, Mitteilungen aus den techn. Versuchsanstalten in Berlin 18, p. 133.

86) *L. Prandtl* und *F. Rinne*, Neue Jahrbücher für Mineralogie 2 (1909), p. 121.

87) Vgl. z. B. *A. Föppl*, Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 27 (1900). *F. Kick*, Baumaterialienkunde 5 (1900), p. 177, mit Hinweis auf eigene ältere Versuche.

88) Vgl. *G. Filon*, London Phil. Trans. (A) 198 (1902), p. 147, auch *R. Girtler*, Ber. Wien 116 (1907), p. 509.

89) *Ch. A. Coulomb*, Mém. pres. par div. savants Paris 7 (1776), [1773], p. 343.

Ebenen erfolgt, die mit der Richtung der Druckkraft den Winkel $\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}$ einschliessen, wobei $\operatorname{tg} \varrho = f$ gesetzt wurde. Die Druckkraft, die zum Verschiebungsbruch führt, ist nach dieser Annahme gleich

$$\sigma = 2\tau_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right).$$

Für $\varrho = 0$ ergiebt sich der spezielle Fall, dass der Bruch durch eine bestimmte Grösse der Schubspannung bedingt ist. Dies gilt zumeist in der Literatur als *Coulombsche Regel.*

Die *Coulomb*sche Betrachtung wurde von *Ch. Duguet*[89]) auf plastische Stoffe übertragen, indem er annahm, dass die Elastizitätsgrenze bei bildsamen Körpern ebenfalls durch Verschiebung überschritten wird, wie dies durch die Fliessfiguren z. B. nahegelegt wird. *Duguet* weist zwar darauf hin, dass im allgemeinen der Reibungskoeffizient f von dem Wert der Normalspannung abhängen kann; für eine angenäherte Theorie nimmt er jedoch nicht für verschiedene Spannungszustände, sondern auch für sämtliche Metalle einen Mittelwert von f an. Es ergiebt sich dann für die Elastizitätsgrenze die allgemeine Beziehung zwischen den zwei extremen Hauptspannungen σ_1 und σ_3

$$\sigma_1 - \sigma_3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right) = 2\tau_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right).$$

10. Elastizitätsgrenze und Bruchgefahr beim allgemeinen Spannungszustand. Auf Grund der Vorstellung, dass die Elastizitätsgrenze durch Verschiebung längs Gleitflächen überschritten wird, hat *O. Mohr*[90]) eine *Theorie des allgemeinen Spannungszustandes* aufgestellt. Er verzichtet auf eine spezielle Annahme über die Natur der inneren Widerstände und setzt nur voraus, dass die Möglichkeit der Verschiebung durch eine Beziehung zwischen der Normalspannung und Schubspannung bedingt ist, die in der betreffenden Ebene wirken. Er nimmt somit eine feste, dem Material charakteristische Funktion

$$\tau_m = f(\sigma)$$

an, so dass für ein rein elastisches Gleichgewicht $|\tau| < f(\sigma)$ gelten muss. Das Problem kann zunächst durch den Nachweis, dass nur solche

89) *Ch. Duguet,* Limite d'élasticité et résistance à la rupture, Paris 1885. — Eine etwas modifizierte Darstellung der *Duguet*schen Annahmen findet man bei *A. Mesnager,* Paris C. R. 126 (1898), p. 515, ferner Congrès internat. des méthodes d'essai, Paris 1901, I., p. 143.

90) *O. Mohr,* Civiling. 28 (1882), p. 112; Z. d. Ver. d. Ing. (1900), p. 1524. Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, Berlin 1906, p. 167. — Vgl. auch *P. Roth,* Z. f. Math.-Phys. 48 (1903), p. 285. Diss. Techn. Hochsch. Berlin 1902.

Ebenen als Gleitebenen in Betracht kommen können, die durch die mittlere Axe des Spannungsellipsoids gehen, auf ein ebenes zurückgeführt werden. Demnach ist die mittlere Hauptspannung belanglos für die Elastizitätsgrenze, und die Beziehung kann auch durch eine Beziehung der beiden extremen Hauptspannungen ersetzt werden. Ein ebener Spannungszustand kann aber nach *Mohr*s Verfahren stets durch einen Kreis in der Ebene σ, τ dargestellt werden, so dass die Beziehung $\tau_m = f(\sigma)$ eine „Grenzkurve" in der σ, τ-Ebene bestimmt von der Beschaffenheit, dass alle Spannungszustände innerhalb der Elastizitätsgrenze durch solche Kreise dargestellt werden, die vollständig an einer Seite der Grenzkurve liegen. Die Grenzkurve ist die Umhüllende der Spannungskreise, die den Grenzzuständen entsprechen. Auch wird die Orientierung der Gleitebene gegen die Hauptspannungen durch die graphische Darstellung in einfacher Weise geliefert: der Winkel zwischen zwei symmetrisch gelegenen Gleitebenen wird durch den Winkel der Normalen des betreffenden Spannungskreises mit der σ-Axe gegeben. Die Zug- und Druckfestigkeit (bzw. Zug- und Druckelastizitätsgrenze) ergeben sich durch Spannungskreise, die durch den Koordinatenursprung gehen und die Grenzkurve berühren. Die Torsionsfestigkeit entspricht einem Spannungskreise, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt; die Schubfestigkeit ergiebt sich schliesslich durch den Schnittpunkt der Grenzkurve mit der Axe $\sigma = 0$. Die *Coulomb*sche Theorie entspricht dem speziellen Falle, dass die Grenzkurven durch zwei gerade Linien gegeben sind (Fig. 1); sind die beiden Geraden parallel zur σ-Axe, so gelangt man zu der einfachsten Annahme der grössten Schubspannung (grösste Spannungsdifferenz). Nach *Mohr*s Vorstellung geht die Grenzkurve bei allen Stoffen für grosse Werte von σ asymptotisch in zwei parallele Geraden $\tau = \text{const.}$ über. Die Annahme der grössten Schubspannung entspricht danach dem plastischen Zustande, wie es etwa unter hohem allseitigen Druck der Fall ist. Diese Auffassung wurde von neueren Versuchen in der Tat bestätigt.[91])

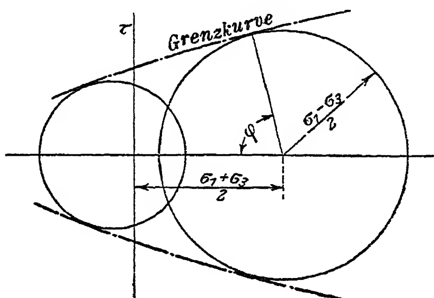


Fig. 1.

Die *Mohr*sche Theorie wurde bisher nur an bildsamen Körpern

91) *Th. v. Kármán,* Z. d. Ver. d. Ing. 55 (1911), p. 1749 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 118 (1912).

vollständig bestätigt gefunden. Allerdings zeigen die Versuche, die über zusammengesetzte Beanspruchung von Eisen, Stahl und Kupfer, besonders in neuerer Zeit in grosser Anzahl angestellt wurden[92]), dass man bei den meisten plastischen oder zähen Stoffen mit der einfachsten Annahme der grössten Schubspannung auskommt. Sehr klar zeigten die Versuche, dass die mittlere Hauptspannung bei diesen plastischen Materialien keinen Einfluss auf die Elastizitätsgrenze hat. Entsprechend der Regel der grössten Schubspannung verhält sich die Torsionselastizitätsgrenze zur Zugfestigkeit wie 1 : 2 statt 0,8 : 1 nach der *St. Venant*schen Theorie.[93]) Das Resultat, dass die grösste Schubspannung für die Elastizitätsgrenze massgebend ist, wurde schon früher durch die Versuche von *H. Tresca*[94]) über „Ausfluss" von Metallen nahegelegt.

Wie weit die *Mohr*sche Theorie auch für spröde Körper ausreicht, ist bisher nicht sichergestellt. Es scheint zunächst, dass alle Fälle, wo die Zugspannung einen bestimmten Wert erreicht, und somit Trennungsbruch erfolgt, vom Gültigkeitsbereich der *Mohr*schen Theorie auszuschliessen sind. So kann eine Berechnung der Schubfestigkeit und Torsionsfestigkeit aus Zug- und Druckfestigkeit nicht als richtig anerkannt werden, da die Zugfestigkeit eben durch Trennungsbruch bedingt ist. Dagegen liefert die Theorie mit der Wirklichkeit übereinstimmende Resultate bei Druckversuchen. Die Spannungskreise, die man bei Druckversuchen unter allseitigem Druck erhält[91]), liefern eine Umhüllende, die bei Übergang in den plastischen Zustand in der Tat asymptotisch zwei parallelen Geraden zustrebt. Auch die Neigungswinkel der Druckflächen und Fliessfiguren entsprechen den Werten, die man aus der experimentell bestimmten Grenzkurve ableitet. Zweifelhafter erscheint es jedoch, dass die Annahme von der Belanglosigkeit der mittleren Hauptspannung auch für spröde Körper zutrifft. *A. Föppl*[95]) hat die Annahme unmittelbar dadurch geprüft, dass er Zementkörper gewöhnlichem Druckversuch

$$(\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$$

92) *J. Guest,* Phil. Mag. (5) 50 (1900), p. 690, *E. L. Hancock,* Phil. Mag. (6) 12 (1906), p. 418, ibid. (6) 15 (1908), p. 214; *W. Scoble,* Phil. Mag. (6) 12 (1906), p. 553; *W. Mason,* Inst. Mech. Eng. Proc. (1909), p. 1205; *C. A. M. Smith,* Inst. Mech. Eng. Proc. (1910), p. 1237.

93) *J. Bauschinger,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 3 (1884); Über Scherfestigkeit vgl. *E. G. Itzod,* Inst. Mech. Eng. Proc. 1906, I., p. 5; *Ch. Frémont,* Revue de métallurgie 3 (1906), p. 205.

94) *H. Tresca,* Mém. prés. par div. savants, Paris 18 (1868), p. 756, 20 (1872), p. 169.

95) *A. Föppl,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 27 (1900).

und einem Umschlingungsversuch

$$(\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \sigma_3 > 0)$$

unterwarf. Ist die mittlere Hauptspannung ohne Belang, so muss der Versuch dieselbe Druck- und Umschlingungsfestigkeit, dieselbe Differenz $|\sigma_1 - \sigma_3|$ ergeben. Dies traf bei den Versuchen nur in dem Falle zu, wenn man zwischen den Probekörpern und den Druckflächen Schmiermittel einführte. Bei trockenen Druckflächen dagegen war die Umschlingungsfestigkeit bedeutend höher. Mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Spannungsverteilung an den festen Druckflächen ist es vorzuziehen, dass man seitlichen Druck durch gleichmäßigen Flüssigkeitsdruck erzeugt. Diesbezügliche Versuche von *R. Böker*[95a]) zeigten, dass die Grenzkurven der Umschlingungsversuche und der Druckversuche nicht zur Deckung gebracht werden können. Ein — bisher allerdings unaufgeklärter — Einfluss der dritten Hauptspannung ist somit in der Tat vorhanden.

II. Langsam wechselnde Belastung (zweite Näherung).

11. Hysteresis. Es wurde bisher das Material in erster Annäherung bis zu gewissen Grenzen der Beanspruchung, die wir „Elastizitätsgrenze" nannten, als vollkommen elastisch betrachtet; jenseits der Elastizitätsgrenze haben wir die elastische und bleibende Änderung getrennt, in dem Sinne, dass weitere bleibende Deformation stets nur bei Überschreitung der früher bereits erreichten Höchstbelastung eintritt, gegen Entlastung und Wiederbelastung dagegen der Körper sich als vollkommen elastisch verhält (vgl. Nr. 4). Genauere Beobachtungen zeigen nun, dass der Belastungs- und Entlastungsvorgang bereits innerhalb der Elastizitätsgrenze sich nicht decken, sondern der gleichen Kraft beim Entlasten stets eine grössere Deformation entspricht als beim Wiederbelasten. Belastung und Deformation stehen miteinander in ähnlicher Beziehung wie magnetische Feldstärke und magnetische Induktion bei magnetisierbaren Körpern. Man nennt daher die Erscheinung nach der Analogie mit den magnetischen Erscheinungen *Hysteresis,* und insbesondere spricht man von *elastischer Hysteresis*, wenn sie schon bei *Belastungen innerhalb der Elastizitätsgrenze* auftritt. Im allgemeinen macht sich die Hysteresis schon bei kleinen Lasten bei jenen Stoffen geltend, die dem Hookeschen Gesetz unvollkommen genügen (z. B. Gusseisen). Dagegen treten bei Stoffen, die bis zu einer ausgeprägten Grenze dem Hookeschen Gesetz gut ge-

95a) *R. Böker,* Diss. techn. Hochsch. Aachen 1913, erscheint auch in Mitteilungen über Forschungsarbeiten.

horchen, deutlich wahrnehmbare Hysteresiserscheinungen erst bei Belastungen oberhalb dieser Grenzen auf. Es lässt sich jedoch auch bei diesen Stoffen durch genügend feine Beobachtungen schon unter kleinen Belastungen Hysteresis nachweisen. Die Wahrnehmung, dass selbst ganz langsame, innerhalb der Elastizitätsgrenze verlaufende Zug- und Druckbeanspruchung stets durch nicht umkehrbare magnetische und thermodynamische Veränderungen begleitet ist, liefert einen Beweis für die allgemeine Gültigkeit der Hysteresis.

Trägt man im σ, ε-Diagramm (σ Belastung, ε Deformation) die Belastungs- und Entlastungskurven auf, so erhält man die sog. „*Hysteresisschleife*", und die dazwischen eingeschlossene Fläche liefert unmittelbar den Arbeitsverlust, der mit einem Hin- und Rückgang der Belastung verbunden ist. Wir beschäftigen uns zunächst *mit den bei langsam verlaufender Wechselbelastung auftretenden Hysteresiserscheinungen*, während die bei schell verlaufender Wechselbelastung (Schwingungen) auftretenden Erscheinungen später (Nr. **13** u. **14**) behandelt werden sollen, wo wir den zeitlichen Verlauf der Deformation mitberücksichtigen. Praktisch ist die Hysteresis, d. h. der sich endgültig einstellende Dehnungsrest, nur schwer von der zeitlich verzögerten Deformation zu trennen, da der Gleichgewichtszustand erst nach sehr langer Zeit erreicht wird.

Die Hysteresisgesetze wurden erst verhältnismässig spät entdeckt, wohl hauptsächlich deshalb, weil die älteren Festigkeitsmaschinen eine allmähliche Entlastung der Versuchskörper nicht zuliessen und so nur die Belastungskurven und der Dehnungsrest studiert worden sind. Die Hysteresisschleifen wurden zuerst von *M. Cantone*[96]) und *H. Bouasse*[96]) genauer studiert. Für *elastische Vorgänge* gelten nach den von *S. Berliner*[97]) am Gusseisen durchgeführten Versuchen dieselben *Regeln*, wie sie von *E. Madelung*[98]) für magnetische Hysteresis aufgestellt worden sind. Sie lauten hier wie folgt:

a) Geht man von einem Punkte des Lastdehnungsdiagrammes (vgl. Fig. 2) aus, in welchem der Belastungssinn gerade umgekehrt wurde z. B. (A) (Umkehrpunkt), so ist die darauf folgende Lastdehnungskurve durch den Umkehrpunkt eindeutig bestimmt; wird der Be-

---

96) *H. Bouasse,* Ann. phys. chim. (7) 11 (1897), p. 433. Zusammenstellung der *Bouasse*schen Arbeiten siehe Ann. phys. chim. (7) 24 (1903), p. 384; *M. Cantone,* Roma, Acc. dei Lincei Rend. (3) 2, 1 (1893), p. 246, 253, 295, 339, 346, 385 und (4) 3, 1 (1894), p. 26, 62.

97) *S. Berliner,* Diss. Göttingen 1906, auch Annalen der Physik 20 (1906), p. 527.

98) *E. Madelung,* Diss. Göttingen 1905.

lastungssinn in einem beliebigen Punkte (B) nochmals umgekehrt, so gelangt man stets zu dem ersten Umkehrpunkt zurück, so dass man von jedem Umkehrpunkt aus durch nochmalige Umkehr einen ge-

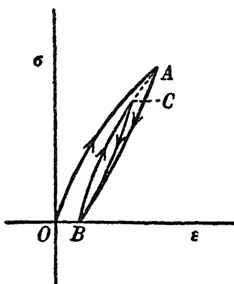


Fig. 2.

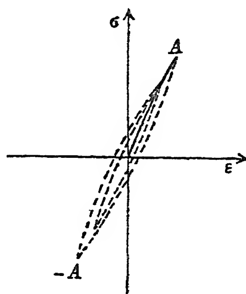


Fig. 3.

schlossenen Zykel erhält. Nach Durchschreitung eines Umkehrpunktes zeigt die Lastdehnungskurve das dem vorangegangenen Umkehrpunkt zugeordnete Gesetz.

b) Führt man mit dem Probekörper mehrere Lastwechsel aus, kehrt aber jedesmal unmittelbar vor Erreichen des vorletzten Umkehrpunktes den Belastungssinn um, so erhält man eine spiralförmige Zackenlinie (Fig. 3), die schliesslich zu einem Punkt führt. Geht man nun von diesem Punkte aus, so läuft die Spannungsdehnungskurve beim Belasten durch sämtliche Umkehrpunkte, die zu grösseren Lasten, beim Entlasten durch sämtliche Umkehrpunkte, die zu kleineren Lasten gehören. Die so gewonnene Kurve (— $\overline{AA}$) nennt man „*Durchschreitungskurve*".

c) Führt man einen spiralförmigen Zykel um den Nullpunkt des Lastdehnungsdiagrammes aus, so erhält man als Durchschreitungskurve mit guter Annäherung die Kurve der allerersten Belastung, die sog. „*jungfräuliche Kurve*". Die jungfräuliche Kurve kann also als Durchschreitungskurve vorangegangener Deformationen aufgefasst werden. Andererseits ist der spiralförmige Zykel geeignet, das Material in seinen ursprünglichen (jungfräulichen) Zustand zurückzuführen, namentlich verhält sich der Körper nach solcher Behandlung für kleine Belastungen wieder rein elastisch.

Bezüglich der *Gestalt der Hysteresisschleifen* ist zu bemerken, dass die Anfangsneigung der Kurven nach einem Umkehrpunkt mit der Anfangsneigung der Durchschreitungskurve übereinstimmt; der Körper erleidet nach jeder Umkehr zunächst rein elastische Deformation. In erster Annäherung ist die Anfangsneigung der Durchschreitungskurve in der ganzen Ebene konstant, durch feinere Beobachtung findet

man sie als abhängig von der Belastung, nicht aber von der Deformation. Sie bestimmt sozusagen den wahren Wert des Elastizitätsmoduls als Funktion der Spannung.

S. Berliner fand bei Gusseisen, dass die Durchschreitungskurve durch ähnliche Vergrösserung auf den doppelten Masstab mit der Belastungs- und Entlastungskurve zur Deckung gebracht werden kann; doch gilt diese Regel nur für enge Hysteresisschleifen.

Die oben angeführten Regeln, bilden sozusagen den Idealfall der elastischen Hysteresis, dem gegenüber die einzelnen Stoffe mehr oder weniger bedeutende *Abweichungen* zeigen. Wird z. B. ein Material aus seinem ursprünglichen Zustand heraus zum erstenmal Lastwechseln unterworfen, so zeigen die ersten Zykeln ein etwas anderes Verhalten als die späteren. Die Fläche der Hysteresisschleifen nimmt mit jedem folgenden Zykel ab, bis sich nach einigen Wiederholungen eine für alle weiteren zwischen denselben Grenzen verlaufenden Lastwechsel gültige Hysteresisschleife ausbildet. Dieses Verhalten des Materials wird als „*Akkomodation*" bezeichnet[98]). *C. Bach*[99]) unterwirft den Probekörper zwecks experimenteller Bestimmung des Elastizitätsmoduls erst einigen Belastungswechseln, da erst danach ein konstanter Zustand des Materials sich einstellt. Ebenso machte schon *G. Wiedemann*[100]) darauf aufmerksam, dass der Normalzustand erst nach einigen Zykeln erreicht wird. *A. Miller*[101]) unterscheidet zwischen dem primären und dem sekundären Elastizitätsmodul, welch letzterer nach einigen Zykeln beobachtet wird und sich weit gesetzmässiger verhält als der primäre.

Es ist bemerkenswert, dass die Akkomodation durch Erwärmen, sowie durch Erschütterung und Überbelastung wieder aufgehoben wird.

Die *Abhängigkeit der Hysteresis von der Temperatur* wurde von *G. Pizzatti*[102]) näher untersucht. Er fand, dass die Hysteresisschleifen bei höheren Temperaturen die niedrigen Temperaturen entsprechenden in sich einschliessen. Dies steht offenbar in Einklang mit der soeben erwähnten Beobachtung, dass Temperaturerhöhung die Akkomodation aufhebt.

---

98) *H. Bouasse,* Ann. phys. chim. (7) 11 (1897), p. 433.

99) *C. Bach,* Abhandlungen und Berichte, Stuttgart 1897, siehe auch *O. Berner,* Diss. Stuttgart 1903.

100) *G. Wiedemann,* Ann. d. Phys. u. Chem. 103 (1858), p. 563; ferner *H. Streintz,* ebd. 153 (1874), p. 387.

101) *A. Miller,* Münch. Ber. 15 (1886), p. 707; ferner *J. Bauschinger,* Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium d. techn. Hochschule in München 13 (1886) u. 25 (1897).

102) *G. Pizzatti,* Gaz. chim. ital. 6 (1876); 7 (1877).

12. Bruchgefahr bei wechselnder Belastung. Die Frage nach der Bruchgefahr bei wechselnder Belastung entsprang aus den Bedürfnissen des Eisenbahn- und insbesondere des Lokomotivbaues. Grundlegend für alle weiteren Versuche dieser Art waren die sich über mehrere Jahre hin erstreckenden Untersuchungen von *A. Wöhler*[103]). Seine Versuche bezogen sich sowohl auf Zug- und Druck- als auch auf Torsions- und Biegungsbeanspruchungen, und zwar bis zu mehreren Millionen Belastungswechseln. Die von ihm gefundenen Regelmässigkeiten kann man in folgenden *einfachen Regeln* zusammenfassen.

a) Bei wiederholter Belastung zwischen Null und einer Maximalbelastung ist die Anzahl der Wiederholungen, die zum Bruch führt, eine Funktion der Maximalbelastung, und zwar nimmt sie mit abnehmender Maximalbelastung zu. Es giebt aber eine Grenze der Belastung, unterhalb welcher praktisch unendlich viele Wiederholungen ohne Bruch möglich sind.

b) Wird bei konstanter Maximalbelastung die untere Belastungsgrenze variiert oder der Probekörper abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen beansprucht, so wird die Anzahl der zum Bruch erforderlichen Wiederholungen grösser, wenn die Grenzen zusammenrücken und kleiner, wenn die Grenzen weiter auseinander liegen. So erfolgt der Bruch bei Belastung zwischen gleichen positiven und negativen Grenzen viel eher als zwischen Null und einer Maximalbelastung. Auch jene Grenzbelastung, die unendlich vielen Wiederholungen entspricht, wird durch wechselnde Belastung nach zwei Richtungen etwa auf die Häfte erniedrigt.

Die *Wöhler*schen Versuche sind von *L. Spangenberg*[104]) fortgesetzt worden. Ungefähr gleichzeitig hat *W. Fairbairn*[105]) Versuche unter Wechselbelastung bis zum Bruch durchgeführt, die den Zwecken des Brückenbaues dienten. Von späteren Experimenten seien vor allen Dingen die von *J. Bauschinger*[106]) hervorgehoben; eine Fortsetzung der *Bauschinger*schen Experimente hat *L. Bairstow*[107]) gegeben. Heutzutage sind die meisten grösseren Materialprüfungsanstalten mit besonderen Einrichtungen für Versuche mit Wechselbelastung („*Dauerversuche*") versehen.

Brüche an Maschinenteilen mit schroffen Übergängen veranlassten

---

103) *A. Wöhler,* Zeitschr. f. Bauwesen 8 (1858) bis 20 (1870).

104) *L. Spangenberg,* Zeitschr. f. Bauwesen 24 (1874), p. 473; 25 (1875), p. 77.

105) *W. Fairbairn,* Lond. Phil. Trans. 154 (1864), p. 311.

106) *J. Bauschinger,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 13 (1886); 25 (1897), herausgeg. v. *A. Föppl.*

107) *J. Bairstow,* Lond. Phil. Trans. Serie A. 210 (1911), p. 35.

A. Föppl[108]), Dauerversuche mit eingekerbten Stäben anzustellen; die Versuche führten zu dem Ergebnis, dass solche Stäbe um so weniger Widerstandsfähigkeit gegenüber Wechselbelastungen zeigen, je grösser die Krümmung an der Übergangsstelle ist. Dies hängt damit zusammen, dass an solchen Stellen — wie auf Grund der Elastizitätstheorie nachgewiesen werden kann — grosse lokale Spannungen entstehen. Bei einmaliger Belastung sind diese Spannungen bei zähen Stoffen ungefährlich, weil die Elastizitätsgrenze nur innerhalb eines ganz kleinen Bereiches überschritten wird. Bei wechselnder Belastung dagegen tritt allmählich ein Bruch ein, da die bei der Überanstrengung entstehenden kristallinischen Gleitflächen sich durch die unzählige Wiederholung der Deformation zu mikroskopischen Rissen herausarbeiten und schliesslich zur Zerstörung des Materials führen. So genügt eine lokale Überschreitung der *Wöhler*schen Grenze, um Bruch an der betreffenden Stelle herbeizuführen. Den allmählichen Verlust der Widerstandsfähigkeit durch Wechselbelastung bezeichnet man auch als *Ermüdung*. *J. A. Ewing* und *J. C. W. Humphrey*[109]) verfolgten durch mikroskopische Untersuchungen die verschiedenen Stadien der Ermüdung und namentlich die Veränderung der Kristalle in der Umgebung der späteren Bruchstelle. Sie zeigten, dass ausserhalb der gefährlichen Stelle das Gefüge nicht geändert wird, im Einklang damit, dass der Probekörper, der durch viele Belastungswechsel ermüdet ist, bei Ausführung eines gewönlichen Belastungsversuchs keine Verminderung seiner Festigkeit oder Plastizität aufweist. Die ältere Auffassung, nach welcher der Körper infolge der Wechselbelastung seine Zähigkeit eingebüsst hat und spröde geworden ist, entspricht also nicht den Tatsachen.

III. Einfluss der Zeit. Rasch wechselnde Belastung (dritte Näherung).

13. Nachwirkungserscheinungen.

Während wir bisher die Deformation als eine Folge von Gleichgewichtszuständen betrachtet haben, wollen wir nun in dritter und letzter Annäherung auch den zeitlichen Verlauf berücksichtigen. Die auffallendste und wohl auch am ehesten beachtete Tatsache, die auf einen *Einfluss der Deformationsgeschwindigkeit* hinweist, ist die Dämpfung der elastischen Schwingungen. Man kann sich leicht überzeugen, dass der Arbeitsverlust, der der Hysteresis entspricht, im allgemeinen

108) *A. Föppl,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 31 (1909).

109) *J. A. Ewing* und *J. W. C. Humphrey,* Lond. Roy. Soc. Proc. 70 (1902), p. 462; ferner *T. Andrews,* Engeneering 61 (1896), p. 91.

110) *J. A. Ewing,* British Assoc. Report (1889), p. 502.

viel zu klein ist, um das rasche Abklingen der Eigenschwingungen zu erklären. Die einfachste Vorstellung wird hierzu durch die Annahme einer *„innere Reibung“* (*„Viskosität“* nach *Lord Kelvin*) der festen Körper geboten, die nach Analogie mit der Flüssigkeitsreibung von der Deformationsgeschwindigkeit abhängt. Man hat aber eine Grunderscheinung, die durch Viskosität nicht erklärt werden kann; dies ist die sog. *„Relaxation“*, d. h. die zeitliche Abnahme der Spannung bei konstantem Deformationszustand (d. h. bei der Deformationsgeschwindigkeit Null). Die weitergehenden theoretischen Ansätze sollen im Abschnitt B dargestellt werden, hier wollen wir uns auf die Erfahrungstatsachen beschränken.

13a. Einfache Nachwirkungserscheinungen. Die ersten Beobachtungen über Nachwirkung, z. B. der Nachweis, dass die einer gewissen Belastung entsprechende Deformation sich nicht sofort einstellt, gehen auf *W. Weber*[111]) zurück, der einen Kokonfaden über seine Elastizitätsgrenze beanspruchte und nach rascher Entspannung die Deformation beobachtete. In diesem Falle ist nach einer fast momentanen Verkürzung unmittelbar nach der Entlastung eine weitere langsam fortschreitende Verkürzung wahrzunehmen. Seine ursprüngliche Länge erreicht zwar der Faden, auch nach beliebig langer Wartezeit, nicht, aber die Länge nähert sich langsam einem Endwert. Die zuletzt bleibende Dehnung ist der wirkliche Dehnungsrest oder die permanente Deformation. Die Erscheinung selbst bezeichnen wir als *„verzögerte Deformation“*. Ausgedehnte experimentelle Untersuchungen wurden dann von *F. Kohlrausch*[112]) angestellt, der hauptsächlich die Nachwirkung bei Torsion studierte und dabei als erster die Erscheinung der *„Relaxation“* erkannte. Die Zug- und Torsionsnachwirkung befolgen dabei annähernd dieselben Gesetze, wie insbesondere *L. Austin*[113]) nachgewiesen hat.

Sowohl die verzögerte Deformation als die Relaxation treten bereits innerhalb der Elastizitätsgrenze auf, doch erscheinen beide viel ausgeprägter im Bereiche der bleibenden Deformationen. Wir können die *Nachwirkung im Fliessbereich* als *„zeitlichen Verlauf des Fliessens“* bezeichnen, im Gegensatz zu der *„elastischen Nachwirkung im engeren Sinne“*, die man *unterhalb der Elastizitätsgrenze* beobachtet.

Vom praktischen Standpunkt aus ist *elastische Nachwirkung im engeren Sinne* hauptsächlich wegen der verzögerten Deformation von

---

111) *W. Weber,* Ann. d. Phys. u. Chem. 34 (1835), p. 247.
112) *F. Kohlrausch,* Ann. d. Phys. u. Chem. 119 (1863), p. 337.
113) *L. Austin,* Ann. d. Phys. u. Chem. 50 (1893), p. 659.

Bedeutung, die bei Messinstrumenten und Massstäben die Genauigkeit schädlich beeinflussen kann. Die Nachwirkung bei Baustoffen der Maschinentechnik hat zuerst *J. Bauschinger*[114]) untersucht. Sehr genaue Versuche wurden dann in der *Physikalisch-technischen Reichsanstalt*[115]) über die nachträglichen Längenänderungen von gehärtetem Stahl angestellt, mit Rücksicht auf die in der Maschinentechnik gebrauchten Endmasskörper. Die Versuche zeigten, dass nach Jahren noch Längenänderungen beobachtbar sind, und zwar wahrscheinlich infolge des langsamen Rückganges der beim Härten entstehenden Spannungen. Andrerseits ergab sich, dass man durch eine etwa zehnstündige Erwärmung auf ungefähr 150° („*Temperung*") die Nachwirkung fast völlig beseitigt.

Die Physikalisch-technische Reichsanstalt hat auch vergleichende Versuche über die elastische Nachwirkung von reinen Metallen und Legierungen vorgenommen. Es zeigte sich, dass Legierungen im allgemeinen geringere Nachwirkung besitzen als reine Metalle, und dass man gewisse besonders vorteilhafte Zusammensetzungen mit möglichst geringer Nachwirkung bestimmen kann. Für die Thermometrie ist von besonderer Wichtigkeit die Kenntnis der Nachwirkung bei verschiedenen Glassorten. Diesbezüglich wurden in der Physikalisch-technischen Reichsanstalt[116]) ebenfalls systematische Versuche angestellt.

Besonders gering ist die Nachwirkung bei homogenen Körpern, z. B. bei Kristallen. *W. Voigt*[117]) hat nur bei Steinsalz bemerkenswerte Nachwirkung beobachtet; äusserst geringe Nachwirkung zeigt Quarz, der sich deshalb für Verwendung in wissenschaftlichen Messapparaten eignet. Kristallinische Gemenge (Gesteine) haben dagegen oft sehr erhebliche Nachwirkung.

Was den *zeitlichen Verlauf des Fliessens* anbelangt, so ist die verzögerte Deformation unter konstanter Last der Beobachtung am einfachsten zugänglich. Man bezeichnet den Vorgang auch als „*Nachfliessen*" oder „*Nachstrecken*".

Dauer und Geschwindigkeit des Nachfliessens ist bei verschiedenen Stoffen von sehr verschiedener Grössenordnung. So lässt sich bei Leder nach Jahren noch eine verzögerte Deformation deutlich

---

114) *J. Bauschinger,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 20 (1891); ferner *H. Fischer,* Civilingenieur 30 (1884), p. 391.

115) Bericht über die 25jährige Tätigkeit der Phys. Techn. Reichsanstalt, Berlin; siehe Die Naturwissenschaften 1 (1913), Heft 8.

116) Siehe Fussnote 115.

117) *W. Voigt,* Ann. d. Phys. u. Chem. Ergänzungsband 7 (1876), p. 1.

wahrnehmen, während sie bei hartem Material wie Werkzeugstahl nach verhältnismässig kurzer Zeit unter die Grenze der Beobachtung sinkt.

Nach unseren früheren Festsetzungen müssen wir beim Fliessvorgang zähe und vollkommen plastische Stoffe unterscheiden. Bei den *zähen Stoffen* (z. B. bei Flusseisen[118]) und bei verschiedenen anderen Metallen), ferner bei Kautschuk und Glas fanden die Experimentatoren als angenähertes Gesetz für die zeitliche Zunahme der Dehnung unter konstanter Last

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \log (1 + bt),$$

wobei ε_0 die anfängliche Dehnung bedeutet, die sich beim Aufbringen der Last ausgebildet hat. Die Fliessgeschwindigkeit ist dann gleich

$$v = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{a \cdot b}{1 + bt}$$

und daraus

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + a \log \frac{v_0}{v}$$

(ε_0 und v_0 sind ein zusammengehöriges Wertepaar von Dehnung und Geschwindigkeit). *Wenn die Dehnung in arithmetischer Reihe zunimmt, nimmt die Geschwindigkeit in geometrischer Reihe ab.*

Es muss dabei bemerkt werden, dass der Anfang des Fliessvorganges dem logarithmischen Gesetz nicht gehorcht. Es dauert eine gewisse Zeit, bis sich das regelmässige Fliessen ausgebildet hat; dann hält es aber lange Zeit hindurch an. Für ganz kleine Werte der Geschwindigkeit ist die Formel wieder nicht gültig, da danach für $v = 0$ ε logarithmisch unendlich würde, während die Dehnung in der Tat einem endgültigen Grenzwert sich nähert.

Bei *vollkommen plastischen Stoffen* (z. B. beim Blei) bildet sich statt der logarithmischen Abnahme der Geschwindigkeit ein *Fliessen mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit* aus, das oft tagelang anhält und schliesslich infolge der Abnahme des Querschnittes zum Bruch führt. Um die Veränderung des Querschnittes zu kompensieren, hat *E. N. da C. Andrade*[119]) die Drähte durch ein in Wasser eintauchendes Gewicht belastet, dessen äussere Form so bestimmt war, dass beim tieferen Einsinken die Belastung infolge des vermehrten Auftriebes genau proportional dem Querschnitte abnahm. Er fand, dass die

118) Vgl. z. B. *H. Cassebaum,* Diss. Göttingen 1910, Ann. der Physik (4) 34 (1911), p. 107; *P. Ludwik,* Phys. Zeitschr. 10 (1909), p. 411; *E. N. da C. Andrade,* Phys. Zeitschr. 11 (1910), p. 709; *F. Th. Trouton* und *A. O. Rankine,* Phil. Mag. (6) 8 (1904), p. 538.

119) Vgl. Fußnote 118).

Dehnung in die drei folgenden Bestandteile zerlegt werden kann, die teilweise zeitlich übereinander greifen:

1. eine unmittelbare Dehnung bei der Belastung;
2. ein Fliessen mit abnehmender Geschwindigkeit, das allmählich aufhört;
3. ein Fliessen mit konstanter Geschwindigkeit, das lange Zeit hindurch anhält.

Der erste Teil ist derjenige, der beim Entlasten des Drahtes unmittelbar wieder zurückgeht, und zwar unabhängig von der Dauer des Versuches. Der zweite Anteil der Dehnung, der zunächst mit dem dritten gleichzeitig nebeneinander läuft, klingt nach einiger Zeit vollkommen ab, so dass z. B. Blei etwa nach einer Stunde mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit weiter fliesst.

Die *Relaxation* (Abnahme der Spannung bei konstant gehaltener Dehnung) befolgt bei zähen Stoffen eine ähnliche logarithmische Gesetzmässigkeit wie die verzögerte Deformation. Die zeitliche Abnahme der Last lässt sich darstellen durch die Formel

$$P = P_0 - a' \log (1 + b't).$$

Die Relaxation kann überhaupt als Folge der verzögerten Deformation angesehen werden: Würde die Last konstant gehalten und der Dehnung Freiheit gelassen, so würde der Stab sich spontan weiter strecken; wenn daher die Dehnung gehindert wird, so muss sozusagen eine Gegenbelastung ausgeübt werden, d. h. die zur Aufrechterhaltung der Dehnung notwendige Last vermindert werden. Umgekehrt lässt sich die verzögerte Deformation als Folge der Relaxation auffassen.

Verzögerte Deformation unter konstanter Last und Relaxation bei konstanter Dehnung bilden zwei Grenzfälle. Wird sowohl die Kraft als die Dehnung geändert, so gilt als einfachste Annahme, dass die Dehnungsgeschwindigkeit nur von der Spannung und Dehnung, d. h. von dem Wertepaar σ, ε abhängt, nicht aber von der Richtung, in der der betreffende Punkt der σ, ε-Ebene passiert wird. In diesem Idealfalle, der aber bei den meisten untersuchten Stoffen durch die in **13**b geschilderten Einflüsse modifiziert wird, kann man jedem Punkte eine Geschwindigkeit zuschreiben; man gelangt dann zu einer übersichtlichen Darstellung der Verhältnisse, wenn man die Kurven konstanter Geschwindigkeit zeichnet. Jede Kurve konstanter Geschwindigkeit entspricht als Formänderungskurve einem Versuch mit der betreffenden konstanten Streckgeschwindigkeit.

Sind die Kurven konstanter Streckgeschwindigkeit gegeben, so kann man den zeitlichen Verlauf eines beliebigen Versuches bestimmen.

Dem Nachfliessen unter konstanter Last entspricht eine Gerade, parallel zur ε-Achse, und der zeitliche Verlauf wird durch die Schnittpunkte derselben mit den Kurven konstanter Geschwindigkeit bestimmt. Es lassen sich in dieser Darstellung verschiedene Erscheinungen einfach erklären. So muß eine Unterbrechung der Streckung zu einer Abweichung von der *Gerstner*schen Regel führen (vgl. Nr. **4**) in dem Sinne, dass eine Weiterstreckung erst bei grösseren Lasten beginnt, als die vorangegangene[120]), und zwar in desto grösserem Masse, je länger die Pause dauerte. Dies kann folgendermassen erklärt werden: wir nehmen an, dass dem normalen Betriebe der Festigkeitsmaschine eine bestimmte Geschwindigkeit entspricht. Die Belastung erfolgt daher zunächst längs einer Kurve konstanter Geschwindigkeit. Wird eine Ruhepause unter konstanter Belastung eingeschaltet, so erhält man einen Fliessweg parallel der ε-Axe mit abnehmender Geschwindigkeit. Wird nach der Pause weiter belastet, so steigt die Kurve steil bis zu der Kurve der ursprünglichen Geschwindigkeit, die dem Betriebe der Festigkeitsmaschine entspricht; alsdann fliesst der Probestab wieder mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Dieses scheinbare Erhöhen der Fliessgrenze ist jedoch mit dem in **13**b erwähnten wirklichen Erhöhen durch Ruhepause nicht zu verwechseln.

Bezüglich des Bruchvorganges sieht man unmittelbar, dass, wenn man die grösste Ordinate der Kurve der unendlich langsamen Dehnungen überschritten hat, das Weiterfliessen unter konstanter Last zum Bruche führen muss. Bei mässigen Belastungsgeschwindigkeiten kann man daher keine wesentliche Änderung der Bruchgrenze mit der Belastungsgeschwindigkeit erwarten. Dagegen hat *B. Hopkinson*[121]) gezeigt, dass z. B. bei Eisen- und Kupferdrähten für ganz kurze Zeit (etwa bis $^1/_{1000}$ Sekunde) die Bruchgrenze ganz bedeutend überschritten werden kann. *Hopkinson* hat auch die Abhängigkeit der bleibenden Dehnung von der stossweisen Belastung untersucht.

13b. **Einfluss von Ruhepausen. Verschiebung des Geschwindigkeitsfeldes. Ermüdung und Erholung.** Die obige Darstellung der Fliessvorgänge bedarf zunächst einer Berichtigung bezüglich des Anfangsstadiums des Fliessens unter konstanter Last. Nach der Lage der Kurven gleicher Geschwindigkeit müsste man eine konstante Abnahme der Fliessgeschwindigkeit erwarten, tatsächlich beobachtet man bei

120) *J. Bauschinger,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 20 (1891).

121) *B. Hopkinson,* Proc. Roy. Soc. 74 (1905), p. 498.

Neubelastung anfangs einen Geschwindigkeitszuwachs bis zu einem Höchstwert und nur von da ab eine Abnahme nach dem logarithmischen Gesetz. Dieselben Geschwindigkeiten treten also zweimal auf. Es scheint so, als ob die Kurven gleicher Geschwindigkeit, während der Stab entlastet und belastet wird, eine Verschiebung erleiden (vgl. Fig. 4). Diese Beobachtung wird auch als „*Inversion*" bezeichnet. Sie

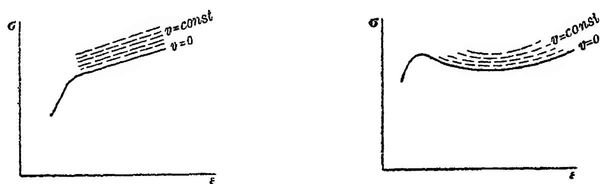


Fig. 4.

entspricht einer Erhöhung der Streckgrenze, d. h. einer Verschiebung der Kurve der unendlich langsamen Dehnungen zu grösseren Lasten, womit offenbar die Verschiebung des ganzen Geschwindigkeitsfeldes verbunden ist[118]).

Den *Einfluss von Ruhepausen* hat insbesondere *J. Muir*[122]) untersucht (vgl. Fig. 5, Linie *a* nach kurzer, Linie *b* nach längerer Ruhepause). Er zeigte die Möglichkeit, dass man die Fliessgrenze vom Stahl durch eine Folge ganz geringer Überbelastungen, aber durch mehrfache Einschaltung von Ruhepausen bis auf das Doppelte erhöhen kann. Die Erhöhung der Fliessgrenze durch Ruhepausen unterscheidet sich aber darin von der Erhöhung durch Überbelastung, dass die letztere eine gleiche Erhöhung der Zug- und Druckgrenze zur Folge hat, dagegen ist die Erhöhung der Streckgrenze gegen Zugbeanspruchung durch Ruhepausen mit einer gleich grossen Erniedrigung der Fliessgrenze gegen Druckbeanspruchung verbunden.

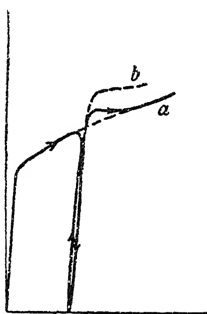


Fig. 5.

Es sei noch bemerkt, dass die Erhöhung der Fliessgrenze durch Ruhepausen und die damit verbundene Verschiebung der Kurven gleicher Geschwindigkeit hauptsächlich bei jenen Stoffen merklich ist, die ausgeprägte obere und untere Fliessgrenzen zeigen. Es ist daher möglich, dass die ausgeprägte Fliessgrenze als Folge vorangegangener Belastungen und darauf folgender Ruhepausen zu erklären ist.

---

122) *J. Muir,* Lond. Phil. Trans. Serie A 193 (1899), p. 1; 198 (1902), p. 1.

Die Ruhepausen haben noch eine Wirkung, die man als „*Ermüdung*“ und „*Erholung*“ bezeichnet[123]). Wird ein Eisenstab über seine Elastizitätsgrenze belastet und dann entlastet, so tritt bei unmittelbar danach vorgenommener Neubelastung die Abweichung vom *Hooke*schen Gesetz viel früher und in erhöhtem Masse auf. Man bezeichnet diese Erscheinung als „Ermüdung“ des Materials infolge Überanstrengung. *Lord Kelvin*[124]) bemerkte, dass die Ermüdung eine Vergrösserung der Schwingungsdauer und des logarithmischen Dekrementes bei Schwingungsversuchen zur Folge hat, so dass man die Ermüdung gewissermassen in dieser Weise messen kann. Merkwürdig ist es nun, dass die Ermüdung durch Ruhepausen rückgängig gemacht wird, so dass das Material sich scheinbar erholt; dabei ist es gleichgültig, ob der Stab während der Ruhepause belastet oder spannungslos ist[125]). Die Erholungszeit ist für verschiedene Materialien wesentlich verschieden. Der Prozess der Erholung wird durch Temperaturerhöhung beschleunigt, und zwar genügt es, den Probekörper auf die Temperatur des siedenden Wassers zu bringen (Temperung)[126]). Dabei bleibt man also weit unter der Temperatur, die das Material in seinen ursprünglichen Zustand zurückführt. Durch die leichte Erwärmung bis auf etwa 100^0 wird die sonstige Wirkung der Überbelastung (Erhöhung der Fliessgrenze) keineswegs rückgängig gemacht, sondern bloss die Erholungszeit verkürzt[127]).

13c. Superposition von Nachwirkungserscheinungen. Das Charakteristische der Nachwirkungserscheinungen besteht darin, dass der momentane Vorgang nicht nur durch den momentanen Zustand, sondern auch durch die Vorgeschichte bestimmt wird. Dies ist nur so zu verstehen, dass, wie bereits *F. Kohlrausch* angenommen hat, zu einer und derselben äusseren Gestalt verschiedene Anordnungen der Moleküle und damit verschiedene Möglichkeit des Verhaltens gegenüber äusseren Einwirkungen gehören können. So ist jeder momentane Deformationszustand als eine Superposition von Einzelnachwirkungen vorangegangener Deformationszustände aufzufassen. Dies tritt besonders klar hervor, wenn man entgegengesetzte Belastungen nacheinander

---

123) *James Thomson,* Dublin math. Journ. Nov. 1848, p. 252; ferner *J. Bauschinger,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 20 (1891); *J. A. Ewing,* Lond. Roy. Soc. Proc. 58 (1895), p. 123.

124) *Lord Kelvin,* Math. and Phys. Papers, vol. 2, London 1890, p. 22.

125) *J. A. Ewing,* Engeneering 87 (1899), p. 122.

126) *J. Muir,* Lond. Roy. Soc. Proc. Serie A 77 (1906), p. 277.

127) Zur Abhängigkeit der Nachwirkung von der Temperatur siehe *H. Bouasse,* Toul. Ann. (2) 1 (1899), p. 331; 3 (1901), p. 217.

anwendet, aber sie mit verschiedener Zeitdauer wirken lässt. Alsdann superponieren sich die entgegengesetzten Nachwirkungen mit verschiedener Intensität. Wird z. B. ein Stab zuerst nach rechts verdreht und längere Zeit in diesem Zustand gehalten, sodann für kurze Zeit nach links gedreht, so kehrt er nach der Entlastung zunächst allmählich von links nach rechts zurück. Der Rückgang wird aber immer langsamer, der Drehungssinn kann sich sogar umkehren, der Stab dreht sich um einen kleinen Betrag wieder nach links und dann erst zurück gegen die ursprünliche Gleichgewichtslage. Dies muss man offenbar so deuten, dass die Nachwirkung der früheren lang dauernden Rechtsdrehung zuerst durch die rasch abklingende Nachwirkung der kurzen Linksdrehung überdeckt wird, aber nach Abklingen der letzteren nochmals hervortritt.

Bemerkenswert ist auch die Überlagerung verschiedenartiger Beanspruchungen, z. B. der Dehnung und der Verdrehung. Wurde einem Draht eine permanente Verdrehung erteilt, so verliert er einen Teil davon durch darauf folgende Längsdehnung. Wiederholte Dehnung und Entlastung vermindert zunächst auch die permanente Verdrehung, doch nur bis zu einem konstanten Zustand. Nachher wird der Draht bei Belastung und Entlastung in der Längsrichtung zwar gleichzeitig elastisch hin- und zurücktordiert, doch die permanente Verdrehung bleibt unverändert.

Ausgedehnte Versuche über den gegenseitigen Einfluss der Verdrehung und Dehnung hat *H. Bouasse*[128]) angestellt. Er beobachtete bei konstanter Dehnung eine Abnahme der Zugspannung durch Verdrehung und umgekehrt bei konstanter Verdrehung eine Abnahme des Drehmoments durch die Dehnung, d. h. in beiden Fällen eine Beschleunigung der Relaxation durch die anderweitige Beanspruchung. Er fand weiterhin, dass der Stab durch eine konstante Verdrehung gegenüber kleinen Zuglasten erhärtet, gegen stärkere Belastung aber nachgiebiger wird.

Als Superposition von sehr zahlreichen entgegengesetzten Nachwirkungen kann man die *gedämpften Schwingungen* ansehen. Es giebt hier zwei hauptsächliche Fragen, die vom theoretischen Standpunkte aus wichtig sind: die *Abhängigkeit des Dekrementes von der Amplitude und von der Schwingungsdauer*. Im allgemeinen zeigt sich eine Zunahme des Dekrementes mit der Amplitude. Allerdings kann bei Schwingungen mit grosser Amplitude der Einfluss von Hysteresis und Nachwirkung schwer getrennt werden. Was die *Abhängigkeit von der*

---

128) *H. Bouasse,* Toul. Ann. (2) 2 (1900), p. 5; 4 (1902), p. 357.

Periode anbelangt, so ist bei vielen Stoffen das logarithmische Dekrement unabhängig von der Periode, bei den meisten Stoffen nimmt es aber mit zunehmender Schwingungsdauer etwas ab. Ein weiteres Eingehen auf das experimentelle Material würde jedoch den Rahmen dieses Artikels weit überschreiten.

Auch bei rasch wechselnder Schwingungsbelastung kann man von *Akkomodation* sprechen. Trägt man z. B. bei erzwungenen Schwingungen die Belastung (z. B. die Trägheitskraft des mitschwingenden Gewichtes) und die Deformation in einem Diagramm auf, so erhält man Schleifen wie bei der langsamen Wechselbelastung. Man kann nun konstatieren, dass die Schleifen anfangs eine Verschiebung erleiden, bis eine endgültige, feste Schleife sich ausbildet. Bei freien Schwingungen ist dies an einer anfänglichen Abnahme des Dekrements bemerkbar.

14. Bruchgefahr bei rascher Belastung. Stoss- und Schlagproben. Die Gesetze der Abhängigkeit der Deformation von der Belastungsgeschwindigkeit sind nicht so genau bekannt, dass wir danach die Bruchgefahr bei stossartiger Belastung beurteilen könnten. So zieht man in der Praxis vor, die Baustoffe direkten *„Stoss-“ oder „Schlagproben“* zu unterwerfen.

Der Einfluss der stossweisen Belastung kann bei verschiedenen Stoffen sehr verschieden sein. Glas zeigt z. B. gegen langsame Belastung ziemlich erhebliche, gegen stossweise Belastung dagegen sehr geringe Widerstandsfähigkeit. Als ein anderes Extrem kann Pech erwähnt werden, das bei kleinen Geschwindigkeiten fast wie eine zähe Flüssigkeit, dagegen bei stossartiger Beanspruchung wie ein spröder Körper mit erheblicher Festigkeit sich verhält.

Die ersten Stossversuche stammen von *E. Hodgkinson*[129]), der ein pendelnd aufgehängtes Gewicht (den Fallbär) gegen die Mitte eines an den Enden gestützten Probebalkens schlagen liess. Heutzutage hat man an den meisten Prüfungsstellen ständige Vorrichtungen für Schlagversuche. Nach einer Anordnung lässt man ein Gewicht frei aus bestimmter Höhe auf den Probekörper fallen, wobei dieser entweder auf Druck oder auf Biegung beansprucht wird. Nach der gebräuchlichsten Anordnung wird das Gewicht in einer Kreisbahn geführt (*„Pendelschlagversuch“*) und stösst gegen einen quer gelegten Probestab, der zumeist an einer Stelle, damit der Bruch an einem bestimmten Querschnitt erfolgen kann, mit einer Einkerbung versehen wird. Die Pendelanordnung hat, falls der Probekörper bis zum Bruch beansprucht wird, den Vorteil, dass die aufgewandte Arbeit unmittelbar durch die

---

129) *E. Hodgkinson,* Brit. Assoc. Rep. 3 (1833), p. 599; 5 (1835), p. 534.

Differenz der ursprünglichen und der nach dem Bruch erreichten Höhe des Gewichtes gemessen werden kann. Die Technik des Stossversuches ist in der technischen Litteratur Gegenstand sehr ausgedehnter Untersuchungen geworden, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Ebenfalls sei auf die artilleristischen Untersuchungen, z. B. auf die Versuche von *Cranz*[130]), nur kurz hingewiesen, der den Vorgang beim Auftreffen eines Geschosses auf Widerstände kinematographisch verfolgt hat, z. B. den Durchgang von Pistolenkugeln durch Thonmassen oder mit Wasser gefüllte Blasen; ferner die Artilleriewirkung auf Panzerplatten.

Die physikalischen Gesetze des Stossvorganges, bei Überschreitung der Elastizitätsgrenze, sind bisher nicht geklärt: *A. Martens*[131]) und *Fr. Kick*[132]) haben an gestauchten Bleikörpern gezeigt, dass die Deformation innerhalb weiter Grenzen nur von dem Arbeitsaufwand abhängt, bei gleicher Arbeit also unabhängig von der Fallgeschwindigkeit ist. Ähnliche Resultate erhält man bei anderen Metallen für stossartige Biegungsbelastung bis zum Bruch. Da bei geometrisch ähnlicher Anordnung die zum Bruch nötige Arbeit proportional ist dem Volumen des Probekörpers („*Prinzip der proportionalen Widerstände*“), so kann man die auf die Volumeinheit bezogene Arbeitsmenge als ein Mass für die dynamische Widerstandsfähigkeit des Materials („*Bruchfaktor*“) ansprechen.

A. Föppl[133]) hat wiederholte Stossversuche an Sandstein- und Zementwürfeln ausgeführt Ist h die Fallhöhe des Bärs, h_0 die kleinste Fallhöhe, die nach sehr grosser Anzahl von Schlägen zum Bruch führt, so lässt sich die zum Bruch erforderliche Zahl n von Schlägen mit guter Annäherung durch die Beziehung $Gn(h - h_0) =$ const. darstellen. Sieht man $G(h - h_0)$ als die bei dem einzelnen Schlag wirksame Schlagarbeit an, so ist die gesamte wirksame Schlagarbeit unabhängig von der Anzahl der Schläge. Gusseisen zeigt bei wiederholten Schlagversuchen ähnliches Verhalten wie die Gesteine; bei plastischen Materialien dagegen — z. B. bei Kupfer — erzeugen wuchtige Schläge bei gleicher Gesamtarbeit eine grössere Deformation als eine entsprechend grössere Zahl leichter Schläge[134]).

130) *C. Cranz* und *K. R. Koch*, Ann. d. Phys. (4) 3 (1900), p. 247; ferner *C. Cranz*, Lehrbuch der Ballistik, 3. Teil, Leipzig 1913.

131) *A. Martens*, Mitteilungen aus den kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin 9 (1891), p. 1 u. 50.

132) *Fr. Kick*, Das Gesetz der proportionalen Widerstände, Leipzig 1885.

133) *A. Föppl*, Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. München 30 (1906) u. 32 (1912).

134) Weitere Litteratur zu Schlagversuchen: *Ehrensberger*, Zeitsch. d. V. d.

B. Theoretische Ansätze.

I. Phänomenologischer Standpunkt.

15. Einleitung. Eine flüchtige Betrachtung der im Abschnitt A dieses Referates zusammengestellten Tatsachen kann uns überzeugen, dass die gewöhnlichen Ansätze der Elastizitätstheorie nicht zur Erklärung, ja nicht einmal zur phänomenologischen Beschreibung der Erfahrungstatsachen ausreichen können. Die Elastizitätstheorie beschränkt sich zunächst auf reversible Deformationen, und so fallen bereits jene Erfahrungstatsachen, die wir als erste Annäherung dargestellt haben (bleibende Deformation des Körpers bei Weiterbelastung, elastisches Verhalten bei Entlastung und Wiederbelastung), ausserhalb des Rahmens der Elastizitätstheorie. *F. E. Neumann*[135]) hat zuerst versucht, die Elastizitätstheorie für *bleibende Dehnungen* zu erweitern; er beschränkte sich aber darauf, Spannungsdehnungsbeziehungen für die Beanspruchung jenseits der Elastizitätsgrenze aufzustellen. Seine Ansätze bieten nicht die Möglichkeit, die Spannungsverteilung bei gegebenem Belastungszustand oberhalb der Elastizitätsgrenze zu berechnen, was eine brauchbare Theorie der bleibenden Deformation vor allem zu leisten hätte. In dieser Richtung kommt nur die von *B. de St.-Venant* aufgestellte *„Plastizitätstheorie“* in Betracht, die wenigstens für vollkommen plastische Medien (d. h. für solche, die bis zu der Fliessgrenze vollkommen elastisch sind und nachher keine Erhöhung der Fliessgrenze erleiden) diese Aufgabe zu lösen versucht.

Will man weitergehen und die *Hysteresis* und den *zeitlichen Verlauf der Deformation* berücksichtigen, so ist zunächst der von *P. Duhem*[136]) eingeschlagene Weg zu erwähnen, durch *formale Ansätze* die Vorgänge an die Elastizitätslehre einerseits, an die Thermodynamik andrerseits anzuschliessen. Natürlich war man aber stets bestrebt, sich irgendeine Vorstellung von dem den Erscheinungen zugrunde liegenden Mechanismus zu bilden. Die einfachste Vorstellung, die für eine Beschreibung der Vorgänge in Betracht kommt, ist die der *„inneren Reibung“ (Viskosität)*. Man kann der inneren Reibung Rechnung tragen,

---

Ing. 51 (1907), p. 1974 u. 2065; *M. Rudeloff,* Stahl u. Eisen 22 (1902), p. 375, 425; *E. Leber,* Stahl u. Eisen 27 (1907), p. 1121 u. 1160; *C. J. Snyders* u. *A. M. Hackstroh,* Baumaterialienkunde 12 (1907), p. 198; *E. Rusch* u. *J. Stummer,* Dinglers polyt. Journ. 323 (1908), p. 259, 277; *A. Leon* und *P. Ludwik,* Mitteilungen aus dem mech. techn. Labor. der techn. Hochschule in Wien 1909.

135) *F. E. Neumann,* Abhandl. Akad. Berlin 1841 [1843], p. 1.

136) Es genüge hier auf die folgenden Arbeiten *P. Duhems* hinzuweisen: *P. Duhem,* Bruxelles, Mém. prés. par div. savants à l'Acad. de Belgique 54 (1896) u. 56 (1898), sowie Paris C. R. 118 (1894), p. 974.

indem man in die Elastizitätsgleichungen Glieder einführt, die von den Deformationsgeschwindigkeiten (von den zeitlichen Differentialquotienten der Deformationsgrössen) abhängen und in erster Näherung diesen proportional gesetzt werden. Die entsprechenden Ansätze für Kristalle und isotrope Körper hat insbesondere *W. Voigt* im einzelnen ausgeführt. Diese Ansätze sind vielleicht für Berechnung der gedämpften Schwingungen von Nutzen, können aber das reichhaltige Material der Nachwirkungserscheinungen nicht einmal qualitativ wiedergeben. Namentlich erhält man keine Erklärung für die spontane Relaxation bei der Deformationsgeschwindigkeit Null. Auch die Theorie *M. Brillouin*s, der sich die Metalle aus einem zähflüssigen Magma und aus elastisch festen Körnern aufgebaut denkt und die Vorgänge als Wechselwirkung zwischen Elastizität der festen Körner und Zähigkeit des Magmas deutet („*Theorie des Doppelmediums*"), kann, obwohl sie den Erfahrungstatsachen weit besser angepasst werden kann, kein zutreffendes Bild von der Wirklichkeit geben.

Einen von dieser Vorstellung ganz abweichenden Weg hat *J. Cl. Maxwell* eingeschlagen durch die „*Annahme der spontanen Relaxation*" als allgemeine Eigenschaft aller Körper, deren Teilchen in irgendwelchen von den Gleichgewichtszuständen abweichenden Zwangslagen sich befinden. In *Maxwell*s Vorstellung erscheint uns der Umstand als wesentlich, dass Kraftveränderung ohne sichtbare Bewegung entstehen kann, etwa durch Umlagerung der in Zwangslage befindlichen Teilchen. Diese Vorstellung führt eben dazu, dass die momentanen Werte der sichtbaren Parameter nicht ausreichen, den weiteren Verlauf zu bestimmen. *L. Boltzmann* ist in dieser Hinsicht so weit gegangen, dass er den momentanen Zustand sozusagen durch Superposition von unendlich vielen Relaxationsvorgängen ableitet, die von früheren Deformationszuständen ausgehen und unabhängig voneinander verlaufen. Er berücksichtigt also die gesamte „*Vorgeschichte*" (*Heredität*) des Materials; er schreibt gewissermassen ein Gedächtnis dem Material zu, das durch eine charakteristische Funktion der seit der betreffenden Deformation verflossenen Zeit angesetzt wird. Mathematisch hat dies zur Folge, dass die Vorgänge statt durch Differentialgleichungen durch *Integrodifferentialgleichungen* geregelt werden[137]).

In den folgenden Nummern sollen die hier angedeuteten Ansätze näher dargestellt werden. Sie bilden eine wenig zusammenhängende

---

137) Vgl. etwa *V. Volterra,* Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der math. Physik, deutsch von *E. Lamla,* Leipzig 1914; auch Arch. d. Math. u. Phys. (3) 22 (1914), p. 91 ff.

Reihe voneinander ziemlich unabhängiger Theorien; vielleicht wird aber durch Nebeneinanderstellung der verschiedenen Ansätze ihre Leistungsfähigkeit am besten beleuchtet.

16. Die St.-Venantsche Theorie der Plastizität. Die von *B. de St.-Venant*[138]) aufgestellte Theorie der Deformation vollkommen plastischer Medien wurde durch die Versuche *H. Trescas*[139]) über den Ausfluss von festen Körpern aus Öffnungen und über den Lochungsvorgang bei weichen Metallen veranlasst. *Tresca* schloss aus seinen Versuchen, dass für die Fliessgrenze die grösste Schubspannung oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Differenz der beiden extremen Hauptspannungen massgebend ist. *St.-Venant* nimmt nun an, dass bis zu dieser Grenze der Körper vollkommen elastisch ist; wird sie erreicht, so fliesst der Körper unter konstanter Last[140]).

Beschränkt man sich zunächst auf *zweidimensionale Vorgänge*, so lauten die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines zweidimensionalen Kontinuums

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\varrho\left(X - \frac{Du}{Dt}\right),$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\varrho\left(Y - \frac{Dv}{Dt}\right)$$

(σ_x, σ_y die Normalspannungen parallel der x- bzw. y-Axe, τ die Tangentialspannung, ϱ die Dichte; X, Y bezeichnen die Massenkräfte pro Masseneinheit, u, v die Geschwindigkeiten, $\frac{D}{Dt}$ die substantiellen Differentialquotienten der *Euler*schen Gleichungen). Zur Bestimmung der fünf unbekannten Grössen σ_x, σ_y, τ, u, v sind drei weitere Gleichungen nötig. *St.-Venants* Annahmen sind wie folgt:

a) Inkompressibilität des Mediums:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

b) Die Fliessbedingung:

$$\tau^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} = k^2$$

---

138) *B. de St.-Venant,* J. de math. (2) 16 (1871), p. 308, 373 u. verschiedene Noten in Paris C. R. 66 (1868), 67 (1868), 68 (1869), 70 (1870), 81 (1875).

139) *H. Tresca,* Paris C. R. 59 (1864), p. 754; 64 (1867), p. 442, 809, 1132; 66 (1868), p. 263, 1027, 1244, 1306; 68 (1869), p. 1197; 70 (1870), p. 27, 238, 288, 368; *H. Tresca,* Paris, Mém. prés. par div. sav. 18 (1868), p 733; 20 (1872), p. 75.

140) Es hat bereits *Tresca* versucht, den Ausflussvorgang theoretisch zu verfolgen; doch sowohl seine Arbeiten wie die ersten diesbezüglichen Arbeiten *St.-Venants* liefern nur ein Bild der kinematischen Verhältnisse, während in einer richtigen Theorie das Kräftegleichgewicht nicht ausser acht gelassen werden konnte.

(k die grösste Schubspannung).

c) Schliesslich wird die naheliegende Voraussetzung gemacht, dass die Fläche der grössten Schubspannung mit der Fläche grösster Gleitgeschwindigkeit zusammenfällt; dies liefert die Gleichung

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}.$$

In allen praktischen Fällen kann die Trägheit und die Schwere vernachlässigt werden; alsdann sind die Gleichungen erfüllt durch den *Airy*schen Ansatz

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$
$$\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Die Fliessbedingung liefert dann die Gleichung

$$4\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 = 4k^2,$$

die mit den Randbedingungen zur Bestimmung der Funktion F ausreicht, so dass der Spannungszustand von dem Deformationszustand unabhängig ist.

Bei Erweiterung der Gleichungen für den *räumlichen Spannungszustand* stösst man auf die Schwierigkeit, dass die Anzahl der Bedingungen für die Bestimmung der Unbekannten nicht ausreicht. Die Fliessbedingung lautet in diesem Falle

$$4(k^2 + q)(4k^2 + q) + 27r^2 = 0,$$

wobei

$$q = \Delta_y\Delta_z + \Delta_z\Delta_x + \Delta_x\Delta_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$
$$r = \Delta_x\tau_{yz}^2 + \Delta_y\tau_{zx}^2 + \Delta_z\tau_{xy}^2 - \Delta_x\Delta_y\Delta_z - 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}$$

zwei Invarianten des Spannungszustandes bedeuten und Δ_x, Δ_y, Δ_z durch die Gleichungen

$$\sigma_x - \Delta_x = \sigma_y - \Delta_y = \sigma_z - \Delta_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

bestimmt werden. Die Bedingung unter c) kann auch so ausgesprochen werden, dass das Spannungsellipsoid und das Ellipsoid der Deformationsgeschwindigkeiten koaxial gerichtet sind. Bezeichnen wir die Spannungskomponenten mit σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, die entsprechenden Deformationsgeschwindigkeiten mit ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, so lautet

die Bedingung der Koaxialität

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}},$$

$$\frac{\sigma_y - \sigma_z}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_{yz}},$$

$$\frac{\sigma_z - \sigma_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{\tau_{zx}}{\gamma_{zx}}.$$

Um eine weitere Gleichung zu erhalten, fügt *M. Lévy*[141]) die Bedingung hinzu, dass das Verhältnis von Schiebungsgeschwindigkeit ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) und Schubspannung ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) in jedem Punkt von der Richtung unabhängig sei. Bei isotropen Flüssigkeiten ist dieser Wert eine absolute Konstante (Reibungskonstante), bei plastischen Medien kann sie örtlich veränderlich sein, aber unabhängig von der Richtung.

Eine *Weiterbildung der Plastizitätstheorie*, namentlich eine befriedigende Lösung des dreidimensionalen Problems, versuchten *A. Haar* und *Th. v. Kármán*[141a]) auf Grund von — allerdings auf diesen Fall hypothetisch erweiterten — Variationsprinzipen, ferner *R. v. Mises*[141b]). Der letztere macht die Annahme, daß die zu einem bestimmten erforderliche Deformationszustand Arbeit unabhängig vom zeitlichen Verlauf ist.

Geht man von dem allgemeinen Spannungszustand zu dem ebenen Spannungszustand über und ist die Bewegung in der senkrechten Richtung gehindert, so folgt aus der letzten Bedingung, dass die dritte Hauptspannung gleich dem arithmetischen Mittelwert der beiden anderen Hauptspannungen sei.

Bei axensymmetrischen Spannungszuständen muß man zwei Fälle unterscheiden. Ist die axiale Hauptspannung die mittlere, so haben wir lediglich den ebenen Spannungszustand, wobei die Grösse der axialen Hauptspannung davon abhängt, ob der Körper in der Axenrichtung sich frei dehnen kann oder gehindert wird. Neues bietet dagegen der Fall, dass die „Ringspannung" die mittlere Hauptspannung darstellt.

St.-Venant hat auf Grund der angegebenen Gleichungen mit Vernachlässigung der Trägheit folgende Fälle behandelt: Torsion kreisrunder Stäbe, Biegung viereckiger Stäbe, Beanspruchung eines Zylinders durch inneren Druck. Ist der Zylinder an der äusseren Mantel-

---

141) *M. Lévy,* J. de math. (2) 16 (1871), p. 369.

141a) *A. Haar und Th. v. Kármán,* Gött. Nachrichten, math. phys. Klasse 1909, p. 112.

141b) *R. v. Mises,* Gött. Nachrichten, math. phys. Klasse 1913, p. 582.

fläche gehindert, dagegen in der Axenrichtung frei, so entspricht dies gewissermassen dem von *Tresca* untersuchten Lochungsvorgang.

17. Theorie der inneren Reibung fester Körper. Die Theorie der Viskosität oder inneren Reibung fester Körper hat insbesondere *W. Voigt*[142]) näher ausgeführt. Er ergänzt zunächst die stress-strain Relationen des allgemeinsten *Hooke*schen Gesetzes durch Glieder, die die Deformationsgeschwindigkeiten enthalten. Die Spezialisierung für isotrope Körper zeigt dann, dass zwei voneinander unabhängige Dämpfungskonstanten auftreten können, die der Messung durch gedämpfte Biegungs- bzw. Torsionsversuche zugänglich sind.

Die Bewegungsgleichung eines *tordierten Drahtes*, an welchem ein Gewicht mit dem Trägheitsmoment θ hängt, lautet nach diesem Ansatze

$$\theta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \left(\vartheta + \alpha \frac{d\vartheta}{dt}\right) = 0,$$

wobei α die Dämpfungskonstante genannt wird und charakteristisch für das Material sein soll. Setzt man die Lösung in der Form

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{\lambda t}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}$$

an, so ist das logarithmische Dekrement

$$\lambda = \frac{\alpha\beta}{\theta} T.$$

Beachtet man, dass angenähert (für geringe Dämpfung)

$$T = \frac{2\pi\sqrt{\theta}}{\sqrt{\beta}}$$

gilt, so wäre das logarithmische Dekrement proportional dem reziproken Wert der Schwingungsperiode. Es wurde bereits erwähnt, dass dies als allgemeingültiges Gesetz durch die Erfahrungen nicht bestätigt wird.

Eine allgemeine, allerdings etwas formelle Begründung des Ansatzes der inneren Reibung lieferte *H. Reissner*[143]) durch Einführung verborgener, zyklischer Koordinaten in das elastische Potential. Die Anwendung der *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen liefert die elastischen Grundgleichungen mit Reibungsgliedern.

18. Theorie des Doppelmediums. Da die einfache Vorstellung der Viskosität fester Körper den Nachwirkungserscheinungen nicht

142) *W. Voigt,* Abh. Gött. Ges. d. Wiss. 36 (1890), 38 (1892), sowie Ann. d. Phys. 47 (1892), p. 671.

143) *H. Reissner,* Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 44.

gerecht wird, hat *M. Brillouin*[144]) das Verhalten eines festen Mediums untersucht, das aus elastisch festen Körnern besteht, die in eine zähe Flüssigkeit eingebettet sind. Die Körner werden als vollkommen elastisch und zunächst ohne Viskosität, die Flüssigkeit als vollkommen unelastisch und mit Zähigkeit behaftet angenommen. Die Flüssigkeit überträgt die Kräfte zwischen den einzelnen Körnern, die sich nicht berühren, und gleicht die Druckunterschiede aus, indem sie von Stellen höheren zu solchen niederen Druckes fliesst. Die gesamte Deformation setzt sich dann aus der elastischen Deformation der Körner und aus der unelastischen des Zwischenmediums zusammen. Um die Ideen zu fixieren, wollen wir einen *Stab* von der Länge l betrachten, der durch die Kraft X auf die Flächeneinheit auf Zug beansprucht wird. Für die elastische Längenänderung können wir setzen

$$\delta l_1 = \frac{l}{E} X .$$

Um die Längenänderung infolge der Flüssigkeitsbewegung zu berechnen, bezeichnen wir die Länge, die auf das flüssige Medium kommt, mit l_2. Alsdann dürfen wir ansetzen, dass die Dehnungsgeschwindigkeit proportional ist der Kraft, umgekehrt proportional der Reibungskonstante und ausserdem abhängig von dem Parameter l_2. Wir setzen daher

$$\frac{d l_2}{d t} = \frac{X}{\mu} F(l_2),$$

wobei $F(l_2)$ eine charakteristische Funktion des Mediums bedeutet. Fassen wir die Gleichung als Differentialgleichung für l auf, so lautet die Lösung mit

$$\int_0^z \frac{dz}{F(z)} = G(z),$$

$$G(l_2) = \frac{1}{\mu} \int_0^t X\, dt + A \qquad (A \text{ Integrationskonstante}).$$

Denkt man sich die Gleichung nach l_2 formal aufgelöst, so wird

$$l_2 = \Phi\left(\int_0^t X\, dt + A\right)$$

oder die Längenänderung von der Zeit $t = 0$ aus gerechnet:

$$l_2 - l_0 = \Phi\left(\int_0^t X\, dt + A\right) - \Phi(A) .$$

144) *M. Brillouin,* Ann. phys. chim. (7) 13 (1898), p. 377; 14 (1898), p. 311; 15 (1898), p. 447.

Auf Grund dieser Überlegung schlägt *Brillouin* als allgemeine schematische Gleichung für die Beziehung zwischen der Deformationsgrösse x und der Kraftgrösse X folgenden Ausdruck vor:

$$x = kX + \Phi\left(\int_0^t X\,dt + A\right) - \Phi(A),$$

wobei Φ eine für das Material charakteristische Funktion und A eine Konstante ist, die von dem Anfangszustand des Materials abhängt.

Der Bau der Gleichung zeigt, dass Zustände, für die der Impuls $\int_0^t X\,dt$ denselben Wert hat, auf derselben Geraden $x - kX = \text{const.}$ der x, X-Ebene liegen, d. h. durch rein elastische Änderung ineinander übergehen können. Nach dieser Theorie ist also der erteilte Impuls massgebend für die bleibende Deformation des Materials.

Man kann z. B. folgende einfache Fälle diskutieren:

1. Ändert man die Kraft sehr rasch, aber ohne Stoss, so kann die Impulsänderung während der raschen Be- oder Entlastung vernachlässigt werden. Beziehen sich die Indizes 1 und 2 auf Zustände unmittelbar vor und nach der Änderung, so erhält man

$$x_1 - kX_1 = x_2 - kX_2.$$

Ändert man nur die Geschwindigkeit, so wird

$$\frac{dx_1}{dt} - k\frac{dX_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} - k\frac{dX_2}{dt}.$$

Einige einfache Anwendungen der letzten Gleichung sind folgende:

a) Wird nach Streckung unter konstanter Geschwindigkeit die Dehnung konstant gehalten $\left(\frac{dX_2}{dt} = 0\right)$, so ist die zeitliche Abnahme der Kraft nach dem Umkehrpunkt

$$\frac{dX_2}{dt} = \left(\frac{dX_1}{dt} - \frac{1}{k}\frac{dx_1}{dt}\right) = \frac{dx_1}{dt}\left(\frac{dX_1}{dx_1} - \frac{1}{k}\right),$$

d. h. proportional der Streckgeschwindigkeit vor dem Umkehrpunkt. Dieses Resultat steht mit Beobachtungen von *H. Bouasse*[145]) im Einklang.

b) Nach genügender Ruhepause kann man setzen $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dX_1}{dt} = 0$, daraus folgt $\frac{dx_2}{dt} = k\frac{dX_2}{dt}$, d. h. nach langer Ruhepause ist jede Be- oder Entlastung, die sehr rasch vor sich geht, rein elastisch.

2. Die Gleichung einer Belastungskurve mit der konstanten Streckgeschwindigkeit c lautet, falls man die charakteristische Funktion Φ

145) *H. Bouasse,* Ann. Toul (2) 7 (1905), p. 383.

entwickelt denkt in der Form $\Phi = \varphi_0 + \varphi_1 J + \varphi_2 J^2 + \cdots$ und sich auf die ersten beiden Glieder beschränkt,

$$x = k \frac{c}{\varphi_1} \log \left(1 + \frac{\varphi_1 X}{c}\right).$$

Die Diskussion der langsamen Wechselbelastung mit konstanter Be- und Entlastungsgeschwindigkeit führt zu Zykeln, die den Hysteresiszykeln so weit ähnlich sind, dass sie mit rein elastischer Deformation beginnen. Sie gehorchen aber dem Umkehrsatz nicht, sondern werden nach dem Bereich der grösseren Deformationen verschoben. Ist die Funktion Φ so beschaffen, dass ihre Ableitung für grosse Werte des Arguments einem endlichen Grenzwert sich nähert, so nähern sich die Zykeln einer Grenzgestalt, wie es der Erfahrung entspricht. Ob die Theorie mit der Wirklichkeit in qualitative Übereinstimmung gebracht werden kann, hängt demnach davon ab, ob die charakteristische Funktion eines so aufgebauten Mediums der gestellten Forderung genügt.

3. Die Diskussion der gedämpften freien Schwingungen führt zu dem Resultat, dass das logarithmische Dekrement der Schwingungsdauer proportional ist. Da dies der Erfahrung widerspricht, schreibt *M. Brillouin* ausser der flüssigen Masse auch den elastischen Körnern eine Viskosität zu. Wird nur die Viskosität der festen Körner berücksichtigt, so wird das logarithmische Dekrement umgekehrt porportional der Periode. Durch Vereinigung der beiden Ansätze erhält man die allgemeine Formel:

$$\lambda = A T + \frac{B}{T},$$

nimmt also zunächst mit T ab, erreicht dann ein Minimum und nimmt schliesslich proportional mit T zu. Die bei vielen Metallen beobachtete Unabhängigkeit des Dekrements von der Schwingungsdauer erklärt *Brillouin* dadurch, dass die betreffenden Messungen in den Bereich des Minimums fallen. Überwiegt die Viskosität des festen oder des flüssigen Bestandteils, so erhält man Abnahme oder Zunahme des Dekrements mit der Periode.

4. Schliesslich wollen wir den Einfluss von freien Schwingungen auf die Wirkung vorangegangener Belastungen berechnen. Erfahrungsgemäss kann man durch Schwingungen einen Körper in den jungfräulichen Zustand zurückführen. Nach der *Brillouin*schen Theorie sind zwei Zustände zur Zeit t_1 und t_2 gleichwertig, wenn $\int_{t_1}^{t_2} X\,dt = 0$ ist. Es sei der Kraftverlauf der gedämpften Schwingungen

$$X = X_0\, e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Die bei einer Serie von freien gedämpften Schwingungen erteilte Impulsmenge beträgt alsdann

$$\int_0^\infty X\,dt = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}X_0$$

oder angenähert

$$\int_0^\infty X\,dt = \frac{X_0}{\beta} = \frac{X_0 T}{2\pi}.$$

Wurde also dem Körper vorher eine Überbelastung durch den Impuls 1 erteilt, so wird diese Wirkung aufgehoben durch eine Serie gedämpfter Schwingungen ausgehend von der entgegengesetzten Anfangsbelastung von der Grösse

$$X_0 = -\frac{2\pi J}{T}.$$

Wird die Anfangsamplitude kleiner gewählt, so müssen entsprechend mehrere Serien ausgeführt werden.

In einer späteren Arbeit versucht *Brillouin*[146]) für eine einfache Anordnung von festen Körnern die charakteristische Funktion Φ zu berechnen. Um den Übelstand, dass bei einer zähen Flüssigkeit bei beliebig kleiner Belastung beliebig grosse Deformationen entstehen können, zu vermeiden, berücksichtigt er die Oberflächenspannung der freien Oberfläche zwischen den Körnern, die dann für die Elastizitätsgrenze massgebend ist.

19. Theorie der Relaxation. Maxwell und Boltzmann. *J. Cl. Maxwells*[147]) Grundvorstellung besteht in der Annahme, dass das Material sich an die bestehende Deformation anpasst, falls diese längere Zeit anhält. Diese Anpassung äussert sich in einer Abnahme der zur Aufrechterhaltung des Deformationszustandes nötigen Spannung. *Maxwell* setzt die Spannungsabnahme proportional der jeweiligen Spannung und umgekehrt proportional einer dem Material charakteristischen Zeitgrösse T, die er „*Relaxationszeit*" nannte. Lautet z. B. die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung nach dem *Hooke*schen Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ (E das Elastizitätsmodul), so würde für die zeitliche Änderung gelten ohne Relaxation

$$\frac{d\sigma}{dt} = E\frac{d\varepsilon}{dt},$$

146) *M. Brillouin*, Ann. phys. chim. (7) 15 (1898), p. 447.

147) *J. Cl. Maxwell,* Ency. Brit. 9. ed. Vol. VII, p. 798 = Scientific Papers 2, Cambridge 1890, p. 26.

mit Berücksichtigung der Relaxation

$$\frac{d\sigma}{dt} = E\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{T}.$$

Als Relaxationsgesetz für die Spannungsabnahme bei konstanter Dehnung ergiebt sich $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{T}}$. Danach kann man die Relaxationszeit als jene Zeit definieren, in der die ursprüngliche Spannung σ_0 auf den Wert $\frac{\sigma_0}{e}$ gesunken ist. Der reziproke Wert $\frac{1}{T}$ kann als Relaxationsgeschwindigkeit bezeichnet werden, da die auf die Spannungseinheit bezogene Abnahme mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{1}{T}$ vor sich geht.

Für konstante Deformationsgeschwindigkeit $\left(\frac{d\varepsilon}{dt} = c\right)$ erhält man die Gleichung

$$\sigma = EcT\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Die verzögerte Deformation bei konstanter Spannung würde nach dem *Maxwell*schen Ansatz mit konstanter Geschwindigkeit erfolgen.

Maxwell[148]) wollte sowohl die Viskosität der Flüssigkeiten als die elastische Nachwirkung der festen Körper aus dem Relaxationsgesetz ableiten. Man erhält tatsächlich ein den zähen Flüssigkeiten ähnliches Verhalten durch Annahme einer sehr kleinen Relaxationszeit[149]), während den festen Körpern je nach dem Grad der Nachwirkung eine Relaxationszeit entsprechen würde, die nach Stunden oder Tagen zählt. Allerdings muss der Ansatz so modifiziert werden, dass die Relaxation sich nicht auf die gesamte Spannung, sondern nur auf den Spannungsüberschuss über den der rein elastischen Deformation entsprechenden Wert bezieht, damit die Abnahme der Spannung bis Null bei konstanter Dehnung und die unbegrenzte Zunahme der Dehnung bei konstanter Spannung vermieden wird.

Von der *Maxwell*schen Vorstellung aus gelangt man zu der Theorie von *L. Boltzmann*[150]), wenn man den momentanen Zustand als Superposition von unendlich vielen Relaxationsvorgängen auffasst. Der Verlauf der elementaren Relaxationen ist dabei bei *Boltzmann* nicht an die *Maxwell*sche Gleichung gebunden, sondern jeder vorher-

---

148) *J. Cl. Maxwell*, Phil. Trans. 157 (1867), p. 49 = Scientific Papers 2, Cambridge 1890, p. 30.

149) Es ist besonders untersucht worden, ob Stoffe, die an der Grenze der Fluidität stehen, den Gleichungen der inneren Reibung von Flüssigkeiten oder den Relaxationsgesetzen gehorchen. Vgl. hierzu *R. Reiger*, Diss. Erlangen 1901, Phys. Zeitschr. 4 (1901), p. 541; Ann. Phys. 19 (1900), p. 985; 31 (1910), p. 51.

150) *L. Boltzmann*, Ann. d. Phys. u. Chemie, Ergänz.-Bd. 7 (1876), p. 624 = Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, Leipzig 1909, p. 616.

gegangenen Deformation wird in ihrer Wirkung auf den momentanen Deformationszustand ein Gewicht zugeschrieben, das eine Funktion der seit der betreffenden Deformation verstrichenen Zeit ist. Voraussetzung der Theorie ist daher die voneinander unabhängige Superposition der Nachwirkungen, d. h. die Nachwirkung zur Zeit t, die von einem Zustand zur Zeit τ herrührt, ist unabhängig von den in der Zwischenzeit herrschenden Zuständen und nur abhängig von der verstrichenen Zeit $\omega = t - \tau$.

Boltzmann modifiziert — um die Nachwirkung zu berücksichtigen — das *Hooke*sche Gesetz durch Hinzufügen von Integralen, die die Vorgeschichte des Materials in der angedeuteten Weise berücksichtigen:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\,\varepsilon_x - \int_0^\infty [\varphi(\omega)\,\theta(t-\omega) + 2\psi(\omega)\,\varepsilon_x(t-\omega)]\,d\omega,$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\,\varepsilon_y - \int_0^\infty [\varphi(\omega)\,\theta(t-\omega) + 2\psi(\omega)\,\varepsilon_y(t-\omega)]\,d\omega,$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\,\varepsilon_z - \int_0^\infty [\varphi(\omega)\,\theta(t-\omega) + 2\psi(\omega)\,\varepsilon_z(t-\omega)]\,d\omega,$$

$$\tau_{xy} = \mu\,\gamma_{xy} - \int_0^\infty \psi(\omega)\,\gamma_{xy}(t-\omega)\,d\omega,$$

$$\tau_{yz} = \mu\,\gamma_{yz} - \int_0^\infty \psi(\omega)\,\gamma_{yz}(t-\omega)\,d\omega,$$

$$\tau_{zx} = \mu\,\gamma_{zx} - \int_0^\infty \psi(\omega)\,\gamma_{zx}(t-\omega)\,d\omega$$

($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ die Deformationsgrössen, θ die Dilatation, λ, μ die Elastizitätskonstanten in der *Lamé*schen Bezeichnung). Die Funktionen φ und ψ sind für das Material charakteristische Funktionen, die man als „*Erinnerungsfunktionen*" bezeichnen kann.[151]) Sie müssen mit wachsendem Argument monoton abnehmen; ihr Verlauf soll durch elementare Versuche bestimmt werden. Einige *Beispiele* wollen wir näher ausführen.

151) *V. Volterra* hat sich vom mathematischen Standpunkt aus mit diesen Integro-Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie beschäftigt: Roma, Acc. dei Lincei Rend. (5) 18, 2 (1904), p. 295, 423, 577; siehe vor allem *V. Volterra,* Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles, Paris 1913; ferner *G. Giorgi,* Roma, Acc. dei Lincei Rend. (5) 21 (1912), p. 683. Die *Boltzmann*schen Gleichungen wurden von *E. Riecke* auf anderem Wege abgeleitet, Ann. d. Phys. u. Chem. 20 (1883), p. 484.

a) *Relaxation.* Ein Draht sei bis $t = 0$ untordiert, von diesem Moment an sei um den Winkel ϑ verdreht, und die Verdrehung wird konstant gehalten. Bei kreisförmigem Querschnitt liefern die Grundgleichungen für den zeitlichen Verlauf des Drehmomentes

$$M_t = \frac{J_p \vartheta}{l} \left\{ \mu - \int_0^\infty \psi(\omega)\, d\omega \right\}$$

(J_p das polare Trägheitsmoment des Drahtquerschnittes, l die Länge). Wird der Anfangswert des Drehmomentes mit M_0 bezeichnet, so erhält man aus

$$\frac{dM_t}{dt} = -\frac{J_p \vartheta}{l} \psi(t),$$

$$\psi(t) = -\mu \frac{\frac{dM_t}{dt}}{M_0},$$

d. h. durch Beobachtung der zeitlichen Abnahme des Drehmoments lässt sich die charakteristische Funktion ψ bestimmen. Der entsprechende Zugversuch liefert φ.

Der Grenzwert der Belastung ist in dem obigen Beispiel

$$D_\infty = D_0 - \frac{J_p}{l} \vartheta \int_0^\pi \psi(\omega)\, d\omega,$$

d. h. $\mu' = \mu - \int_0^\infty \psi(\omega)\, d\omega$ ist der „Endwert des Elastizitätsmoduls“.

b) *Verzögerte Deformation.* Der Draht sei bis zur Zeit $t = 0$ untordiert. Von nun an wirke auf ihn ein konstantes Drehmoment M. Wird die bei plötzlicher Belastung eintretende Deformation mit ϑ_0 bezeichnet, so ist der zeitliche Verlauf der Verdrehung durch folgende Integralgleichung gegeben

$$\int_0^t \vartheta(\omega)\, \psi(t-\omega)\, d\omega = \mu(\vartheta - \vartheta_0)$$

oder mit Anwendung des ersten Mittelwertsatzes

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{1}{\mu} \vartheta(t') \int_0^t \psi(\omega)\, d\omega,$$

wobei t' einen zwischen 0 und t liegenden Zeitpunkt bedeutet. Mit genügender Annäherung kann man setzen

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(1 + \frac{1}{\mu} \int_0^t \psi(\omega)\, d\omega\right).$$

c) Die *Gleichung der freien Schwingungen* wird (θ das Trägheitsmoment des mitschwingenden Gewichtes)

$$\theta \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{J_p}{l}\left(\mu \vartheta - \int_0^t \vartheta(\omega)\, \psi(t-\omega)\, d\omega\right) = 0 .$$

Setzt man als angenäherte Lösung

$$\vartheta = e^{-\alpha t} \sin \nu t ,$$

und entwickelt man die Gleichung nach α, so erhält man

$$\alpha = \frac{2\beta}{\mu} \int_0^t \sin(\nu\omega)\, \psi(\omega)\, d\omega .$$

Die angenäherte Lösung ist also richtig für grosse Werte von t, falls das Integral für $t = \infty$ sich einem endlichen Grenzwert nähert. Also kann man schreiben

$$\alpha = \frac{2\nu}{\mu} \int_0^\infty \sin \nu\omega\, \psi(\omega)\, d\omega$$

und daraus

$$\psi(t) = \frac{4\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\nu)}{\nu} \sin \nu t\, d\nu .$$

Wenn daher das logarithmische Dekrement $\lambda = \alpha T$ als Funktion der Periode T experimentell gegeben ist, so ist wegen $\nu = \frac{2\pi}{T}$

$$\psi(t) = \frac{\mu}{\pi^2} \int_0^\infty \lambda(\nu)\, d\nu \sin(\nu t) .$$

Boltzmann schliesst umgekehrt für einen von ihm angenommenen wahrscheinlichen Verlauf der Funktion $\psi(t)$, dass λ konstant sei. Seine diesbezüglichen Annäherungsrechnungen sind nicht überzeugend und müssten wohl mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen genauer durchgeführt werden.

Man gelangt von den *Boltzmann*schen Gleichungen unmittelbar zu dem *Maxwell*schen Ansatz, wenn man als Erinnerungsfunktion eine Exponentialfunktion wählt. Die Grundgleichung würde dann lauten für Verdrehung mit

$$\psi(t) = \alpha e^{-\frac{t}{T}} ,$$

$$D = \frac{J_p}{l}\left(\mu \vartheta - \alpha e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t \vartheta(\omega)\, e^{\frac{\omega}{T}}\, \psi(\omega)\, d\omega\right)$$

oder nach Differentiation

$$\frac{d}{dt}\left(D - \frac{J_p}{l}\mu\vartheta\right) + \frac{D - \frac{J_p}{l}\mu\vartheta}{T} + \vartheta\frac{J_p}{l}.$$

Beachtet man, dass für plötzliche Belastung

$$D_0 = \frac{J_p}{l}\mu\vartheta,$$

für $t = \infty$ dagegen (bei konstantem ϑ)

$$D_\infty = \frac{J_p}{l}\vartheta(\mu + \alpha T) = \frac{J_p}{l}\vartheta\mu'$$

gilt, so erhält man das allgemeine Relaxationsgesetz in folgender Form:

$$\frac{d(\sigma - E\varepsilon)}{dt} = \frac{\sigma - E'\varepsilon}{T},$$

d. h. die Abnahme des Spannungsüberschusses über den Wert, der einer plötzlichen Belastung entsprechen würde, ist proportional dem Spannungsüberschuss gegenüber demjenigen Wert, der sich bei Relaxation mit konstanter Dehnung einstellen würde.

Den Zusammenhang der *Maxwell*schen und *Boltzmann*schen Ansätze hat insbesondere *E. Wiechert*[152]) gezeigt. Er geht von den *Maxwell*schen Ansätzen aus und sucht den experimentellen Tatsachen dadurch gerecht zu werden, dass er den Gesamtvorgang als Summe von einigen unabhängigen Einzelrelaxationen darstellt, die aber alle für sich dem einfachen Exponentialgesetz gehorchen. Er schreibt insbesondere den einzelnen Deformationsgrössen voneinander unabhängige und verschiedene Relaxationsgeschwindigkeit zu.

II. Standpunkt der Strukturtheorie.

20. Allgemeines. Die grossen Erfolge der molekularen Theorie der Gase und Lösungen, ferner des thermischen Verhaltens fester Körper berechtigen zu der Annahme, dass das Verständnis der Hysteresis und Nachwirkungserscheinungen auch erst auf der Grundlage der molekularen Vorstellungen zu erreichen sein wird. Die molekulare Theorie der Elastizität selbst ist bereits von den klassischen Begründern der Elastizitätslehre entwickelt worden[152a]), sie beschränkte sich jedoch auf die Ableitung des *Hooke*schen Gesetzes, d. h. der Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen bei kleinen Deformationen vollkommen elastischer Körper. Darüber hinaus ist auch seitdem nur wenig geleistet worden. Die molekulare Theorie der Deformation jenseits der

152) *E. Wiechert,* Ann. d. Phys. u. Chem. 50 (1893), p. 546.
152a) Vgl. IV 23 (*Müller-Timpe*).

Elastizitätsgrenze, der Hysteresis und der Nachwirkung ist über die ersten Ansätze kaum hinausgekommen; in dem vorliegenden Referate sollen aber wenigstens die Ziele und Methoden einer solchen Theorie festgelegt werden.

Während für die Kontinuumstheorie der isotrope Körper als das einfachste Gebilde erscheint, geht die Molekulartheorie fester Körper von dem Kristall aus; dies ist dadurch begründet, dass wir über den Aufbau kristallinischer Körper gewisse bestimmte Vorstellungen, die sog. „Raumgittertheorien", besitzen, andererseits auch dadurch, dass die meisten Stoffe, die wir bei unseren Elastizitätsversuchen und Festigkeitsberechnungen als isotrope Körper betrachten, bei näherer Untersuchung als aus zahlreichen, unregelmässig verteilten kristallinischen Bausteinen aufgebaute Konglomerate („kristallinische Haufwerke") erscheinen. Namentlich sind die meisten Metalle und Gesteine als solche *„quasiisotrope"* Körper anzusehen, und ihre Deformationen sind lediglich durch die Möglichkeit der Deformation der einzelnen Kristalle bedingt.

Die *molekulare Theorie der bleibenden Deformation* der Kristalle führt auf die grundlegende, jedoch bisher ungelöste Frage der Stabilität der Raumgitteranordnungen. Die Hauptschwierigkeit besteht in unserer völligen Unkenntnis des Kraftgesetzes zwischen den molekularen Bausteinen. So müssen wir zunächst auf eine Theorie dieser Erscheinungen verzichten und uns mit der Zusammenstellung der verschiedenen Möglichkeiten der bleibenden Deformation begnügen, die hauptsächlich von den Mineralogen beobachtet wurden (Nr. **21**). Diese sind für die Klärung der physikalischen Grundlagen der Festigkeitslehre nicht ohne Einfluss geblieben, da man erst durch Übertragung der an Einzelkristallen gewonnenen Beobachtungen auf die quasiisotropen Konglomerate die Vorgänge in diesen letzteren verstehen konnte. Heute liegt ein sehr reichhaltiges Beobachtungsmaterial vor über die bei Metallen und Gesteinen durch bleibende Formänderungen hervorgerufenen Gefügeänderungen, und unsere Vorstellungen über Plastizität und Sprödigkeit, Fliessen und Bruch wurden durch diese wesentlich gefördert (Nr. **22**). Durch Heranziehung der Gesetze des thermodynamischen Gleichgewichts ist ferner die früher nur empirisch bekannte Abhängigkeit der Festigkeitseigenschaften der Metalle und der Legierungen von der Wärmebehandlung in den meisten Fällen geklärt worden (Nr. **23**).

Die *molekulare Theorie der Hysteresis und der elastischen Nachwirkung* stösst zunächst offenbar auf dieselben Schwierigkeiten wie die Theorie der bleibenden Deformation. Ein einfaches Modell für die Hysteresis in homogenen Kristallen ist von *J. A. Ewing*[153]) aufgestellt

worden; die Nachwirkung in Kristallen hängt offenbar mit dem Problem der Wärmebewegung zusammen, namentlich lässt sich vermuten, dass zwischen Nachwirkung (Viskosität) und Wärmeleitung ein ähnlicher Zusammenhang besteht, wie bei Gasen von der kinetischen Theorie nachgewiesen wurde. Es scheint aber, dass die Nachwirkungserscheinungen, wie sie bei quasiisotropen Medien beobachtet werden, nicht so sehr von den Vorgängen in den Kristallen als von denen an den Trennungsflächen derselben bedingt sind. In dieser Richtung bilden die Ansätze von *L. Prandtl* den Kern einer künftig näher zu entwickelnden Theorie. Er zeigt namentlich an einfachen Modellen, dass bei relativer Verschiebung von raumgitterartig aufgebauten Molekulargruppen notwendigerweise Hysteresis und mit Berücksichtigung der thermischen Bewegung Nachwirkung sich zeigen muss. Die *Prandtl*schen Ansätze sind in Nr. **24** dargestellt und bilden den Schluss dieses Referates.

21. Bleibende Deformationen in Kristallen. Es ist von mehreren Mineralogen[154]) nachgewiesen worden, dass Kristalle endliche bleibende Formänderungen erfahren können, ohne dass der Zusammenhang der Teile gelockert wird. Das Charakteristische an diesen Deformationen besteht darin, dass die bleibende Deformation nicht stetig vor sich geht, sondern in einem „Umschnappen in eine andere Gleichgewichtskonfiguration" besteht. Man unterscheidet insbesondere zwei Arten der Formänderung, je nachdem die durch die Deformation in Mitleidenschaft gezogenen Lamellen ihre optische Orientierung geändert haben oder nicht. Die erste Art der Formänderung ist bei Kristallsystemen möglich, bei denen zwei spiegelbildlich symmetrische Kristallformen möglich sind („Zwillingslage"), man bezeichnet sie als „*einfache Schiebung*". Man kann die Erscheinung z. B. in ziemlich grossen Dimensionen an Kalkspatrhomboedern beobachten[155]). Die zweite Art der Formänderung wird „*Translation*" genannt; man kann sie in der Weise sich vorstellen, dass die Molekülreihen aneinander um eine oder mehrere Stellen vorbeigeschoben werden; im Innern des Kristalls hat die Anordnung der Moleküle dadurch gar keine Änderung erfahren, nur die individuellen Moleküle haben ihre Plätze gewechselt.

Über die mechanischen Bedingungen, namentlich über den Kraftbedarf der Schiebung und Translation, ist wenig bekannt. *W. Voigt*[156])

---

153) *J. A. Ewing,* British Assoc. Rep. 1906, p. 657.

154) Vgl. z. B. Fortschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie 2 (1911), auch den Art. V 7 über Kristallographie (C: Prüfung der Strukturtheorien, *O. Mügge*).

155) *E. Reusch,* Ann. d. Phys. u. Chem. 132 (1867), p. 441; 147 (1872), p. 307.

156) *W. Voigt,* Ann. Phys. u. Chem. 67 (1899), p. 201.

hat die zur einfachen Schiebung von Kalkspatlamellen erforderliche Schubspannung, die sozusagen die „Elastizitätsgrenze" des Kristalls darstellt, experimentell untersucht. Theoretische Betrachtungen, die sich auf die bleibende Änderung der Kristalle beziehen oder bezogen werden können, liegen auch nur sehr vereinzelt vor. *Lord Kelvin*[157]) giebt eine Betrachtung über die möglichen Gleichgewichtslagen eines eindimensionalen Modells unter Annahme eines periodischen Kraftgesetzes, wie es von *R. J. Boscovich* zuerst angenommen wurde. Näher zu unserem Problem steht eine Betrachtung von *J. A. Ewing*[158]), die er im Anschluss an seine experimentellen Forschungen über die Formänderung der Metalle anstellt. Nach seinem Modell sollen die Moleküle Kugelgestalt besitzen, aber an den Durchstosspunkten der drei Axen eines durch den Kugelmittelpunkt gehenden rechtwinkligen Koordinatensystems Polaritäten aufweisen, derart, dass gegenüberliegende Pole entgegengesetzt sind. Unter dem Einfluss der durch die polaren Wirkungen hervorgerufenen Drehmomente lagern sich die Moleküle bei der Kristallisation regelmässig in Reihen an, so dass jeder der sechs Pole des Moleküls an ungleichnamige Pole seiner Nachbarmoleküle angrenzt. Diese Anordnung ist die stabilste. Dreht man zwei Nachbarmoleküle im entgegengesetzten Sinn um 90^0, so ist die Anordnung weniger stabil, indem von den sechs Polen jeder der beiden Moleküle nur noch fünf ungleichnamige gegenüberstehen, während der sechste an einen gleichnamigen angrenzt. Bei genügend starken Erschütterungen wird diese Gleichgewichtslage in die ursprüngliche stabile übergehen. Eine Deformation des Körpers entspricht der gegenseitigen Verrückung von Molekülreihen. Ist die Deformation nicht zu gross, so werden infolge der gegenseitigen Verschiebung der Moleküle Kräfte geweckt, die die Moleküle in ihre ursprüngliche Lage und Orientierung zurückzutreiben suchen. Infolgedessen werden beim Nachlassen der deformierenden Belastung des Körpers die Moleküle wieder ihre alte Lage einnehmen, d. h. die Deformation war rein elastisch. Durch genügend starke Belastung wird dagegen der Zusammenhang der Moleküle zu beiden Seiten der Gleitfläche gelockert, wobei eine Drehung der Moleküle in eine andere Gleichgewichtslage erfolgen kann. An Hand dieses Modells ist das Fliessen sowie die Ermüdungs- und Erholungserscheinungen zu erklären.

An dieser Stelle sind auch die *flüssigen Kristalle*[159]) zu erwähnen,

---

157) *Lord Kelvin,* Baltimore Lectures, London 1904, p. 643; deutsch von *B. Weinstein,* u. d. T. Vorlesungen über Molekulardynamik, Leipzig 1909, p. 538.

158) *J. A. Ewing,* British Assoc. Report 1906, p. 657; Phil. Mag. (6) 12 (1906), p. 254.

die von den festen Kristallen sich offenbar dadurch unterscheiden, dass ihre Elastizitätsgrenze ausserordentlich niedrig liegt, so dass äusserst geringe Kräfte genügen, um in dem Raumgitter Verschiebungen oder Umlagerungen hervorzurufen. Dementsprechend wird die Gestalt des Kristalls wie bei amorphen Flüssigkeiten lediglich durch die Oberflächenspannung bestimmt. Die mechanischen Eigenschaften der flüssigen Kristalle sind noch weniger untersucht; für das Problem der Kohäsionskräfte und der stabilen Molekularanordnungen wäre dies aber von hervorragender Wichtigkeit.

22. Bleibende Deformation in kristallinischen Haufwerken. Der Ausgangspunkt zur Analyse der bleibenden Formänderungen in kristallinischen Konglomeraten (Haufwerken) bildet die Unterscheidung zwischen sog. *„banalen" und „kristallinischen" Formänderungen.*[160]) Als banale Formänderungen bezeichnet man Deformationen, bei denen die Körner gegeneinander verschoben oder verdreht werden; diese haben mit der kristallinischen Orientierung der Körner nichts zu tun, sondern hängen lediglich vom Spannungszustand ab; die kristallinischen Deformationen setzen sich dagegen aus den in Nr. **21** behandelten molekularen Umlagerungen zusammen. Die bleibende Deformation eines quasiisotropen Körpers ist im allgemeinen ein Gemisch dieser beiden Deformationstypen, doch ist die eine oder andere vorwiegend bei verschiedenen Stoffen und auch in verschiedenen Stadien der Deformation desselben Stoffes. Die äusseren Merkmale der beiden Deformationstypen sind die Fliess- und Gleitlinien, die wir nach der Deformation an der Oberfläche der Probestücke wahrnehmen, oft ohne jede weitere Präparation, oft aber nur, nachdem sie durch „Ätzung" deutlich gemacht werden. Jede Zeichnung, Liniensystem oder Fältung, deren Orientierung nur von dem Spannungszustand abhängt, ist ein Zeichen der banalen Deformation, dagegen ist die Richtung der Liniensysteme, die durch kristallinische Deformation entstehen, lediglich durch die Orientierung der Einzelkristalle bedingt. Man nennt die Linien erster Art *„Fliessfiguren"* (auch *Lüders*sche oder *Hartmann*sche Linien), während die Linien zweiter Art, die im Gegensatz zu den zumeist mit freiem Auge wahrnehmbaren Fliessfiguren erst durch die mikroskopische Untersuchung polierter und zumeist geätzter Flächen hervortreten, als *„Gleitlinien"* (*slipbands* nach *J. A. Ewing*[161])) bezeichnet werden.

---

159) Vgl. etwa *O. Lehmann,* Flüssige Kristalle sowie Plastizität von Kristallen, Leipzig 1904 und *O. Lehmann,* Die neue Welt der flüssigen Kristalle, Leipzig 1911.

160) Vgl. etwa *W. v. Moellendorff* und *J. Czochralski,* Z. d. Ver. d. Ing. 57 (1913), p. 931.

Die *banale Deformation* (auch „intergranulare" Deformation genannt) von kristallinischen Haufwerken besteht in relativer Verschiebung, Drehen und Rollen der kristallinischen Körner („Kristallite") und tritt zunächst bei den Stoffen auf, die wir als „spröde" bezeichnen. Die Sprödigkeit besteht eben darin, dass der Widerstand gegen kristallinische oder intragranulare Deformation (bleibende Änderung innerhalb der Kristallkörner) grösser ist als gegen relative Lagenänderungen der ganzen Kristalle.[162]) Durch die banale Deformation wird der Zusammenhang der Kristallite wenigstens gelockert, so dass der Kraftbedarf zur weiteren Deformation sinkt; weitere Fortsetzung der banalen Deformation führt dann zum Bruch. Ausser spröden Stoffen tritt vornehmlich banale Deformation auf bei sämtlichen zähen Stoffen, nachdem das gleichmässige Fliessen, welches kristallinischer Natur ist, aufgehört hat. Diese banale Deformation führt allmählich zur Zerstörung der ursprünglichen Struktur und zum Bruch. Im Gegensatz zu der banalen Formänderung spröder Körper, die intragranular gar keine oder äusserst geringe Deformationen erleiden, fordert die banale Formänderung gereckter, zäher Stoffe wachsenden Kraftaufwand. Bei einigen Stoffen, insbesondere bei Eisen-Kohlenlegierungen, ist noch ein Stadium banaler Deformation vorhanden zwischen der elastischen Deformation und dem kristallinischen Fliessen. Beim Festigkeitsversuch äussert sich dies in der Erscheinung der oberen und unteren Fliessgrenze. Man nimmt an, dass diese banale Formänderung, die nach gewisser Formänderung wieder aufhört, nur in Haufwerken auftritt, die aus verschiedenen Arten von Kristalliten bestehen. Beim Eisen wird angenommen, dass der sog. Perlit (eutektisches Gemisch von Eisenkarbid und α-Eisen) ein festes Gerippe bildet, das die kristallinische Deformation der weicheren Ferritkristalle (α-Eisen) hindert. An der oberen Fliessgrenze bricht das Gerippe durch banale Deformation der Körner zusammen, und alsdann erfolgt das Fliessen durch kristallinische Formänderung der Ferritkörner.

Die *kristallinische Deformation*[163]) von quasiisotropen Medien besteht der Hauptsache nach in Translationen und einfachen Schiebungen, die in den einzelnen Kristalliten auftreten. Ausserdem sind

161) *J. A. Ewing* und *W. Rosenhain*, Phil. Trans. 193 (1900), p. 353 u. 195 (1901), p. 279; *W. Rosenhain*, Iron and Steel Institute, Journal 65 (1904), p. 335 u. 70 (1906), p. 189; vgl. auch *E. Heyn*, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 41 (1900), p. 433; *O. Mügge*, Neues Jahrbuch der Mineralogie 1 (1898), p. 71 u. 2 (1899), p. 55.

162) Vgl. *Th. v. Kármán*, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 118 (1912).

163) Vgl. *A. Martens-E. Heyn*, Materialienkunde für den Maschinenbau, Bd. IIA, Berlin 1912, p. 219 ff.

zwar auch andere plastische Deformationen der Kristallite (Biegung, Faltung) zu beobachten, doch sind die beiden ersten Arten der molekularen Umlagerung vorwiegend. Als äusseres Zeichen der Umlagerung bemerkt man an polierten Flächen der Metalle die sog. „Gleitlinien" (slipbands), die wahrscheinlich dadurch zustande kommen, dass die Kanten der geschobenen Lamellen sich aus der glatten Oberfläche hervorheben. Die Orientierung der Gleitlinien ist durch die Orientierung der Kristallite bestimmt, es hängt jedoch vom Spannungszustand ab, in welcher Reihenfolge die Kristallite zur Gleitlinienbildung gelangen.[164]) *G. Tammann* und *O. Faust*[165]) fanden, dass beim einfachen Druckversuch zwischen dem Winkel α, welchen die Gleitflächen mit der Druckrichtung bilden, und derjenigen Druckkraft P, bei der die betreffenden Gleitflächen auftreten, bei demselben Probekörper die Beziehung $P \sin \alpha = \text{const.}$ besteht. In der Wirklichkeit scheint der Vorgang ziemlich verwickelter Art zu sein. Die Möglichkeit der Gleitung hängt von zwei Faktoren ab: von dem Kraftbedarf der Translation bzw. Schiebung in dem isolierten Einzelkristall und von dem Widerstand, den die benachbarten, regellos gelagerten Kristallite der Deformation entgegensetzen. Der zweite Betrag ist wesentlich beeinflusst durch die Korngrösse der einzelnen Kristalle, und zwar wirkt geringe Korngrösse hindernd auf die Gleitlinienbildung und erhöht somit die Elastizitätsgrenze.

Die Abhängigkeit der Gleitlinienbildung von der Grösse und Richtung der Kraft ist offenbar der wichtigste Punkt der Mechanik der kristallinischen Konglomerate und kann allein zur theoretischen Ableitung der Formänderungsgesetze solcher quasiisotropen Stoffe führen. Bisher ist jedoch durch diese Betrachtungen nur eine qualitative Erklärung der Verfestigung von Metallen gewonnen, indem man leicht einsieht, dass der Kraftbedarf zur Deformation zunehmen muss, sobald die für die Gleitlinienbildung mehr und mehr ungünstig orientierten Kristallite herangezogen werden und bei Entlastung und Wiederbelastung die weitere Deformation aus demselben Grunde nur nach Überschreitung der bereits erreichten Laststufe beginnen kann. Auch die verschiedenen Arten der Elastität und der Festigkeitsgrenzen gewinnen eine schärfere Bedeutung. Die *„Elastizitätsgrenze"*[166]) er-

---

164) Vgl. *Th. v. Kármán,* Fussnote 162.

165) *G. Tammann* u. *O. Faust,* Zeitschr. f. phys. Chemie 75 (1910), p. 709; auch *G. Tammann,* Zeitschr. f. Elektrochemie 18 (1912), p. 584 und Göttinger Nachr. 1911, p. 181; vgl. auch *G. Tammann,* Lehrbuch der Metallographie, Leipzig 1914.

166) *W. v. Moellendorff* und *J. Czochralski* unterscheiden eine „untere Elastizitätsgrenze" als Beginn der kristallinischen Drehung (entsprechende Linien-

scheint als der Beginn der kristallinischen Deformation, gekennzeichnet durch das erste Auftreten der Gleitlinien, die „*Festigkeitsgrenze*" (maximale Last) ist als Grenze der gleichmässigen Dehnung und als Grenze zwischen der kristallinischen und der darauffolgenden banalen Deformation anzusehen. Die ausgeprägte „*Fliessgrenze*" ist schliesslich ein Zeichen einer vorübergehenden banalen Deformation kurz nach Einsetzen der kristallinischen Gleitlinien.

Es ist ein wichtiges Problem, das aber bisher auch nicht klargestellt worden ist, weshalb gewisse kristallinische Haufwerke vornehmlich banale Deformationen erleiden und sich spröde verhalten, während bei anderen ähnlich gebauten Konglomeraten der Zusammenhang der Kristallite stärker ist als der Widerstand gegen intragranulare (kristallinische) Formänderung. Von *F. Kick*[167]), ferner von *F. D. Adams* und *J. T. Nicholson*[168]) ist festgestellt worden, dass man Gesteine durch hohen hydrostatischen Druck „plastizisieren" kann; wie *Th. v. Kármán*[169]) zeigte, liegt dies daran, dass man durch Zusammenpressen der Kristallite die banale Formänderung hindern und die kristallinische erzwingen kann. Es zeigte sich, dass z. B. im Marmor die plastische Formänderung und Verfestigung genau in derselben Weise vor sich geht wie in Metallen. Weshalb die plastischen Metalle bei atmosphärischem Druck bereits kristallinische Formänderung erleiden, ist nicht klargestellt. Nach *W. Rosenhain*[170]) liegt dies daran, dass die Kristallite der Metalle dentritisch ineinander verwachsen sind. *W. v. Moellendorff* und *J. Czochralski*[171]) nehmen eine „Verfestigung der Grenzschichten" an, die die kristallinische Formänderung einleitet.

Ausser der banalen und kristallinischen Deformation der Kristallkörner ist noch eine Änderung des Gefüges als Folge der bleibenden Deformation beobachtet worden: die „*Unterteilung der Kristallite*". Manche Forscher glaubten überhaupt darin den Grund der Verfestigung gefunden zu haben.[172]) Nach anderen Beobachtungen bleiben

---

bildung: „Kehrlinien") und die „Streckgrenze" als Beginn der kristallinischen Gleichung (entsprechende Linien: „Gleitlinien"). *G. Tammanns* (s. Fussnote 165) obere und untere Elastizitätsgrenze entsprechen den Grenzen, die wir schlechthin als Elastizitäts- und Festigkeitsgrenzen bezeichnen.

167) *F. Kick,* Vorlesungen über mechanische Technologie, Wien 1908; Zeitschrift d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 43 (1891) p. 60; Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 36 (1892), p. 278 u. 919.

168) *F. D. Adams* und *J. T. Nicholson,* Phil. Trans. 195 (1901), p. 363.

169) Vgl. Fussnote 162.

170) Vgl. Fussnote 161.

171) Vgl. Fussnote 160.

172) Vgl. *G. Tammann* und *O. Faust,* Fussnote 165.

während der Verfestigungsperiode (d. h. während der kristallinischen Deformation) die Kornverbände durchaus bestehen, und die Unterteilung (Spaltung) der Kristalle tritt entweder nur nach sehr erheblichen, banalen Deformationen auf, nachdem die Raumgitterstruktur schon stark gestört wurde, oder als Folge von Erwärmung. Die Verfestigung wird nach diesen Forschungen durch Unterteilung der kristallinisch deformierten Körner vielmehr rückgängig gemacht. *E. Heyn*[173]) zeigte durch mikroskopische Untersuchung des Gefüges gezogener Kupfer- und Eisendrähte während der bleibenden Deformation (Kaltreckung) und des darauffolgenden Ausglühens, dass bei der Kaltreckung die „gleichaxigen" (nach allen Richtungen gleichmässig ausgedehnten) Kristallite nach der Kraftrichtung ausgezogen werden, im grossen und ganzen aber ihre Verbände aufrechterhalten. Das Ausglühen verwandelt die so ausgezogenen Körner in kleinere, gleichaxige Individuen, womit gleichzeitig die Verfestigung (Erhöhung der Elastizitätsgrenze) rückgängig gemacht wird. Erst bei weiterer Erhitzung beginnen die Körner zu wachsen und erreichen schliesslich ihre ursprüngliche durchschnittliche Grösse.

23. Eingreifen der Thermodynamik. Da die mechanischen Eigenschaften eines kristallinischen Konglomerats vom Gefüge, namentlich von Korngrösse und Korngestalt abhängig sind, so wird es verständlich, dass die verschiedene Wärmebehandlung bei derselben chemischen Zusammensetzung Stoffe von sehr verschiedenen Festigkeitseigenschaften hervorbringen kann. Grundlegend ist dabei die Wahrnehmung, dass feste Körper, insbesondere Legierungen, bei derselben Temperatur und bei demselben Druck in verschiedenen Gleichgewichtszuständen beständig sein können. Diese Tatsache findet ihre Erklärung in der Beharrlichkeit der sog. „*metastabilen Gleichgewichtszustände*", d. h. Zustände, die zwar bei den gegebenen Werten von Temperatur und Druck nicht die stabilsten Konfigurationen darstellen, aber gegen kleine Störungen stabil sind. Solche metastabilen Gleichgewichtszustände sind z. B. auch bei Flüssigkeiten möglich (z. B. überhitzte Flüssigkeit), doch gehen sie im allgemeinen bereits bei mässigen Störungen in die stabilste Konfiguration über. Dagegen ist der Übergang bei festen Phasen und bei nicht allzu hohen Temperaturen so stark gehemmt, dass die metastabilen Gleichgewichte praktisch genau so beständig sind als die stabilsten. Dies ermöglicht es, Zustände, die bei hohen Temperaturen stabil sind, durch rasche Abkühlung auch bei niedrigen Temperaturen

173) *A. Martens-E. Heyn*, Materialkunde für den Maschinenbau, Bd. II A, Berlin 1912, p. 225 ff.

aufrechtzuerhalten, da bei der raschen Abkühlung die Umwandlung sozusagen unterschlagen wird, im Bereiche der niedrigen Temperaturen aber der Übergang dermassen gehemmt ist, dass die Umwandlungsgeschwindigkeit praktisch als Null angesehen werden kann.

Das wichtigste Beispiel in diesem Vorgang bildet das *„Härten" und „Anlassen" des Eisens*; ein Verfahren, das seit uralter Zeit bekannt, aber erst durch Untersuchung der thermischen Gleichgewichtszustände und Umwandlungen der Eisen-Kohlenstofflegierungen erklärt wurde.

Die Wärmebehandlung hat ausser der Regelung des „Phasengleichgewichts" einen wesentlichen Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften des Konglomerats durch Regelung der „Korngrösse" (durchschnittliche Grösse der Kristallite). Die Korngrösse wird zunächst durch die Zeitdauer der primären Kristallbildung bei der Erstarrung (bzw. Umwandlung) bestimmt, kann aber weiterhin durch Erhitzung modifiziert werden, da Temperaturerhöhung im allgemeinen ein Zusammenwachsen der Kristalle zur Folge hat. Die Grösse der bei der Erstarrung entstehenden Kristalle hängt lediglich von der Geschwindigkeit ab, mit welcher bei der Abkühlung die Temperaturzone der Erstarrung durchschritten wird, und zwar werden die Körner desto grösser, je langsamer die Abkühlung vor sich geht. Für die Vergrösserung der Korngrösse durch neuerliche Erhitzung im erstarrten Zustande besteht im allgemeinen die Regel, dass das Wachstum der Kristalle bei konstanter Temperatur mit abnehmender Geschwindigkeit vor sich geht, so dass die Korngrösse einer Grenze zustrebt, die von der Temperatur abhängt und bei gleicher Anfangsgrösse mit dieser zunimmt. Man kann also in derselben Weise wie vom Phasengleichgewicht auch von einem von der Temperatur abhängigen *„Gefügegleichgewicht"* (Gleichgewicht der Korngrösse) sprechen. Das Gefügegleichgewicht wird aber im allgemeinen ganz langsam angenähert, bei niedrigen Temperaturen ist die Geschwindigkeit der Grössenänderung der Kristalle bei festen Metallen praktisch Null.

Man kann noch weiter gehen und neben dem Gleichgewicht der Korngrösse ein Streben nach dem „Gleichgewicht der Korngrösse" feststellen. Es wurde bereits erwähnt, dass deformierte Kristallite, deren eine Dimension stark vergrössert wurde, bei Erhitzung in gleichaxige sich zurückwandeln. Dies erinnert offenbar an die Tendenz der Flüssigkeiten, die Gestalt von minimaler Oberflächenenergie anzunehmen. In der Tat stehen die Betrachtungen über Gefügegleichgewicht (Gleichgewicht der Korngrösse und Korngestalt) in enger Beziehung mit der Frage nach der Abhängigkeit des Kristallwachstums von Oberflächenenergie und Oberflächenspannung, wie sie z. B. von *P. Curie* angeregt

wurde. Doch würde dies im Rahmen des vorliegenden Artikels zu weit führen.

24. Hysteresis und Nachwirkung in Kristallen und kristallinischen Haufwerken. Die Hauptschwierigkeit einer molekularen Theorie der Hysteresis und der Nachwirkung (Viskosität) besteht darin, einzusehen, wie man aus rein konservativen Kohäsionskräften eine scheinbare innere Reibung ableiten kann. Auch wenn man die Hysteresis dem Bereiche bleibender Formänderungen zuweist und sie durch Superposition zahlreicher Übergänge zwischen verschiedenen stabilen Konfigurationen erklären will, so bleibt dennoch stets die Schwierigkeit bestehen, wie die Nachwirkung oder die Viskosität, die bereits bei ganz geringen elastischen Deformationen merklich auftritt, erklärt werden soll. Nach unseren modernen Anschauungen liegt der Kernpunkt darin, dass bei jeder elastischen Deformation ein Anteil der fortschreitenden elastischen Wellen in Wärmeschwingungen zerstreut wird. Wie dies bei homogenen Kristallen vor sich geht, hängt mit der Art der Wärmeleitung zusammen und ist bisher nicht näher untersucht worden. Frühere Autoren[174]) wollten die Schwierigkeit dadurch umgehen, dass sie die Nachwirkung als Drehung der Moleküle gedeutet haben; während die elastischen Kräfte unmittelbar wirken, sollte auf die Verschiebung der Moleküle die den neuen Lagen entsprechende Orientierung allmählich erfolgen. Die Rückwirkung der allmählich erfolgenden Drehungen sollte die Relaxation und nachträgliche Deformation erklären. Eine wahre Theorie der Nachwirkung in Kristallen kann indessen nur in Verbindung mit der Wärmeleitung gewonnen werden.

Handelt es sich um kristallinische Haufwerke, so liegt die Sache etwas anders. Kristallinische Haufwerke zeigen im allgemeinen ungemein stärkere Nachwirkung als die idiomorphen Einzelkristalle. Dies deutet darauf hin, dass die Vorgänge, die wir als Hysteresis und Nachwirkung deuten, sich hauptsächlich an den Grenzflächen der Kristallite abspielen. In der Tat zeigt es sich, dass bei relativer Verschiebung verschieden orientierter Kristallite scheinbare Reibungskräfte entstehen müssen. Man kann die Verhältnisse nach *L. Prandtl*[175]) an einem ein-

---

174) *F. Braun,* Ann. d. Phys. u. Chem. 159 (1876), p. 337; *E. Warburg,* Ann. d. Phys. u. Chem. 4 (1878), p. 233. — Die Idee der Drehung als Ursache der Nachwirkung ist übrigens noch älter und ist bereits von *R. Clausius,* Ann. d. Phys. u. Chem. 76 (1849), p. 46, später von *F. Kohlrausch, W. Weber* und *G. Wiedemann*, Ann. d. Phys. u. Chem. 6 (1879), p. 505 erwähnt.

175) Da die *Prandtl*sche Theorie bisher unveröffentlicht ist, wollen wir sie auf Grund von Mitteilungen des Verfassers etwas ausführlicher darstellen. Eine Veröffentlichung *Prandtl*s in den Gött. Nachr. ist in Aussicht genommen.

fachen Modell untersuchen: an zwei Molekülreihen mit verschiedener Teilung, die durch quasielastische Kräfte gehalten werden, während die beiden Reihen durch äussere Kraft aneinander vorbeigeschoben werden. Es ist ein schöner Erfolg dieser Betrachtung, dass trotz der weitgehenden Vereinfachung des Modells nicht nur die Grundgesetze der Hysteresis verständlich gemacht werden, sondern durch Berücksichtigung der Wärmebewegung der Moleküle Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung abgeleitet werden können, die den empirischen Gesetzen der Relaxation und verzögerter Deformation ähnlich gebaut sind.

Wir denken uns eine Reihe von Molekülen in gleichen Abständen auf einer geraden Linie angeordnet; wir nehmen an, dass sie durch eine dem Ausschlag proportionale Kraft an ihre Gleichgewichtslagen gebunden sind. Dabei sollen nur Ausschläge in der Geraden zugelassen werden. Die Wirkung der zweiten Molekülreihe ersetzen wir durch ein periodisches Kraftfeld, welches z. B. der Einfachheit halber sinusförmig angenommen werden soll. Unser Problem besteht zunächst darin, die Kraft zu berechnen, die zur Verschiebung des Kraftfeldes bzw. seines Trägers gegen die erste Molekülreihe erforderlich ist.

Wir wollen zuerst beachten, dass die äquidistante Anordnung der Moleküle durch das Kraftfeld (dessen Wellenlänge von dem Molekularabstand verschieden angenommen werden soll) geändert wird. Offenbar nimmt jedes Molekül eine Lage ein, in welcher die quasielastische Kraft und die äussere Kraft gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

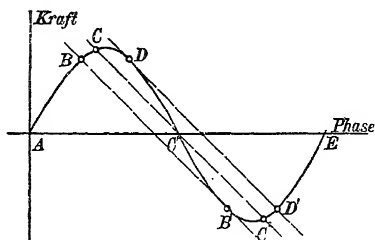


Fig. 6.

In Fig. 6 ist die periodische Kraft durch eine Sinuslinie, die quasielastische Kraft durch gerade Linien dargestellt. Die ursprüngliche Lage der Moleküle ist durch den Schnittpunkt der schiefen Geraden mit der Abszissenaxe gegeben. Die Schnittpunkte mit der Sinuslinie liefern die abgeänderten Gleichgewichtslagen. Man sieht, dass im Bereich BD jedem Molekül drei Gleichgewichtslagen zukommen, von denen zwei z. B. C, C' stabil sind, die dritte C'' labil ist. Aus Fig. 6 werden nun die Figuren 7 und 8 dadurch gewonnen, dass wir als Abszisse und als Parameter für die individuellen Moleküle die Phase des Kraftgesetzes, in die die ursprüngliche Gleichgewichtslage des betr. Moleküls fällt, wählen, als Ordinaten dagegen diejenigen Werte der periodischen Kraft auftragen, die dem neuen Gleichgewichtszustand entsprechen. Alsdann stellen die Kurventeile AD und $B'E$ die stabilen Gleichgewichtslagen

dar; doch ist z. B. BC offenbar stabiler als $B'C'$. Der jungfräuliche Zustand soll dadurch gekennzeichnet werden, dass die Moleküle in den stabilsten Lagen beharren, d. h. wir nehmen an, dass die Kurventeile AC und $C'E$ gleichmässig „mit Molekülen belegt sind". Die Gesamtkraft, die auf das System wirkt, ist dabei wegen der Gleichheit der schraffierten Flächen (in Fig. 7) Null.

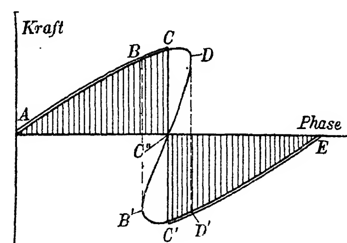


Fig. 7.

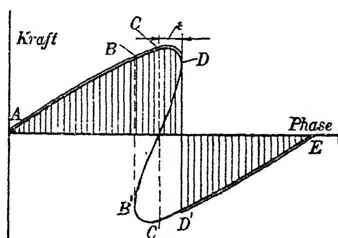


Fig. 8.

Wird aber das periodische Kraftfeld gegen die Molekülreihe um die Strecke ε verschoben (Fig. 8), so entsteht zunächst eine elastische Deformation, wobei die erforderliche Kraft durch die Differenz der schraffierten Flächen gegeben wird. Die Elastizitätsgrenze wird erreicht, sobald ein Molekül an den Punkt D ankommt. Alsdann schnappen die Moleküle in die andere Gleichgewichtslage D' um; die Weiterdehnung erfolgt unter konstanter Last. Wird der Sinn der Verschiebung umgekehrt, so ist die Deformation zunächst elastisch, man erhält eine Entlastungskurve ähnlich der jungfräulichen Belastungskurve, so lange die Elastizitätsgrenze in dem entgegengesetzten Sinne bei B' nicht überschritten wird. Man erhält also ein Spannungs-Dehnungsgesetz, das dem Hysteresiszykel im Prinzip ähnlich gestaltet ist, nur dass die bleibende Deformation unter konstanter Last vor sich geht. Der wahre Hysteresiszykel kann aber durch Superposition solcher Elementarzykel gewonnen werden. Man kann leicht einsehen, dass bei einem solchen System die in Nr. **11** dargelegten Regeln erfüllt sind.

Zur Erklärung der Nachwirkung und der zeitlichen Gesetze des Fliessens berücksichtigt *Prandtl* die Wärmebewegung durch die Annahme, dass die Moleküle um ihre Gleichgewichtslagen mit wechselnder Amplitude schwingen, wobei ihre Energien nach dem *Maxwell*schen Wahrscheinlichkeitsgesetz verteilt sind. Ist die Amplitude gross, so kann das Molekül auch ohne Einwirkung äusserer Kräfte in eine andere Gleichgewichtslage übergehen.

Es sei die mittlere Schwingungsenergie U_m, die Arbeit, die geleistet werden muss, um das betreffende Molekül in die kritische Lage D zu bringen, sei U_1. Alsdann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die

Schwingungsenergie des Moleküls U_1 überschreitet, gleich

$$\int_{U_1}^{\infty} e^{-\frac{U}{U_m}} \frac{dU}{U_m} = e^{-\frac{U_1}{U_m}}.$$

Wir wählen wieder dieselben Parameter und nennen die Belegung (als Funktion der Phase x) n. Wir können dann die Anzahl derjenigen Moleküle, die eine Gleichgewichtslage x in der Zeiteinheit verlassen, setzen

$$\frac{dn}{dt} = -kne^{-\frac{U_1}{U_m}},$$

wo k einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Man kann nun leicht die Gleichungen für einige charakteristische Fälle angeben:

α) *Relaxation:* Die Dehnung ist konstant, folglich ist U_1 unabhängig von der Zeit. Die Integration über x liefert das Gesetz

$$n = n_0 e^{-kte^{-\frac{U_1}{U_m}}},$$

woraus man bei bestimmtem Kraftgesetz die Abnahme der Kraft bei konstanter Dehnung berechnen kann.

β) *Fliessen mit konstanter Geschwindigkeit:* In diesem Falle ist U_1 abhängig von der Zeit; ist die Fliessgeschwindigkeit gleich c, so ist $U_1 = U_1(x + \beta t)$ zu setzen. Bei plausiblen Annahmen über das Kraftgesetz gelangt man indessen zu Formeln, die das logarithmische Fliessen gut annähern.

Schlussbemerkung: Die Ausführungen der Nrn. **15—19** liessen erkennen, wie unvollkommen das Verhalten der sog. festen Körper vom Standpunkt der *gewöhnlichen Mechanik der Kontinua* geschildert und verstanden wird. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn als Grundlage die *Ansätze allgemeinster Natur* gewählt werden, wie sie in dem voraufgehenden Referate IV 30 von *E. Hellinger* gegeben wurden. Ein genaueres Studium wird hier ausser den Fragen der *Wärmetheorie* das *magnetische und elektrische Verhalten* der einzelnen Bestandteile und schliesslich auch die *chemischen Fragen* heranziehen müssen, womit dann der Boden der eigentlichen Mechanik überschritten und dasjenige Gebiet betreten wird, welches in der vorliegenden Enzyklopädie dem Bande V (Physik) zugewiesen ist. In letzter Instanz aber wird man auf den *molekularen Aufbau der Materie* zurückgreifen wollen, wie wir dies bereits in der letzten Nummer angedeutet haben. Dies führt gewissermassen zu dem folgenden Referate IV 32 von *P.* und *T. Ehrenfest* über die Grundlagen der *statistischen Mechanik* hinüber.

(Abgeschlossen im September 1913.)

D. MECHANIK DER AUS SEHR ZAHLREICHEN DISKRETEN TEILEN BESTEHENDEN SYSTEME.

IV 32. BEGRIFFLICHE GRUNDLAGEN DER STATISTISCHEN AUFFASSUNG IN DER MECHANIK.

Von

P. u. T. EHRENFEST*)

IN ST. PETERSBURG.

Inhaltsübersicht.

---

*) Die kritische Sichtung und Systematisierung der Resultate aller grundlegenden Untersuchungen wurde von den Verfassern in gemeinsamer Arbeit erledigt. Für die endgültige Redaktion trägt *P. Ehrenfest* die Verantwortung.

Litteratur.

Monographieen.

L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, 2 Bde, Leipzig 1896/1898.
S. H. Burbury, Kinetic theory of gases, Cambridge 1899.
J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics, New-York-London 1902. (Deutsche Übersetzung von *E. Zermelo,* Leipzig 1905.)
J. H. Jeans, Dynamical theory of gases, Cambridge 1904.
H. W. Watson, Kinetic theory of gases, Oxford 1876, 2. ed., Oxford 1893.

Abhandlungen.*)

L. Boltzmann, Wissenschaftliche Abhandlungen. Herausgegeben von *Fr. Hasenöhrl,* 3 Bde, Leipzig 1909. (Von den folgenden Abhandlungen sind enthalten [1]—[6] in Bd. 1, [7]—[13] in Bd. 2, [14]—[21] in Bd. 3.)
— [1] Mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes, Wien Ber. 53^2 (1866), p. 199.
— [2] Studien über das Gleichgewicht der lebend. Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten, Wien Ber. 58^2 (1868), p. 517.
— [3] Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen, Wien Ber. 63^2 (1871), p. 397.
— [4] Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, Wien Ber. 63^2 (1871), p. 679.
— [5] Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes aus den Sätzen über Gleichgewicht der lebendigen Kraft, Wien Ber. 63^2 (1871), p. 712.
— [6] Weitere Studien über Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen (H-Theorem), Wien Ber. 66^2 (1872), p. 275.
— [7] Wärmegleichgewicht von Gasen, auf die äußere Kräfte wirken, Wien Ber. 72^2 (1875), p. 427.
— [8] Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche Molekularbewegung bestimmen, Wien Ber. 74^2 (1876), p. 503.
— [9] Einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie, Wien Ber. 75^2 (1877), p. 62.

---

*) Die den Abhandlungen in Klammern beigefügten Zahlen bezeichnen die Nummern, unter denen sie mit Beifügung des jeweiligen Autorennamens im Texte zitiert werden.

— [10] Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung resp. den Sätzen über das Wärmegleichgewicht (Complexionen-Theorie), Wien Ber. 76² (1877), p. 373.

— [11] Weitere Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie, Wien Ber. (78) 2 (1878), p. 7.

— [12] Einige das Wärmegleichgewicht betreffende Sätze, Wien Ber. 1881, p. 136.

— [13] Referat über die Abhandlung von J. C. Maxwell [3] Beibl. d. Ann. d. Phys. 5 (1881), p. 403; Phil. mag. (5) 14 (1882), p. 299.

— [14] Über Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann, Wied. Ann. 18 (1883), p. 309.

— [15] Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, J. f. Math. 100 (1887), p. 201.

— [16] Neuer Beweis zweier Sätze über Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen, Wien Ber. 95² (1887), p. 153.

— [17] (3 Briefe in Nature über Umkehreinwand), Nature 51 (1894), p. 413, 581; 52 (1895), p. 221.

— [17a] Über die mechanische Analogie des Wärmegleichgewichts zweier sich berührender Körper (gemeinsam mit *G. H. Bryan*), Wien Ber. 103² (1894), p. 1122.

— [18], [19] Entgegnung auf die wärmetheoretische Betrachtung des Herrn Zermelo, Wied. Ann. 57 (1896), p. 773; 60 (1897), p. 392.

— [20] Über einen mechanischen Satz von Poincaré, Wien Ber. 106² (1897), p. 12.

— [21] Über die sogenannte H-Curve, Math. Ann. 50 (1898), p. 325.

E. Borel [1] Sur les principe de la théorie cinétique des gaz, Ann. de l'école norm. (3) 23 (1906), p. 9.

M. Brillouin [1] Introduction et notes in: Boltzmann, Leçons sur la théorie des gaz, traduites par *A. Galotti* et *H. Bénard*, 2 vols, Paris 1902—1905.

G. H. Bryan [1] Report on the present state of our knowledge of thermodynamics, Report of the British Assoc. Cardiff 1891, Oxford 1894.

— [2] Energy acceleration, Arch. néérland. (2) 5 (1900), p. 279 (= Lorentz-Jubelb.).

S. H. Burbury [1] On the law of partition of energy, Phil. mag. (5) 50 (1900), p. 584.

— [2] On the variation of entropy as treated in W. Gibbs' statistical mechanics, Phil. mag. (6) 6 (1903), p. 251.

— [3] On Jeans theory of gases, Phil. mag. (6) 6 (1903), p. 529.

— [4] Theory of diminution of entropy, Phil. mag. (6) 8 (1904), p. 43.

R. Clausius [1] Über die Art von Bewegungen, die wir Wärme nennen, Pogg. Ann. 100 (1857), p. 253.

— [2] Über die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molekularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molekülen zurückgelegt werden; nebst einigen anderen Bemerkungen über die mechanische Wärmetheorie, Pogg. Ann. 105 (1859), p. 239.

— [3] Über die Wärmeleitung gasförmiger Körper, Pogg. Ann. 115 (1862), p. 1.

P. u. *T. Ehrenfest* [1] Zur Theorie der Entropiezunahme in der statistischen Mechanik von Gibbs, Wien Ber. 115² (1906), p. 89.

— [2] Über zwei bekannte Einwände gegen Boltzmanns H-Theorem, Phys. Zeitschrift 8 (1907), p. 311.

A. Einstein [1] Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichts und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, Ann. d. Phys. 9 (1902), p. 417.

— [2] Theorie der Grundlagen der Thermodynamik, Ann. d. Phys. 11 (1903) p. 170.
— [3] Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 549.
— [4] Zur Theorie der Brownschen Bewegung, Ann. d. Phys. 19 (1906), p. 371.
J. Hadamard [1] La mécanique statistique, Americ. Math. Soc. Bull. (2) 12 (1906), p. 194.
G. H. Jeans [1] On the conditions necessary for equipartition of energy, Phil. mag. (6) 4 (1902), p. 585.
— [2] Kinetic theory of gases, developed from a new standpoint, Phil. mag. (6) 5 (1903), p. 597.
A. Krönig [1] Grundzüge einer Theorie der Gase, Pogg. Ann. 99 (1856), p. 315.
A. Liénard [1] Sur la theorie cinétique des gaz, J. d. phys. (4) 2 (1903), p. 677.
G. Lippmann [1] La théorie cinétique des gaz et le principe de Carnot, Rapports présentés au Congrès intern. de Physique réuni à Paris en 1900, 1, Paris 1900, p. 546.
H. A. Lorentz [1] Über die Grösse von Gebieten in einer n-fachen Mannigfaltigkeit, Ges. Abh. 1, Leipzig 1906, p. 151.
— [2] Über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und dessen Beziehungen zur Molekulartheorie, Ges. Abh. 1, p. 202.
J. Loschmidt [1] Über das Wärmegleichgewicht eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwere, Wien Ber. 73^2 (1876), p. 139; 75^2 (1877), p. 67.
L. S. Ornstein [1] Toepassing der statistischen Mechanik von Gibbs op molekul.-theor. vraagstukken, Dissertation Leiden 1908.
— [2] Statistical theory of capillarity, Versl. Amsterdam 17 (1909), p. 256.
— [3] Bepaling van den druk van een gas met behulp van de statist. mechan. van Gibbs, Versl. Amst. 17 (1909), p. 825.
J. Cl. Maxwell [1] Illustrations of the dynamical theory of gases Part. 1: On the motions and collisions of perfeetly elastic. spheres, Phil. mag. (4) 19 (1860), p. 19; Part. 2: On the process of diffusions of two or more kinds of moving particles among one another, Phil. Mag. (4) 20 (1860), p. 1 = Scientific. Papers 1, Cambridge 1890, p. 377.
— [2] On the dynamical theory of gases, Lond. Phil. Trans. 157 (1866), p. 49; Scientific Papers 2, Cambridge 1890, p. 26.
— [3] On Boltzmanns theorem on the average distribution of energy in a system of mater. points 1878, Cambr. Phil. Soc. Trans. 12 (1879), p. 547 = Scientific Papers 2, Cambridge 1890, p. 713.
H. Pannekoek [1] Eenige opmerkingen over de omkeerbaarheid van molekul. beweg., Versl. Amst. 12 (1903), p. 63.
M. Planck [1] Mechanische Bedeutung der Temperatur und Entropie. Festschrift f. L. Boltzmann, Leipzig 1904, p. 113.
H. Poincaré [1] Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique § 8 Usage des invariants intégraux, Acta mathem. 13 (1890), p. 67.
— [2] La crise actuelle de la Physique mathématique. Cap. VIII in „La Valeur de la science", Paris 1904.
— [3] Schlussparagraph in: Leçons sur la Thermodynamique, 2. ed., Paris 1908.
— [4] Reflexions sur la théorie cinétique des gaz, J. d. phys. (4) 5 (1906), p. 369.
— [5] Necrolog auf Boltzmann, Paris C. R. 143 (1906), p. 997.

O. Postma [1] Jets over de groothed H. Versl. Amsterd. 15 (1906), p. 602.
— [2] Motion of molec. systems 16 (1907), p. 332.
— [3] Kinetic derivation of the II. law 17 (1908), p. 330.
Lord Rayleigh [1] Remarks on Maxwells investigation respecting Boltzmanns theorem, Phil. mag. (5) 33 (1892), p. 356 (= Scient. Pap. 3, p. 554).
— [2] The law of partition of kinetic energy, Phil. mag. (5) 49 (1900), p. 111 (= Scient. Pap. 4, p. 433).
M. v. Smoluchowski [1] Über Unregelmässigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen, Festschrift für L. Boltzmann, Leipzig 1904, p. 626.
— [2] Sur le chemin moyen parcouru par les molécules. Cracovie, Bull. de l'Académie 1906. p. 202.
— [3] Kinetische Theorie der Brownschen Bewegung, Ann. d. Phys. 21 (1906), p. 756.
— [4] Molekular-kinetische Theorie der Opalescenz im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen, Ann. d. Phys. (4) 25 (1908), p. 205.
J. D. van der Waals jr. [1] (Cap I in) Statist. Behandel. der Stralingsversckijnselen, Dissert. Amsterd. 1900.
— [2] Statist. Electro-Mechan. Versl. Amst. 1902, p. 22, 114.
— [3] Die statistische Weltanschauung, Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 508.
A. Wassmuth [1] Über die Wahl der „kanonischen Verteilung" von Systemen in der statistischen Mechanik von Gibbs, Wien Ber. 117^2 (1908), p. 1253.
E. Zermelo [1] Über einen Satz der Dynamik und der mechanischen Wärmetheorie, Wied. Ann. 57 (1896), p. 485.
— [2] Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge, Wied. Ann. 59 (1896), p. 793.
— [3] Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dynamische Systeme, Phys. Zeitschr. 1 (1900), p. 317.
— [4] Referat über Gibbs „statistische Mechanik", Jahresber. d. Math.-Ver. 15 (1906), p. 241.

Vorbemerkung. Der vorliegende Artikel steht in enger Beziehung zu V 8: *L. Boltzmann* und *J. Nabl* (*Kinetische Theorie der Materie*): Beide Artikel beschäftigen sich mit der Anwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Studium der Bewegungen eines Molekülsystems. Während sich aber V 8 vornehmlich den *physikalischen* Resultaten zuwendet, handelt es sich hier um die *begrifflichen Grundlagen* des Verfahrens.

Auf sie wurde die Aufmerksamkeit durch zahlreiche Aufsätze (seit 1876) gelenkt, in denen ein zentrales Theorem der kinetischen Gastheorie — *Boltzmanns H-Theorem* — angegriffen wurde. Ausnahmslos im Anschluss an diese Angriffe und *Boltzmanns* Erwiderungen haben sich die prinzipiellen Untersuchungen entwickelt, die bis jetzt über die *Verknüpfung von Mechanik mit Wahrscheinlichkeitsrechnung* vorliegen. *Dementsprechend greift auch der folgende Bericht immer wieder auf jene Diskussion zurück.*

Wegen der Beziehungen zu V 3: *G. W. Bryan* (*Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik*), V 23: *W. Wien* (*Theorie der Strahlung*), VI 2, 21: *S. Oppenheim* (*Figur d. Saturnringes*) vgl. den Schlussparagraphen des Artikels.

1. Einleitung. Die älteren Arbeiten der kinetischen Gastheorie zeigen betreffs der Verwertung von Wahrscheinlichkeitsansätzen ziemlich einheitlich die folgende Auffassung. Als Ziel gilt die *„Erklärung“* der beobachtbaren aerodynamischen Prozesse auf Grund folgender beiden Gruppen von *„Hypothesen“*:

1. *Mechanisch strukturelle Hypothesen:* Jedes Gasquantum ist ein mechanisches System, bestehend aus enorm vielen[1]) gleichartigen Molekülen von näher festgelegter Struktur[2]).

2. *Sogenannte Wahrscheinlichkeitshypothesen:* Den *unverfolgbar* komplizierten Bewegungen der Moleküle werden Gesetzmässigkeiten zugeschrieben in Form von *Behauptungen über die relative Häufigkeit* der verschiedenen Konfigurationen und Bewegungen der Moleküle[3]). (Vgl. Nr. **3**—**5**.)

Mehr *begriffliche* Bedenken gegen diese Grundlagen der Theorie konnten natürlich zunächst keine Beachtung finden gegenüber der reichen Ausbeute an *experimentell*-prüfbaren Resultaten, zu denen *A. Krönig* (1856), *R. Clausius* (seit 1857) und *J. Cl. Maxwell* (1859) bei der kinetischen Deutung der Zustandsgleichung, der Diffusion, Wärmeleitung und Reibung in rascher Aufeinanderfolge gelangten[4]).

Zu einer intensiven Diskussion der Grundlagen gab dann erst das *Boltzmannsche H-Theorem* (1872)[5]) den Anstoss:

1) Die Zahl von Molekülen im cm^3 bei O^0 und Atmosphärendruck — die „Loschmidtsche Zahl“ — beträgt rund 40 Trillionen.

2) Vgl. V 8, Nr. **1** u. **26** (*L. Boltzmann* u. *J. Nabl*).

3) Diese „Wahrscheinlichkeitshypothesen“ sind also Behauptungen über *statistische* Gesetzmässigkeiten inmitten der Trillionen von Molekülen, die ein und dasselbe Gasquantum zusammensetzen. Dabei ist die Lage und Bewegung *eines* Moleküles das *Einzelereignis* — das Verhalten des *einen* (!) gegebenen Gasquantums ist *Massenerscheinung*. Schon diese älteren kinetischen Arbeiten bezeichnete man danach gelegentlich als *„statistisch-mechanische“* Untersuchungen. Dem jetzigen terminologischen Brauch folgend wird aber im vorliegenden Artikel die Bezeichnung „statistisch-mechanisch“ für eine Gruppe von Untersuchungen vorbehalten, bei denen das Verhalten *eines* Gasquantums als *Einzelereignis* und erst das Verhalten einer noch näher zu definierenden *Schar von unendlich vielen* (einander gleichen und voneinander unabhängig sich bewegenden) *Exemplaren dieses Gasquantums* als *Massenerscheinung* behandelt wird (vgl. Nr. **9**—**15**).

4) V 8, Nr. **15**—**25**.

5) *Boltzmann* [6].

L. Boltzmann war zur Behauptung gelangt: Die von *Clausius* und *Maxwell* benutzten Hypothesen reichen aus, um eine zusammenfassende Deutung der irreversiblen Erscheinungen zu liefern; insbesondere eine kinetische Deutung der *einseitigen Zunahme der Entropie mit wachsender Zeit*[6]).

J. Loschmidt (1876)[7]) und später andere Autoren, darunter besonders *E. Zermelo* (1896)[8]) stellten dieser Behauptung Überlegungen gegenüber, die in folgender Aussage gipfeln: Aus den Grundannahmen der kinetischen Gastheorie folgt, dass *gleichgrosse Zu- und Abnahmen der Entropie völlig gleichberechtigt sind*[9]).

Danach ergaben sich bei der Behandlung gerade des umfassendsten Problems der kinetischen Gastheorie zwei Resultate, die wesentlich unvereinbar schienen. Es lag nahe, die Schuld in einem inneren Widerspruch innerhalb der mechanisch-wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen zu suchen. [Vgl. Nr. **7** u. **16**.]

In seinen Erwiderungen entwickelte *Boltzmann* eine etwas modifizierte, *verschärfte* Fassung einerseits des *H*-Theorems und seiner Grundlagen, anderseits der gegnerischen Ausführungen — man pflegt diese Fassung neuerdings als „statistisch-mechanische" zu bezeichnen[10]) — und gelangte zu folgenden Behauptungen:

1. Bei dieser verschärften, statistischen Fassung verschwindet der scheinbare Widerspruch zwischen seinen und den *Loschmidt-Zermelo*schen Resultaten.

2. Auch die modifizierte Fassung des *H*-Theorems stimmt weit über jede mögliche Beobachtung hinaus mit der Forderung der einseitigen Entropiezunahme überein.

Demgegenüber halten bis jetzt noch immer mehrere angesehene Forscher[11]) an der Behauptung fest, *dass die Loschmidt-Zermeloschen Einwände auch bei der modifizierten, statistischen Fassung des H-Theorems innere Widersprüche in den Grundlagen aufdecken.*

Der folgende Bericht wird beherrscht von der Überzeugung, dass solche Widersprüche nicht bestehen und, wo sie scheinbar bemerkt wurden, begründet sind in Zweideutigkeiten, zu denen einige von *Boltzmann* verwendete Benennungen Anlass geben können (vgl. be-

---

6) Siehe unten Nr. **6** und V 8, Nr. **11**.

7) *Loschmidt* [1].

8) *Zermelo* [1].

9) Nr. **7**.

10) Nr. **9—15**.

11) *Zermelo* [3] (1906); *Poincaré* [3] (1908); *Brillouin* [1]; *Lippmann* [1] (1900); *Liénard* [1] (1903); *Burbury* [Phil. mag. (6) 16 (1908), p. 122].

sonders die *scheinbar* unvereinbaren geometrischen Eigenschaften der *Boltzmann*schen „H-Kurven" Nr. **14** b). — Danach war auch Stellung zu nehmen zu der aus jener Behauptung hervorgegangenen Anschauung, dass die *Clausius-Maxwell*schen Deutungen der Diffusion, Wärmeleitung und Reibung zu verwerfen seien; dass „ihr scheinbares Gelingen nur auf Fehlschlüssen beruhe"[12]).

Entsprechend ihrem Ursprung aus diesem Kampf um das H-Theorem sind die *„statistisch-mechanischen" Untersuchungen* weit davon entfernt, eine systematisch verarbeitete Disziplin zu bilden; eher sind sie anzusehen als eine Sammlung von *Erläuterungen zu den älteren Wahrscheinlichkeitsansätzen der Gastheorie*: sie präzisieren diese älteren Ansätze, indem sie *schrittweise* die Wahrscheinlichkeitsterminologie auflösen in hypothetische Behauptungen über relative Häufigkeiten innerhalb klar definierter statistischer Gesamtheiten. So wurden manche Unklarheiten beseitigt[13]), die der Wahrscheinlichkeitsterminologie anhaften; die zahlreichen Lücken, die dabei evident wurden (vgl. die „Behauptungen" I—X in Nr. **15**—**18**) regten zu Untersuchungen an, von denen wenigstens eine durch *Boltzmann* mit grossem Erfolg durchgeführt wurde (vgl. Nr. **13**).

Eine Verfolgung dieses Entwicklungsganges zeigt, dass nur ein kleiner Bruchteil der dabei zutage getretenen Ideen, und nicht durchaus der wesentlichste, von der *systematisierenden* Darstellung umspannt werden kann, die *Gibbs* in seiner „statistischen Mechanik" zu geben versucht (vgl. Nr. **19**—**25**).

Deshalb schien es geboten, im vorliegenden Bericht eine überwiegend *genetische* Darstellung zu wählen, die von einer Darlegung der älteren Fassung der Grundlagen ausgeht[14]).

I. Die ältere Fassung statistisch-mechanischer Untersuchungen (Kinetostatistik des Moleküls).

2. Die ersten, vorläufigen Wahrscheinlichkeitsansätze[15]). Die ersten *quantitativen* Versuche einer kinetischen Deutung betreffen die Gleichung $pv = RT$; Berechnung des Druckes, den die in Wärme-

12) Zermelo [1b].

13) Vgl. Anm. 15.

14) Die Disposition der nächsten 8 Nummern läuft parallel der Darlegung in V 8.

15) In den folgenden Ausführungen wird die Bezeichnung: *Wahrscheinlichkeit eines Vorkommnisses* vermieden und durch die allerdings schwerfälligeren, expliciten Häufigkeitsaussagen ersetzt. In den zunächst zu besprechenden älteren Arbeiten wirkte die unterschiedslose Bezeichnung „Wahrscheinlichkeit" unzweifel-

bewegung begriffenen Moleküle eines ruhenden Gases auf die Gefässwände ausüben[16]). Bei der Berechnung dieses Druckes ersetzen sie die unbekannte und unverfolgbare komplizierte Bewegung der Moleküle durch das *für die Rechnung möglichst bequem gewählte* Bewegungsschema: alle Moleküle bewegen sich mit derselben Absolutgeschwindigkeit, und zwar je ein Drittel parallel den drei Kantenrichtungen des Gefässwürfels. Dieses Verfahren rechtfertigt z. B. *Krönig* (*1856*)[17]) mit folgenden Worten: „Die Bahn jedes Moleküles muss .... eine so unregelmässige sein, dass sie sich der Berechnung entzieht. *Nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* wird man jedoch statt dieser vollkommenen Unregelmässigkeit eine vollkommene Regelmässigkeit annehmen dürfen“[18]).

3. Die Gleichhäufigkeit anscheinend gleichberechtigter Vorkommnisse.

3a. Die Ansätze bei Clausius. Wesentlich kritischer ist das Verfahren und auch die Ausdrucksweise in den Arbeiten von *R. Clausius*[19]) (seit 1857). Seine Ansätze beschränken sich fast ausnahmslos darauf, die *Gleichhäufigkeit* solcher Molekülbewegungen und Konstellationen zu behaupten, deren *Gleichberechtigung* er für genügend plausibel hält.

Für ein ruhendes Gas im Wärmegleichgewicht, beim Fehlen äusserer Kräfte legt er z. B. folgende Behauptungen teils stillschweigend, teils explizit dem Kalkül zugrunde: Die Moleküle verteilen sich

---

haft *heuristisch fruchtbar*: Relative Häufigkeitszahlen durchaus verschiedener Natur wie etwa a) relative Länge der Zeit, während welcher ein Molekül *A* einen Zustand *Z* aufweist und b) relative Anzahl derjenigen Moleküle, welche in einem und demselben Moment den Zustand *Z* aufweisen, traten so auf unter der nicht weiter differenzierten Bezeichnung: „die“ Wahrscheinlichkeit dafür, dass *A* den Zustand *Z* aufweist. Damit war aber *unmerklich* die Gleichheit beider relativen Häufigkeitszahlen *behauptet* und weiterhin ausnutzbar, während der *Nachweis* ihrer Gleichheit vielleicht grosse Schwierigkeiten geboten hätte, falls er überhaupt gelang. Leider ist dieses Verfahren aber auch in neueren, *kritischen* Untersuchungen über die Grundlagen der kinetischen Theorie noch weitaus nicht vollständig eliminiert. Vgl. Beginn von Nr. **14.**

16) Vgl. V 8, Nr. 2.

17) *Krönig* [1].

18) Wegen der speziellen Gestalt der Summenbildungen, die bei der Druckberechnung in Betracht kommen, führt bei diesem Problem das *Krönig*sche Schema zum selben Resultat wie das spätere, verfeinerte Schema von *Clausius*. Bei der Behandlung anderer Probleme wie z. B. Diffusion und Wärmeleitung ist das nicht mehr der Fall.

19) Die folgenden Ausführungen beziehen sich vor allem auf diejenigen Abhandlungen von *Clausius* [1, 2], die der ersten gastheoretischen Publikation *Maxwells* [1] vorausgehen.

gleich dicht über das Gefäss. — Die verschiedenen Werte der Absolutgeschwindigkeiten der Moleküle kommen in allen Teilen des Gefässes mit der *gleichen* relativen Häufigkeit vor. — In jedem Volumenelement, das nur eine genügend große Zahl von Molekülen enthält, sind alle Geschwindigkeits*richtungen* gleich häufig vertreten[20]).

3b. **Der „Stosszahlansatz"**[21]). Hierher gehört auch der überaus wichtige Ansatz, den in der Hauptsache schon *Clausius* gegeben hat, für die Zahl der *Zusammenstösse*, welche im Zeitelement Δt zwischen zwei gegeneinander anlaufenden Gruppen von Molekülen stattfinden: Man berechnet die Volumsumme der Zylinder, welche die „Deckungssphären"[22]) der verschiedenen Moleküle der ersten Gruppe in ihrer Relativbewegung gegen die Moleküle der zweiten Gruppe während Δt durchfegen[23]). Die Zahl der gesuchten Zusammenstöße ist dann gleich der Zahl derjenigen Moleküle der *zweiten* Gruppe, die im Moment t innerhalb dieser zu durchfegenden Zylinder liegen. — Für diese letztere Zahl machte nun *Clausius* als erster den Ansatz[24]):

[Durchfegter Raum] · [Zahl der Moleküle zweiter Art pro Volumeneinheit].

Diesem „*Stosszahlansatz*" liegt ersichtlich folgender Gleichhäufigkeits- („Gleichwahrscheinlichkeits-") Ansatz zugrunde: Von den Molekülen der zweiten Gruppe entfallen auf jede Volumeneinheit des *zu durchfegenden* Raumes ebensoviele als auf jede Volumeneinheit des *übrigen* Raumes[24a]).

---

20) Diese Behauptung formuliert offenbar *eine der vielen* Bedeutungen, in denen der Ausdruck „Gleichwahrscheinlichkeit aller Bewegungsrichtungen" verwendet wurde. Analoges ist zu sagen über: „Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein individuelles Molekül in einem bestimmten Volumenelement des Gefässraumes angetroffen wird." Vgl. Anm. 15.

21) Vgl. die Erläuterung dieses Ansatzes an einem vereinfachten Modell Nr. **5**: Zwischenstück.

22) Unsere Ausführungen beschränken sich der Einfachheit halber auf kugelförmige Moleküle. *Die Deckungssphäre* eines Moleküles ist dann eine mit seiner Oberfläche konzentrische Kugel von doppelt so grossem Radius: sie markiert die Grenze, bis zu welcher der *Mittelpunkt* eines zweiten Moleküls sich dem des ersten nähern kann, ehe ein Zusammenstoss erfolgt. Vgl. *Boltzmann*, Gastheorie I, § 3.

23) Wegen der korrekten Formulierung dieses rein *kinematischen* Teils der Frage vgl. *Boltzmann*, Gastheorie I, p. 15 und V 8, Nr. 8. Für den Fall allgemeinerer Struktur der Moleküle: *Boltzmann*, Gasth. I, p. 107; II, p. 230.

24) *Clausius* [2, 3].

24a) Dieser letzte Gleichhäufigkeitsansatz wird oft als „*Hypothese der molekularen Unordnung*" bezeichnet. Dieselbe Bezeichnung wird aber noch für eine andere wesentlich tiefer liegende Aussage gebraucht, welche in Nr. **18** c ent-

4. Die Relativhäufigkeit nicht gleichberechtigter Vorkommnisse.

4a. Die qualitativen Ansätze und ersten Abschätzungen bei Clausius. Auf Grund von Häufigkeitsansätzen der genannten Art hat *Clausius* eine neue Ableitung für die Gleichung $pv = RT$ gegeben und die erste quantitative Abschätzung über Diffusionsgeschwindigkeiten entwickelt [25]).

Aber schon damals exponierte *Clausius* wenigstens *qualitativ* die kinetische Deutung solcher Erscheinungen, für deren *quantitative* Behandlung weitaus tiefergreifende Häufigkeitsansätze notwendig sind. Z. B. zeigte er [26]): Das Verdampfungsgleichgewicht zwischen Flüssigkeit und gesättigtem Dampf hängt bei den verschiedenen Temperaturen davon ab, für welchen Prozentsatz der Flüssigkeitsmoleküle bei der betreffenden Temperatur die Absolutgeschwindigkeit den kritischen Grenzwert überschreitet, welcher zur Losreissung aus der Flüssigkeit notwendig ist. — Zur quantitativen Behandlung des Verdampfungsgleichgewichtes ist also ein *Ansatz* erforderlich *für die relative Häufigkeit der verschiedenen Absolutgeschwindigkeiten der Moleküle.*

Clausius macht aber noch keinen Versuch eines *quantitativen* Ansatzes für die relative Häufigkeit so durchaus *nicht* gleichberechtigter Vorkommnisse. Dementsprechend verzichtet er in einigen Fällen überhaupt auf eine quantitative Verfolgung [27]). In anderen Fällen begnügt er sich mit Abschätzungen: Er ersetzt die unbekannte relative Häufigkeit durch einen für die Rechnung möglichst bequemen, *bewusst* schematisierten Ansatz; betont dann aber, dass es sich hier lediglich um einen rechnerischen Überschlag handelt. So legt er bei Abschätzung der Diffusionsgeschwindigkeit die Rechnung so an, als ob die Moleküle sich zwar nach allen Richtungen, aber alle mit derselben Absolutgeschwindigkeit bewegen würden [28]). — Immerhin liegt doch auch dieser Abschätzung eine schon tiefergreifende Annahme zugrunde, ohne welche von jenen Abschätzungen keine Annäherungsresultate erwartet werden könnten. Nämlich die Annahme: Im ruhenden Gas von vorgegebener Temperatur besitzen die Moleküle eine *bestimmte,*

---

wickelt werden wird. Die Konfundierung beider Bedeutungen spielt eine beträchtliche Rolle in der Diskussion über das *H*-Theorem. Dementsprechend schien es geboten, im vorliegenden Bericht die Bezeichnung „Hypothese der molekularen Unordnung" ausschliesslich für die in Nr. 18c zu erörternde Annahme zu reservieren. Vgl. Anm. 161.

25) *Clausius* [2] (1859).

26) Ges. Abh., Bd. III, p. 12 ff.

27) So z. B. für das Verdampfungsgleichgewicht.

28) *Clausius* [2].

wenn auch unbekannte *Geschwindigkeitsverteilung*, und zwar eine solche, bei der die *Absolutgeschwindigkeiten eine verhältnismässig geringe Dispersion*[29]) *um den häufigsten Wert zeigen.*

4b. Die Aufstellung eines Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes durch Maxwell. Um die Folgerungen, bis zu denen *Clausius* vorgedrungen war, weiter zu bearbeiten, dazu war jetzt nötig, die *qualitative* Behauptung einer geringen Geschwindigkeitsdispersion durch irgendeinen speziellen quantitativen Ansatz abzulösen, *mit dem sich rechnen liess.* — Hier greift *J. Cl. Maxwell* ein (1859)[30]). Für ein ruhendes Gas mit einatomigen Molekülen[31]), im Wärmegleichgewicht und beim Fehlen äusserer Kräfte stellt er folgendes Geschwindigkeitsverteilungsgesetz auf („*Maxw.*-Vert.-Ges."):

$$f(u, v, w)\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w = A e^{-B(u^2+v^2+w^2)}\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w. \tag{1}$$

Hierin ist $f(u, v, w)\ \Delta u\,\Delta v\,\Delta w$ die Zahl der Moleküle, deren drei Geschwindigkeitskomponenten zwischen den Grenzen:

(2a) u und $u + \Delta u$

(2b) v und $v + \Delta v$

(2c) w und $w + \Delta w$

liegen. A und B sind zwei Konstanten, die sich aus der Gesamtzahl, -masse und -kinetischer Energie der Moleküle bestimmen[32]).

Man darf annehmen, dass *Maxwell* bei Aufstellung seines Verteilungsansatzes sich von dem Vorbild des *Gauss*schen Fehlergesetzes leiten liess[33]). Über die zentrale Stellung, die der *Maxwell*sche Ansatz alsbald bei der Berechnung der Diffusions-, Wärmeleitungs- und Reibungskonstanten gewann, vgl. man die Nr. **15—21** von V 8.

4c. Die Verallgemeinerung des Maxwellschen Ansatzes durch Boltzmann. *Boltzmann* führte (1868)[34]) eine bedeutsame Verallgemeinerung des *Maxwell*schen Ansatzes in die Gastheorie ein: Erstens lässt er zu, dass auf die Moleküle des Gases ein *äusseres* Kraftfeld wirkt (z. B. die Schwere). In diesem Fall sind also nicht nur die verschiedenen Absolutgeschwindigkeiten (versch. Werte der *kinetischen* Energie),

29) Vgl. Anm. 32).

30) *Maxwell* [1].

31) In seiner ersten Arbeit betrachtet *Maxwell* auch noch den Fall nichtkugelförmiger, starrer Moleküle. Für die verschiedenen Werte der *Rotations*geschwindigkeiten macht er dann ohne weiters den zu (1) analogen Häufigkeitsansatz.

32) Vgl. V 8, Nr. 8.

33) Vgl. Gl. B′. in Anm. 176.

34) *Boltzmann* [2, 3].

sondern auch die verschiedenen Lagen eines Moleküls im Gefäss (versch. Werte der *äusseren potentiellen* Energie) nicht mehr gleichberechtigt[35]). — Zweitens lässt *Boltzmann* zu, dass jedes Molekül aus mehreren Atomen besteht, die durch Attraktionskräfte miteinander verbunden sind[36]): hier sind also auch noch die verschiedenen Konfigurationen der Atome im Molekül (versch. Werte der *inneren potentiellen* Energie) als nicht-gleichberechtigte Vorkommnisse anzusehen.

Die *Boltzmann*sche Verallgemeinerung des *Maxwell*schen Ansatzes besagt nun für diesen sehr allgemeinen Fall:

Bezeichnet $\Delta\tau$ einen sehr kleinen Variabilitätsbereich für den Zustand eines Moleküles — dadurch charakterisiert, dass die Koordinaten und Geschwindigkeiten aller Atome in passende Grenzen[37]) eingeschlossen werden, analog den Grenzen (2a), (2b), (2c) — so ist im Fall des Wärmegleichgewichtes

(3) $$f \cdot \Delta\tau = \alpha e^{-\beta\varepsilon} \cdot \Delta\tau$$

die Zahl derjenigen Moleküle, deren Zustand im Variabilitätsbereich $\Delta\tau$ liegt. ε bezeichnet hier die *totale Energie*, die das Molekül in diesem Zustand besitzt (kinetische Energie + äussere potentielle Energie + innere potentielle Energie)[38]). α und β sind zwei Konstante, die sich ähnlich bestimmen wie beim *Maxwell*schen Gesetz.

Für den Fall kugelförmiger Moleküle von der Masse m, auf welche das Schwerefeld wirkt, würde zu nehmen sein:

(3′) $$\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta u \Delta v \Delta w$$

(3″) $$f = \alpha e^{-\beta\left(\frac{m}{2}c^2 + mgz\right)},$$

35) Im Falle z. B. der Schwere ist die vertikale Richtung ausgezeichnet, und damit geht auch noch die Gleichberechtigung der verschiedenen Geschwindigkeitsrichtungen verloren (vgl. Anm. 39).

36) *Boltzmann* [3]. Zu dieser verallgemeinerten Fragestellung wurde *Boltzmann* geführt durch die schon vorher von ihm [1] (1866) begonnenen Versuche, den *Carnot-Clausius*schen Satz von der beschränkten Verwandelbarkeit der Wärme in Arbeit aus kinetischen Vorstellungen abzuleiten. Um diese Ableitung für *beliebige* thermische Systeme durchzuführen — *Boltzmann* [5] (1871) —, war nötig, z. B. auch für nicht ideale Gase auszurechnen, wie sich bei unendlich langsamen Zustandsänderungen ein mitgeteiltes Wärmequantum aufteilt zwischen Vermehrung der translatorisch und inneren kinetischen Energie und der verschiedenen potentiellen Energien der Gasmoleküle. Dazu war aber eben der im Text angeführte Verteilungsansatz notwendig.

37) Wegen ihrer näheren Definition, durch welche Gl. (3) erst einen bestimmten Sinn erhält, vgl. Anm. 111.

38) Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo die wechselseitige potentielle Energie zweier verschiedener Moleküle aufeinander vernachlässigt werden kann.

wo

(3'') $$c^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Der Vergleich mit (1) zeigt, dass in Bezug auf die *Geschwindigkeitsverteilung* (3'') mit dem Maxwellschen Ansatz übereinstimmt. — Dementsprechend hat man den Ansatz (3) als *Maxwell-Boltzmannsches Verteilungsgesetz* bezeichnet[39]).

5. Ableitungsversuche der Häufigkeitsansätze zweiter Art aus denen erster Art. Die zuletzt angeführten Häufigkeitsansätze von *Maxwell* und *Boltzmann* bedürfen offenbar in noch viel höherem Grad einer Rechtfertigung, als die unter a) geschilderten *Gleichhäufigkeitsansätze*. In der Tat publizierten *Maxwell* und *Boltzmann* ihre Verteilungsgesetze nicht geradezu als hypothetische Ansätze[40]), sondern als Endergebnisse systematischer Ableitungen.

Diejenige Ableitung, die *Maxwell* in seiner ersten gastheoretischen Arbeit[41]) skizzierte, wurde von ihm selbst später als unbefriedigend verworfen (vgl. ihre Darstellung und Kritik in V 8, Nr. 7).

Die folgenden Ableitungsversuche *Maxwell*s und *Boltzmann*s erreichten einen ersten Abschluss im H-Theorem. Sie durchliefen dabei folgende Entwicklungsstufen:

Maxwell (1866)[42]). Für ein einatomiges Gas, auf das keine äusseren Kräfte wirken, erfüllt die *Maxwell*sche Verteilung die Forderung des Wärmegleichgewichtes[43]): sie erhält sich nämlich gegenüber den Zusammenstössen der Moleküle stationär aufrecht[44]).

---

39) Der Ansatz (3'') enthält unter anderem schon folgende Aussagen: a) in allen Stellen des Gefässes trifft man dieselbe prozentuale Verteilung der Absolutgeschwindigkeiten an — also auch dieselbe mittlere kinetische Energie (Temperatur). — b) Alle Geschwindigkeitsrichtungen sind gleich häufig vertreten, obwohl jetzt — vgl. Anm. 35 — die vertikale Richtung ausgezeichnet ist. — c) Die barometrische Höhenformel. — Besonders gegen die Aussage a) hat *Loschmidt* [1] polemisiert. Er versuchte zu beweisen, dass im Gleichgewichtszustand das Gas unten heisser, oben kälter sein müsse. Vgl. *Boltzmann*s Antwort [8, 11].

40) Vgl. übrigens den Ansatz, den *Maxwell* [2] ohne Beweisversuch aufstellt für die anisotrope Geschwindigkeitsverteilung in Gasen mit stationärer Deformationsbewegung:

$$f = A\,C^{-(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot) - (B_1 u^2 + B_2 v^2 + B_3 w^2)}.$$

41) *Maxwell* [1]. Er verwirft diesen Beweis in der Arbeit [2].

42) *Maxwell* [2].

43) Vgl. V 8, Nr. 6.

44) Jeder Zusammenstoss wirft zwei Moleküle aus ihren anfänglichen Bewegungszuständen in zwei neue. *Maxwell* zeigt: Im Falle der *Maxwell*schen Geschwindigkeitsverteilung werden in jedem Zeitelement in jedes Geschwindig-

Boltzmann (1868—71)[45]. In einem mehratomigen Gas, auf dessen Moleküle ein äusseres Kraftfeld wirkt, erhält sich die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung stationär aufrecht.

Boltzmann (1872, als eine der Folgerungen des *H*-Theorems)[46]:

Die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung ist *die einzige*, welche sich stationär aufrecht erhalten kann[47], und jede andere geht unter der Wirkung der Zusammenstösse schliesslich in sie über.

Bezüglich der Grundlagen der angeführten Untersuchungen heben wir folgendes hervor:

1. Der Kalkül macht von den mechanischen Eigenschaften des Gasmodells einen wenigstens *partiellen* Gebrauch: er benutzt die Gesetze für den Zusammenstoss zweier Moleküle, um zu bestimmen, in welche Zustandsgebiete $\Delta\tau$ zwei Moleküle geworfen werden, wenn sie vor dem Zusammenstoss in vorgegebenen Zustandsbereichen lagen und auch der Typus des Zusammenstosses festgelegt war.

2. Der Kalkül stützt sich auf einige Gleichhäufigkeitsansätze von der in Nr. **3** angeführten Art. Insbesondere benützt er als Zahl der Zusammenstösse verschiedener Art im Zeitelement Δt einen Ansatz, der im wesentlichen mit dem dort auseinandergesetzten *Stosszahlansatz* identisch ist.

Für den Ausbau der Häufigkeitsansätze, die der kinetischen Gastheorie zugrunde liegen, leisten also die angeführten Untersuchungen zuletzt folgendes: Unter *teilweiser* Ausnützung der mechanischen Eigenschaften des Gasmodelles *beweisen* sie Behauptungen über die relative Häufigkeit *nicht* gleichberechtigter Vorkommnisse (*Maxwell-Boltzmann*-Ansatz), indem sie dem Kalkül gewisse Gleichhäufigkeitsansätze (bes. den Stosszahlansatz) als *Voraussetzung* zugrunde legen.

Damit erhält der Stosszahlansatz eine dominierende Stellung. Die *Kritik des Stosszahlansatzes* selbst und die Revision der auf ihn

---

keitsgebiet ebensoviele Moleküle *hineingeworfen* als aus ihnen *herausgeworfen* werden.

45) *Boltzmann* [2, 3].

46) *Boltzmann* [6, 7]. Über das *H*-Theorem selbst vgl. Nr. **6** u. **14**. Die Darstellung in V 8 Nr. **11** weicht bezüglich der Formulierung der Voraussetzungen und des Resultates wesentlich von jenen Originalarbeiten ab.

47) Allerdings hatte schon *Maxwell* [2] (1866) einen Beweis skizziert dafür, dass die *Maxwell*sche Verteilung die *einzige* ist, die sich stationär aufrecht erhält. *Boltzmann* [6] (im Beginn von Kap. I) zeigte aber, dass dieser Beweisversuch wegen eines Versehens hinfällig ist. Viel später (1887) gelang es *Boltzmann* (vgl. *Gastheorie*, Bd. II, § 93), die *Maxwell*sche Beweismethode vollständiger durchzuführen. Doch ist das Verfahren des *H*-Theorems darin überlegen, dass es auch noch die zeitliche Ausbildung der *Maxwell*schen Verteilung umfasst.

aufgebauten Folgerungen bleiben der folgenden Entwicklungsphase vorbehalten[48]).

Zwischenstück: Mit Rücksicht auf einige spätere Erörterungen empfiehlt es sich an einem aufs Äusserste vereinfachten Modell zu erläutern, welche Stellung der Stosszahlansatz in den zuletzt erwähnten *Maxwell-Boltzmann*schen Untersuchungen einnimmt.

In der unbegrenzten Zeichenebene bewege sich eine sehr grosse, aber *endliche* Zahl (N) von materiellen Punkten: die „P-Moleküle". Sie seien für einander vollständig durchdringlich. Sie bewegen sich kräftefrei, ausser dass sie *elastische* Zusammenstösse mit den nun einzuführenden Q-Molekülen erfahren. — Die „Q-Moleküle" sind Quadrate von der Seitenlänge a, in *unendlicher* Zahl regellos über die unendliche Zeichenebene verteilt, und zwar *unbeweglich* (starr befestigt), auf jedes grössere Gebiet sollen nahe gleichviel entfallen, die mittlere Distanz A der nächstbenachbarten soll gross gegen a sein, und *die Diagonalen jedes Q-Moleküles seien exakt parallel der x- resp. y-Axe.*

Zur Zeit t_0 mögen alle P-Moleküle dieselbe Absolutgeschwindigkeit c und nur die folgenden vier Bewegungsrichtungen besitzen:

$$(1) \longrightarrow \qquad (2) \uparrow \qquad (3) \longleftarrow \qquad (4) \downarrow$$

Wegen der Unbeweglichkeit der Q-Moleküle und der *exakten* Orientierung ihrer Diagonalen wird diese Verfügung sich dauernd aufrecht erhalten. — *Hingegen ändern sich durch die Stösse*, welche die P-Moleküle an den Q-Molekülen erfahren, die Zahlen

$$f_1, f_2, f_3, f_4,$$

die angeben, wie viele Moleküle in einem bestimmten Zeitpunkt die angeführten vier Bewegungsrichtungen besitzen: es ändert sich die „Geschwindigkeitsverteilung".

Das Analogon zur *Maxwell*schen-Verteilung bildet hier die Verteilung:

$$f_1{}^0 = f_2{}^0 = f_3{}^0 = f_4{}^0 = \frac{N}{4}. \tag{5}$$

Es handelt sich also um den Nachweis, dass unter der Wirkung der Zusammenstösse ein sukzessiver Ausgleich der Zahlen f_i stattfindet, und dass die Verteilung (5) sich aufrecht erhält, sobald sie einmal eingetreten ist.

$N_{12}\,\Delta t$ bezeichne die Zahl der P-Moleküle, die im Zeitelement Δt durch einen Zusammenstoss aus der Bewegungsrichtung (1) in die Richtung (2) geworfen werden. Es sind das offenbar alle und nur diejenigen Moleküle, welche zu Beginn des Zeitelementes Δt zugleich folgende beiden Bedingungen erfüllen:

A. Sie besitzen die Bewegungsrichtung 1.

B. Sie liegen in irgendeinem der Streifen S (Fig. 1). [An jedes der unendlich vielen Q-Moleküle ist ein solcher Streifen angelegt zu denken.]

Die Angabe der Zahlen f_1, f_2, f_3, f_4, genügt offenbar noch nicht, um zu bestimmen, wie viele P-Moleküle ausser der Bedingung A) *auch noch die Be-*

48) Der hypothetische Charakter des Stosszahlansatzes wurde lange Zeit durchaus nicht empfunden. Zum Beleg vgl. in *Boltzmann* [4] (1871) die Schlussbemerkung: „. . . so habe ich in jener Abhandlung" — gemeint ist die auf dem Stosszahlansatz basierte Abhandlung [3] — „den weitläufigeren, aber von jeder Hypothese freien Weg eingeschlagen."

dingung B) *erfüllen.* — Das Analogon zu dem mehrfach genannten *Stosszahlansatz* besteht nun in folgender *Behauptung:*

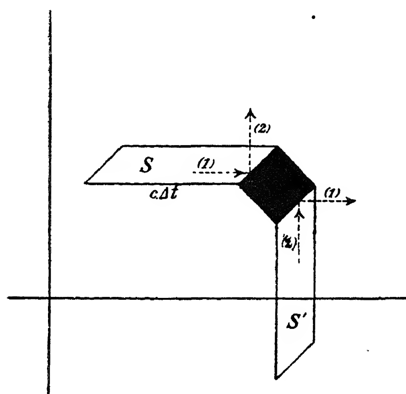


Fig. 1.

Von den P-Molekülen jeder einzelnen Bewegungsrichtung entfällt auf die Streifen S ein solcher Bruchteil, als dem Verhältnis der Gesamtfläche aller S zur totalen freien Fläche entspricht. Dieses Verhältnis sei bezeichnet mit

(6) $$k \cdot \Delta t.$$

Danach würden im Zeitelement Δt

(7) $$N_{12}\,\Delta t = f_1 \cdot k\Delta t$$

Moleküle von (1) nach (2) geworfen; analog

(8) $$N_{21}\,\Delta t = f_2 \cdot k\Delta t$$

im selben Zeitelement Δt umgekehrt von (2) nach (1). (Hier sind die Streifen S durch die *flächengleichen* Streifen S' — Fig. 1 — zu ersetzen.)

Die Gegenüberstellung der Gleichung (7) und (8) zeigt unmittelbar, dass bei den Stössen vom obigen Typus das grössere f an das kleinere f während Δt in Summe

(9) $$|f_1 - f_2| \cdot k\Delta t$$

Moleküle verliert. — Analog für jedes andere Paar von Stosstypen.

Wenn bei der Berechnung der Zahlen $N_{12}, N_{21}, N_{23}, N_{32}$ *etc. für jedes Zeitelement* Δt *immer wieder der Stosszahlansatz* (7) *zugrunde gelegt wird, so erhält man eine monotone Abnahme für die Unterschiede der Zahlen* f_1, f_2, f_3, f_4. *(Einseitige Annäherung an Verteilung 5.)*

6. Das Boltzmannsche *H*-Theorem: Die kinetische Deutung einseitig verlaufender Prozesse[49]**.** Die Kritik des Stosszahlansatzes und seiner Folgerungen setzte ein, sobald man es als Paradoxon empfand, dass die durchaus *reversiblen* Gasmodelle der kinetischen Theorie imstande sein sollen, wesentlich einseitig verlaufende, *irreversible* Prozesse zu deuten. Nun wurde gerade durch das *Boltzmannsche H-Theorem* das Studium der nichtstationären[50], irreversiblen Prozesse in den Vordergrund gestellt: um zu zeigen, wie jede Nicht-*Maxwell*sche Verteilung sich einseitig der *Maxwell*schen nähert, fasst dieses Theorem alle dabei stattfindenden Einzelprozesse (darunter Wärmeleitung und innere Reibung) zu einem einzigen, *einseitig verlaufenden* Totalprozess zusammen und gipfelt in der *kinetischen Deutung des Postulats der*

---

49) *Boltzmann* [6, 7, 16]; *Lorentz* [1] (1887).

50) Allerdings hatten schon viel früher *Clausius* und *Maxwell* Reibung, Wärmeleitung und Diffusion kinetisch gedeutet. Da sie sich aber auf *stationäre* Fälle beschränkten, so trat dabei das im Text angedeutete Paradoxon noch nicht zum Bewusstsein.

Thermodynamik, dass bei solchen irreversiblen Prozessen die Entropie einseitig zunimmt[51]).

Boltzmann stellt der Entropie eine bestimmte eindeutige Funktion der jeweiligen Zustandsverteilung der Moleküle gegenüber, die sogenannte H-Funktion[52]). Für eine Zustandsverteilung, die von der *Maxwell-Boltzmann*schen zunächst beliebig verschieden sein kann, bezeichne $f \cdot \Delta\tau$ die Zahl derjenigen Moleküle, deren Zustand innerhalb des kleinen Variabilitätsbereiches $\Delta\tau$[53]) liegt. Dann ist die Funktion H definiert durch

$$H = \sum f \log f \cdot \Delta\tau, \tag{10}$$

die Summe[54]) erstreckt über alle überhaupt möglichen Bereiche $\Delta\tau$.

Der Kalkül des *H-Theorems* liefert eine *einseitige Abnahme* der Grösse H mit wachsender Zeit unter der Wirkung der Zusammenstösse: Wenn das sich selbstüberlassene Gasmodell zu den Zeiten $\ldots t_1, t_2, t_3 \ldots t_n \ldots$ die Bewegungsphasen

$$\ldots \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1}, \Gamma_n \ldots \tag{11}$$

durchläuft, so gelten für die zugehörigen Werte der Grösse H die Ungleichungen

$$\ldots H_1 \geqq H_2 \ldots \geqq H_{n-1} \geqq H_n \ldots \tag{12}$$

und zwar gelten die Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung eingetreten ist[54a]). Die Grösse H verhält sich also in Bezug auf die zeitliche Änderung wie die negativ genommene Entropie[55]).

---

51) Vgl. zu diesem Postulat Nr. **17**.

52) In seinen ersten Publikationen über das H-Theorem bezeichnet *Boltzmann* diese Funktion noch mit E (Entropie).

53) Wegen der näheren Definition von $\Delta\tau$, durch die Gl. 10 erst einen bestimmten Sinn erhält, vgl. Anm. 111.

54) $\Delta\tau$ wird gewöhnlich als Differential geschrieben und entsprechend die Summe als mehrfaches Integral. Vgl. dazu *Boltzmann* [6 — Kap. II] [10 — Kap. II], ferner Nr. **12**e und Anm. 110.

54a) Vgl. V 8, Nr. **11**. Im Beispiel: Nr. **5** (Zwischenstück) bleibt H konstant, sobald $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$ geworden ist.

55) In der Thermodynamik ist die Entropie nur für Gleichgewichtszustände definiert. *Boltzmann* hat nun für eine sehr allgemeine Klasse von Gasmodellen durch Auswertung der Funktion H nachgewiesen — [6 — Kap. VI] [10 — Kap. V], auch Gastheorie I, p. 139 —, dass sie für Gleichgewichtszustände bis auf eine additive Konstante mit der *negativ genommenen* Entropie zusammenfällt. Für *Nicht*-Gleichgewicht ist ($-H$) eine Verallgemeinerung der thermodynamischen Entropie. Über die *kombinatorische* Bedeutung der Grösse H vgl. Nr. **12**d.

7. Die Einwände gegen das Irreversibilitätsresultat.

7a. Der Loschmidtsche Umkehreinwand (1876)[56]. Für zwei Bewegungsphasen Γ_s und Γ_s' mögen alle Moleküle 1. gleiche Lagen, 2. entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten besitzen. Sind H_s und H_s' die entsprechenden Werte der H-Funktion, so folgt unmittelbar aus der Definition (10)[57], dass

(13) $$H_s' = H_s.$$

Nun ist ferner das Gasmodell ein konservativ-mechanisches System. Ist es somit einer Bewegung fähig, die durch die Phasenreihe (11) führt, so ist es genau ebenso einer Bewegung fähig:

(14) $$\ldots \Gamma_n', \Gamma_{n-1}' \ldots . \Gamma_2', \Gamma_1' \ldots$$

Bei *dieser* Bewegung gilt dann wegen (13) und (12):

(15) $$\ldots H_n' \leqq H_{n-1}' \ldots . \leqq H_2' \leqq H_1' \ldots$$

Zu je einer Bewegung des Modells, bei der H von H_1 auf H_n abnimmt, existiert also eine Bewegung, bei der H in genau umgekehrter Weise von H_n auf H_1 anwächst[57a].

7b. Der Zermelosche Wiederkehreinwand[58]. *E. Zermelo* hat durch Heranziehung eines mechanischen Theorems von *H. Poincaré*[59] gezeigt: *Das übliche kinetische Modell eines vollständig und dauernd isolierten Gases verhält sich quasiperiodisch.* Ausführlicher: Die Bewegung des Modelles liefere von t_1 bis t_n die Phasenreihe (11), bei der H von einem relativ hohen Wert H_1 auf einen kleinen Wert H absinkt. Es wird dann nach einer *endlichen*[60] (wenn auch enorm langen[61])

---

56) *Loschmidt* [1].

57) Dazu muss man auf die strenge Definition von $\Delta\tau$ zurückgreifen. Leicht verifizierbar für Beispiel (3') und besonders für Beispiel von Nr. 5 (Zwischenstück). Dort ist $H = f_1 \lg f_1 + \cdots f_4 \lg f_4$, ferner $f_1' = f_3$, $f_2' = f_4$, $f_3' = f_1$, $f_4' = f_2$, also $H' = H$.

57a) Wenn man im Beispiel Nr. 5 (Zwischenstück) im Moment t_n die Geschwindigkeiten aller P-Moleküle invertiert, so würde die verhältnismässig ausgeglichene Geschwindigkeitsverteilung sich allmählich wieder zurückverwandeln in mehr unausgeglichene.

58) *Zermelo* [1] (1896). Dieser Wiederkehreinwand wird neuerdings häufig nach *Gibbs* „Statist. Mechanik" Kap. 12 zitiert, wo *Zermelo* nicht erwähnt ist.

59) *Poincaré* [1]. Ausführliche Darlegung der Gültigkeitbedingungen bei *Boltzmann* [20].

60) Unter allen Bewegungen des Systems sind im allgemeinen auch derartig asymptotisch verlaufende enthalten, dass sie sich *nicht* der obigen Charakterisierung fügen. Ihre Mannigfaltigkeit ist aber mindestens um eine Einheit niedriger als die Mannigfaltigkeit aller Bewegungen. Aus diesem Grunde kommen solche Ausnahmebewegungen für den vorliegenden Streit nicht in Betracht. Vgl. *Boltzmann* [20]. *Gibbs*, Statist. Mech., Kap. XII.

Zeit in der ungestört weiter verlaufenden Bewegung eine Phasenfolge

$$(15^a) \qquad \ldots (\Gamma_1), (\Gamma_2) \ldots . (\Gamma_{n-1}), (\Gamma_n) \ldots$$

vorkommen, die in allen Daten beliebig nahe mit der Phasenfolge (11) übereinstimmt. Es werden dabei die H-Werte

$$(16) \qquad \ldots (H_1), (H_2) \ldots . (H_{n-1}), (H_n) \ldots$$

durchlaufen, wo (H_s) sehr nahe gleich H_s ist. Wegen $H_1 > H_n$ und (H_1) nahe gleich H_1 folgt

$$(17) \qquad (H_1) > H_n.$$

Im Verlauf der Bewegung von der Phase Γ_n bis zur Phase (Γ_1) hat also entgegen der obigen Formulierung des H-Theorems, die Funktion H wieder grössere Werte angenommen.

8. Abschliessende Bemerkung. Die *ausnahmslos* einseitige *Abnahme* von H (ausnahmslos einseitige Annäherung an die *Maxwell*sche Verteilung) errechnet sich nur dadurch, dass im Kalkül des H-Theorems für jedes Δt *ausnahmslos* der *Stosszahlansatz* wiederholt wird. Somit richten sich der Umkehr- und Wiederkehreinwand vor allem gegen ihn[62]).

61) Versuch einer numerischen Abschätzung bei *Boltzmann* [18, 19].

62) Vgl. z. B. *Burbury* [Treatise § 39] (1899); *Lippmann* [1] (1900); *Liénard* [1] (1903). — Die dort entwickelte Kritik des Stosszahlansatzes lässt sich folgendermaassen an dem in **5** (Zwischenstück) skizzierten Modell erläutern: Wir greifen aus einer längeren ungestörten Bewegung das Zeitelement Δt heraus und betrachten in der exakt umgekehrten Bewegung das entsprechende Zeitelement. Sei für die direkte Bewegung: f_1, f_2, f_3, f_4 die Geschwindigkeitsverteilung *vor* Δt; $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}, \overline{f_4}$ die Geschwindigkeitsverteilung *nach* Δt. Sei $N_{12}\Delta t$ die Zahl der (1, 2)-Stösse *während* Δt. Sei analog für die umgekehrt laufende Bewegung: f_1', f_2', f_3', f_4' die Geschwindigkeitsverteilung vor Δt und $N'_{21}\Delta t$ die Zahl der (2, 1)-Stösse *während* Δt. Da die beiden Vorgänge, abgesehen von dem Bewegungssinn der P-Moleküle, identisch sind, so folgt:

$$(a) \qquad f_1' = \overline{f_3}, \quad f_2' = \overline{f_4}, \quad f_3' = \overline{f_1}, \quad f_4' = \overline{f_2}$$

und

$$(b) \qquad N'_{21}\Delta t = N_{12}\Delta t.$$

Würde man sowohl für die direkte als auch für die inverse Bewegung den Stosszahlansatz machen, so ginge die Gl. (b) über in (vgl. Gl. 7 und 8):

$$(c) \qquad f_2' \cdot k \cdot \Delta t = f_1 k \cdot \Delta t.$$

Also müsste wegen (a) gelten:

$$(d) \qquad \overline{f_4} = f_1.$$

Diese Gleichung wird aber durchaus nicht erfüllt sein, wenn im herausgegriffenen Zeitintervall die Geschwindigkeitsverteilung $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ noch stark unausgeglichen war. — *Es ist also ausgeschlossen, dass im Fall einer noch unausgeglichenen Geschwindigkeitsverteilung die Stösse während des* (aus einer

Die Weiterentwicklung baute nun die modifizierte, *„statistische“ Auffassung des H-Theorems* auf ganz andere Grundlagen auf, wobei der Stosszahlansatz zunächst vollständig ausgeschaltet erscheint.

Dieser Entwicklung folgend, giebt der nächste Abschnitt zunächst die Grundlagen (Nr. **9**—**14**) und die Formulierung der neuen Auffassung (Nr. **15** u. **17**) und nimmt nur erst anhangsweise die Frage auf, wie nun innerhalb der statistischen Auffassung der Stosszahlansatz weiter zu bilden wäre (Nr. **18**).

II. Die moderne Fassung statistisch-mechanischer Untersuchungen (Kinetostatistik des Gasmodells).

9. Mechanische Eigenschaften des Gasmodells.

9a. Das Gasmodell und seine Phase. Das Gasmodell bestehe aus N untereinander gleichen mehratomigen Molekülen von je r Freiheitsgraden[63]. Unter der (Bewegungs-) *Phase* des Gasmodells zur Zeit t sei verstanden der Inbegriff der folgenden $2rN$ Daten, welche die gleichzeitige Konfiguration und Bewegung aller N Moleküle *exakt* festlegen:

(18a) $q_1^1, q_2^1 \dots q_r^1; \; q_1^2 \dots q_r^2; \dots\dots q_1^N, q_2^N \dots q_r^N$
generalisierte Koordinaten,

(18b) $p_1^1, p_2^1 \dots p_r^1; \; p_1^2 \dots p_r^2; \dots\dots p_1^N, p_2^N \dots p_r^N$
generalisierte Momente[64]).

Die oberen Indices $1 \dots N$ beziehen sich auf die Moleküle, die unteren Indices $1 \dots r$ auf die Freiheitsgrade im Molekül[65]).

Es sei

(19) $\Phi = \Phi(q)$ die potentielle Energie,

(20) $L = L(q, p)$ die kinetische Energie,

(21) $E = L + \Phi$ die totale Energie

des Gasmodelles in der gegebenen Phase.

Die Atombewegungen verändern die Konfigurationen der Atome

---

längeren ungestörten Bewegung herausgegriffenen) *Zeitelements Δt sowohl für die direkte als auch für die inverse Bewegung dem Stosszahlansatz genügen. Mindestens für eine der beiden Bewegungen muss ihre Anzahl vom Stosszahlansatz abweichen.*

63) Vgl. V 8, Nr. **26** oder *Boltzmann*, Gastheorie II, p. 62. — Der allgemeinere Fall mehrerer Sorten von Molekülen sei beiseite gelassen.

64) p_s^k definiert durch $p_s^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s^k}$, also im Falle kartesischer Koordinaten: $p = m\dot{x}$. Vgl. IV **1** (*A. Voss*).

65) *Boltzmann*, Gastheorie II, §§ 44, 45.

$(q_1^1 \ldots q_r^N)$; die äusseren Kräfte, die Kräfte zwischen den Atomen desselben Moleküles und die Kräfte, die bei jedem Zusammenstoss wirksam werden, verändern die Geschwindigkeiten (also auch die Momente $p_1^1 \ldots p_r^N$). Die entsprechende, fortlaufende Veränderung der Phase des Gasmodelles wird zusammenfassend durch die *Hamilton*-kanonischen Bewegungsgleichungen ausgedrückt[66]:

$$\frac{dq_s^k}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_s^k}, \qquad \frac{dp_s^k}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_s^k}. \tag{22}$$

Soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, soll für alle folgenden Erörterungen die Voraussetzung festgehalten werden, dass *das äussere Kraftfeld sich im Verlauf der Zeit nicht verändert*[67].

Dann hängt E nur von den q, p und nicht explicit von t ab; das gleiche gilt dann also für die Grössen

$$\frac{dq_s^k}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dp_s^k}{dt}.$$

Es lassen sich in diesem Falle bekanntlich die $2rN$ Integrale der Gleichungen (22) auf die Form bringen:[68]

$$\varphi_1(q, p) \equiv E(q, p) = c_1, \tag{23a}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2(q, p) = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{2rN-1}(q, p) = c_{2rN-1}, \end{array}\right\} \tag{23b}$$

$$\varphi_{2rN}(q, p) = c_{2rN} + t. \tag{23c}$$

9b. Der Phasenraum des Gasmodells (Γ-Raum). Die $2rN$ Grössen (18a) und (18b), welche die jeweilige Phase des Gasmodelles charakterisieren, denken wir uns abgebildet durch die $2rN$ kartesischen Koordinaten eines Bildpunktes G in einem *Γ-Raum* von $2rN$-Dimensionen[69]. Während sich das Gasmodell gemäss den Gl. (22) bewegt,

---

66) Vgl. IV 1 (*A. Voss*).

67) Ein Gas sei in einen Zylinder mit Stempel eingeschlossen, und es komme überdies die Wirkung irgendeines kontinuierlichen Kraftfeldes in Betracht. So lange der Stempel nicht bewegt und jenes Kraftfeld nicht verändert wird, ist obige Bedingung erfüllt. Sie wird aber z. B. durch die Bewegung des Stempels (Stempelwirkung als elastisches Kraftfeld aufgefasst) durchbrochen; wir *wirken* auf das Gas, indem wir das auf die Moleküle angreifende Kraftfeld zeitlich verändern. Vgl. dazu Nr. **23**b.

68) Dividiert man nämlich z. B. die $(2rN - 1)$ ersten unter den Gl. 22 durch die letzte, so erhält man $2rN - 1$ von t und dt freie Differentialgl., die ebensoviele zeitfreie Integrale (23a) und (23b) liefern. Aus der letzten unter den Gl. 22 kann man t durch eine Quadratur bestimmen (23c).

wandert sein Phasenbildpunkt G[70]) auf einer bestimmten Bahn[71]) durch den Γ-Raum. Ihre Gestalt und Lage wird festgelegt durch die $2rN-1$ zeitfreien Integrale (23a) und (23b): Die einzelne *G-Bahn* liegt in ihrem ganzen Verlauf auf der *„Energiefläche“* $E(q,p)=c_1$, und sie ist der eindimensionale Schnitt, dieser $(2rN-1)$-dimensionalen Hyperfläche mit den $(2rN-2)$ anderen Hyperflächen:

$$\varphi_2 = c_2 \ldots, \quad \varphi_{2rN-1} = c_{2rN-1}.$$

Das Integral (23c) bestimmt die Zeiten, zu denen der G-Punkt die verschiedenen Punkte der G-Bahn durchläuft[72]).

Irgendeine, den Grössen q, p auferlegte *Ungleichung* (A) grenze ein infinitesimal $2rN$-*dimensionales* Gebiet (A) im Γ-Raume ab. Das *Volumen*[73]) $[A]$ des Gebietes (A) werde dann definiert durch das Integral

(24) $$[A] = \int_{(A)} \ldots \int dq_1^1 \ldots dp_r^N.$$

Eine *Ungleichung* (A) grenze *auf der Hyperfläche* $E(q,p)=c_1$ ein $(2rN-1)$-dimensionales Gebiet $(A, E)^{(-1)}$ ab. Der *Inhalt* $[A,E]^{(-1)}$ *des infinitesimalen Gebietes* $(A,E)^{(-1)}$ werde definiert durch das Integral

(25)[74]) $$[A,E]^{(-1)} = \frac{Q}{\dfrac{\partial E}{\partial s_{2rN}}} \int_{(A,E)^{(-1)}} \cdots \cdots \int ds_1 \ldots ds_{2rN-1}.$$

---

69) Vgl. Anm. 109 über das Verhältnis von Γ(Gas-Phasen)-Raum zu μ(Molekül-Phasen)-Raum.

70) G möge einen laufenden Bildpunkt bezeichnen, der die Phasenänderung eines Gasmodells verfolgt; Γ hingegen den festen Bildpunkt eines festgehaltenen (q,p)-Werte-Systems.

71) Die Gleichungen (22) ordnen jedem Punkte Γ eine Fortschreitungsrichtung zu, in der er von G-Punkten durchlaufen wird. Wenn, wie wir annehmen, das Kraftfeld nicht explizit von t abhängt, so sind diese über den Γ-Raum ausgebreiteten Fortschreitungsrichtungen für alle Zeiten dieselben. Sie lassen sich deswegen zu $\infty^{(2rN-1)}$ starren G-Bahnen zusammenfassen. Wegen der Eindeutigkeit der dynamischen Gleichungen geht — von singulären Stellen abgesehen — durch jeden Γ-Punkt nur *eine* G-Bahn.

72) Haben für zwei Bewegungen die Grössen $c_1 \cdots c_{2rN-1}$ dieselben Werte und sind nur c_{2rN} um Δc_{2rN} verschieden, so durchlaufen die beiden entsprechenden G-Punkte dieselbe G-Bahn, nur mit der konstanten Zeitdifferenz Δc_{2rN}. Das Zeitmittel irgendeiner Funktion $\psi(q,p)$ der Phase, gebildet von $t=-\infty$ bis $t=+\infty$, ist also für beide Bewegungen gleich. Vgl. Fussn. 88c.

73) Eine eingehendere Darlegung über „Volumen“, „Inhalt“ usw. im Γ-Raum vgl. bei *Lorentz* [1].

74) Für den dreidimensionalen Raum würde man haben:

$$[A,E]^{(-1)} = \frac{1}{\cos(N,z)} \int\int dx\,dy; \qquad \cos(N,z) = \frac{\dfrac{\partial E}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial E}{\partial z}\right)^2}}.$$

Hier bezeichnen $s_1 \dots s_{2rN}$ durchlaufend und in beliebiger Anordnung die Grössen $q_1{}^1 \dots p_r^N$. Das infinitesimale Integrationsgebiet $\overline{(A, E)}^{(-1)}$ wird gebildet durch den Inbegriff der Werte, den die Variabeln $s_1 \dots s_{2rN-1}$ annehmen können, wenn der Phasenpunkt auf das Gebiet $(A, E)^{(-1)}$ beschränkt ist[75]. Endlich ist Q zur Abkürzung gesetzt für:

$$(25a) \qquad Q = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial s_1}\right)^2 + \cdots \left(\frac{\partial E}{\partial s_{2rN}}\right)^2}.$$

Wegen der infinitesimalen Ausdehnung des Gebietes durfte der Integrand vor das Integralzeichen genommen werden.

9c. Das Liouvillesche Theorem. Die G-Punkte, welche zur Zeit t_0 ein infinitesimales $2rN$-dimensionales Γ-Gebiet (A_0) vom Volumen $[A_0]$ zusammensetzen, erfüllen im Lauf ihrer Bewegung zu den Zeiten $t_1, t_2 \dots t_s \dots$ die Gebiete $(A_1) \dots (A_s)$ mit dem respektiven Volumen $[A_1] \dots [A_s]$. — *Aus der besonderen Gestalt der Gl. 22, welche die Strömung der G-Punkte beherrschen, ergiebt sich die* Folgerung, dass für eine beliebige Wahl[76] von (A_0) gilt:

$$(26) \qquad [A_0] = [A_1] = \cdots [A_s].$$

Das Liouvillesche Theorem:[77] *Die durch die Gl. 22 im Γ-Raum festgelegte Strömung der G-Punkte erzeugt eine kontinuierliche Punkt-*

---

75) Das Integrationsgebiet $\overline{(A, E)}^{(-1)}$ kann angesehen werden als die *Projektion* des Gebietes $(A, E)^{(-1)}$ auf den ebenen Raum: $s_{2rN} = 0$.

76) Im Gegensatz zur folgenden Gleichung (27) ist hier nicht nötig, sich auf infinitesimale Gebiete zu beschränken.

77) *Beweis*: Aus den Gl. 22 folgt:

$$(A) \qquad \frac{\partial \dot{q}_s^k}{\partial q_s^k} + \frac{\partial \dot{p}_s^k}{\partial p_s^k} = 0.$$

Summiert man über alle (rN) Freiheitsgrade, so erhält man für die Strömung der G-Punkte eine *Gleichung* (B), die analog ist zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

der Inkompressibilitätsbedingung in der *Euler*schen Form. Von ihr geht man leicht über zur *Lagrange*schen Form der Inkompressibilitätsgleichung:

$$(B) \qquad \frac{\partial (q_1^1, \dots\dots p_r^N)}{\partial (q_{10}^1, \dots\dots p_{r0}^N)} = 1,$$

womit dann die im Text formulierte Behauptung bewiesen ist. Siehe *Boltzmann*, Gasth. I, § 26; *Gibbs*, Statist. Mech., Kap. 1. Die Gl. (A) tritt zuerst auf bei *Liouville*, J. de math. 3 (1838), p. 348. Sie wurde von *Jacobi* (Vorles. u. Dynamik, p. 93) verwendet (letzter Multiplik.); die Deutung als Inkompressibilitätsgleichung in einem Γ-Raum und ihre Verwertung für die Gastheorie stammt von *Boltzmann* [2, 3].

transformation, die jedes $2rN$-dimensionale Gebiet in ein volumengleiches Gebiet transformiert[77a]).

Verfolgt man analog die G-Punkte, welche zur Zeit t_0 ein infinitesimales, $(2rN-1)$-dimensionales Gebiet $(A, E)_0^{(-1)}$ vom Inhalt $[A, E]_0^{(-1)}$ zusammensetzen, so erhält man als unmittelbare Folgerung aus Gl. (26) die Beziehung[78]):

$$(27) \qquad \frac{[A, E]_0^{(-1)}}{Q_0} = \frac{[A, E]_1^{(-1)}}{Q_1} = \cdots = \frac{[A, E]_s^{(-1)}}{Q_s}.$$

9d. Stationäre Dichtenverteilungen im Γ-Raum[79]). Zur Zeit t_0 werde über den unbegrenzten Γ-Raum eine unendliche Menge von G-Punkten verteilt, und zwar derart, dass sich unter Zugrundelegung einer passenden Massbestimmung für jeden Punkt des Γ-Raumes eine bestimmte „räumliche" Verteilungsdichte ϱ_0 ergiebt[80]). — Wählt man

---

77a) Eine graphische Erläuterung dieses Theorems für Systeme von *einem* Freiheitsgrad (freier Fall und Pendelschwingung) bei *G. H. Bryan*, Phil. mag. (5) 37 (1895), p. 532. Würde als Γ-Raum statt des (q, p)-Raumes ein $(q, \dot{q})$-Raum verwendet, so würden in einem solchen Raum die G-Punkte in konsekutiven Zeitpunkten Gebiete erfüllen, für die das Integral

$$\frac{\partial(p_1{}^1 \ldots p_r^N)}{\partial(\dot{q}_1{}^1 \ldots \dot{q}_r^N)} \int \cdots \int dq_1{}^1 \cdots dq_r^N d\dot{q}_1{}^1 \cdots d\dot{q}_r^N$$

immer denselben Wert liefert. Da die Funktionaldeterminante im allgemeinen eine Funktion von $q_1{}^1 \ldots q_r^N$ ist, die sich entlang der G-Bahn verändert, so würden also die G-Punkte in konsekutiven Zeitpunkten im allgemeinen verschieden grosse Volumina erfüllen. In bezug auf das *Liouville*-Theorem zeichnet sich also der (q, p)-Raum durch besondere Einfachheit aus. Vgl. Anm. 170.

78) Betrachtet man nämlich zwei unendlich benachbarte Energieflächen $E(q, p) = c_1$ und $E(q, p) = c_1 + \delta c_1$, so ändert sich ihr Abstand δN entlang einer G-Bahn umgekehrt proportional zu Q. Damit also das auf $(A, E)^{(-1)}$ aufgebaute dosenförmige Gebiet sein *Volumen*

$$[A, E]^{(-1)} \delta N$$

nicht ändere (Gl. 26), muss $(A, E)^{(-1)}$ sich gemäss der Gl. (27) dilatieren und kontrahieren.

79) Diese *stationären* Dichtenverteilungen besitzen eine Sonderstellung für Wahrscheinlichkeitsansätze. Vgl. Anm. 170 (d).

80) Die ∞ vielen G-Punkte repräsentieren ∞ viele identische Exemplare unseres Gasmodells, die zur Zeit t aus allen überhaupt denkbaren Phasen losgelassen werden und sich weiterhin *unabhängig voneinander* unter identischen Bedingungen (d. h. für alle ist $E(q, p)$ dieselbe Funktion) weiterbewegen. Die Fiktion solcher Scharen von ∞ vielen identischen unabhängigen *Gasmodellen* gestattet gewisse „Wahrscheinlichkeitshypothesen" zu ersetzen durch statistische Festsetzungen. Sie wurde *explizit* zum erstenmal von *Maxwell* [3] (1878) formuliert und benutzt — und bei dieser Gelegenheit bezeichnete er Untersuchungen über solche Scharen von Gasmodellen als statistisch-mechanische (vgl. Anm. 3).

zur Zeit t_0 die Funktion $\varrho_0(q, p)$ ganz willkürlich, so wird im Allgemeinen bei der anschliessenden Strömung der G-Punkte die Dichte in jedem Γ-Punkte sich zeitlich verändern[80a]).

Aus (26) folgt, dass

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0. \tag{26'}$$

Die *Verteilung der „räumlichen" Dichte* ϱ wird sich *dann und nur dann* gegenüber der Strömung (22) stationär aufrecht erhalten, wenn $\varrho_0(q, p)$ *entlang jeder einzelnen G-Bahn konstant* gewählt wurde (für verschiedene G-Bahnen darf man $\varrho_0(q, p)$ beliebig verschieden wählen); d. h. wenn $\varrho_0(q, p)$ die Form hat:

$$\varrho_0(q, p) = F(E, \varphi_2, \ldots \varphi_{2rN-1}) \tag{28}$$

unter F eine beliebige eindeutige Funktion ihrer $2rN - 1$ Argumente verstanden[81]).

Analog kann man eine Verteilung einer unendlichen G-Punkt-Menge über die $(2rN - 1)$-dimensionale Hyperfläche $E(q, p) = c_1$ vornehmen, mit der *„Flächendichte"* $\sigma_0(q, p)$. — Die *hinreichende und notwendige Bedingung für die Stationarität dieser „Flächendichte"* σ *ist gegeben durch*[82]):

$$\sigma_0(q, p) = \frac{1}{Q(q, p)} F(\varphi_2 \ldots \varphi_{2rN-1}). \tag{29}$$

Hier ist F eine beliebige eindeutige Funktion ihrer $(2rN - 2)$ Argumente, — Q definiert durch (25a), — (q, p) gebunden an die Bedingung $E(q, p) = c_1$.

Aber schon 7 Jahre vorher hatte *Boltzmann* [4] (1871) wesentlich mit diesen selben Schaaren operiert (vgl. Anm. 98).

80a) Weiterhin wird dann also eine solche Verteilung der ∞ vielen Gasexemplare über die verschiedenen Phasengebiete gesucht, dass *in* jedes Phasengebiet während dt ebensoviele Gasmodelle durch ihre Bewegung eintreten, als *aus* ihm in gleicher Zeit austreten.

81) $E, \varphi_2 \ldots \varphi_{2rN-1}$ sind $2rN - 1$ voneinander unabhängige Funktionen der $2rN$ Parameter (q, p), welche entlang jeder einzelnen G-Bahn konstant bleiben; jede andere Funktion, die der gleichen Forderung genügen soll, lässt sich also schon durch jene $(2rN - 1)$ Funktionen ausdrücken.

82) Nach Gl. (27) verändert sich der *Inhalt* eines infinitesimalen $(A, E)^{(-1)}$ proportional mit Q, während seine G-Punkte über die E-Fläche laufen. Dabei verändert sich also deren „Flächendichte" σ derart, dass σQ einen konstanten Wert beibehält. Sollen sich also die $\sigma_0(q, p)$ stationär aufrecht erhalten, so muss von vornherein $\sigma_0 Q$ für alle Punkte einer und derselben G-Bahn ein und denselben Wert besitzen. Von einer G-Bahn zur andern darf er sich noch beliebig verändern.

10. Das Gasmodell als ergodisches System.

10a. Ergodische mechanische Systeme[83]). Es lassen sich mechanische Systeme von folgender Eigenschaft angeben: ihre Bewegungen verlaufen in ungeschlossenen G-Bahnen[84]), und zwar derart, dass die einzelne G-Bahn im Γ-Raum ein mehrdimensionales Gebiet überall dicht überdeckt[85]).

Unter Berufung auf dieses Vorkommnis haben *Boltzmann*[86]) und *Maxwell*[87]) eine Klasse von mechanischen Systemen durch die folgende Forderung definiert:

Die einzelne ungestörte Bewegung des Systems führt bei unbegrenzter Fortsetzung schliesslich „*durch jeden Phasenpunkt hindurch*“, der mit der mitgegebenen Totalenergie verträglich ist. — Ein mechanisches System, dass diese Forderung erfüllt, nennt *Boltzmann* ein *ergodisches System*[88]).

Aus dieser Definition ziehen *Boltzmann* und *Maxwell* unmittelbar die nachstehenden Folgerungen:

---

83) Man hat weiterhin immer die Begriffe und Bezeichnungen zu unterscheiden: a) Ergodisches *System*, b) Ergodische *Dichtenverteilungen* im Γ-Raum. Über die Beziehung, in der b) zu a) steht, vgl. Anm. 92.

84) *Boltzmann* [4. Kap. II] (1871) auch [15] (1886) führt unter anderen folgendes Beispiel an: Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene unter der Wirkung einer Anziehungskraft mit dem Potential $\frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$, falls a zu b irrational ist — die ungeschlossenen Lissajousfiguren im Falle irrationalen Periodenverhältnisses. Der bewegte Punkt kommt bei seiner einzelnen Bewegung schliesslich jedem Punkt im Innern eines gewissen Rechteckes beliebig nahe.

85) Die Lissajousfigur des obigen Beispiels ist gewissermaassen die Projektion einer zugehörigen G-Bahn aus dem (x, y, u, v)-Raum auf die (x, y)-Ebene. Daher zeigt sie Selbstüberkreuzungen, die der zugehörigen G-Bahn selbst durchaus fehlen. In topologischer Beziehung kann man sich den Verlauf der letzteren verdeutlichen an einer ungeschlossenen geodätischen Linie auf der Oberfläche eines Torus: Ohne sich zu durchkreuzen, kommt sie jedem der ∞^2 Punkte (x, y, u, v) beliebig nahe, die den Gleichungen genügen:

$$\frac{m}{2}u^2 + \frac{ax^2}{2} = c_1, \quad \frac{m}{2}v^2 + \frac{by^2}{2} = c_2$$

(c_1 und c_2 die Energieen, die man den beiden Teilschwingungen zur Zeit t_0 gab). Es fällt nicht schwer, rein geometrisch auch solche Kurvenschaaren zu definieren, dass die einzelne Kurve der Schaar z. B. jedem der ∞^3 Punkte im Innern des Torus beliebig nahe kommt.

86) *Boltzmann* [4] (1871), vgl. schon Schluss von [2] (1868).

87) *Maxwell* [3] (1878).

88) ἔργον = Energie, ὁδὸς = Weg: Die G-Bahn geht durch alle Punkte der Energiefläche. Diese *Bezeichnung* gebraucht *Boltzmann* das erste Mal in der Arbeit [15] (1886). *Maxwell* und mit ihm die englischen Autoren gebrauchen in diesem Zusammenhang die Bezeichnung: „*assumption* of the continuity of path“ (path = G-Bahn).

1. Bei einem ergodischen System verlaufen alle Bewegungen gleicher Totalenergie $E(q, p) = E_0$ in derselben G-Bahn[88a]).

2. D. h. alle diese Bewegungen unterscheiden sich nur noch durch den Wert der Konstanten c_{2rN}, die additiv zur Zeit hinzutritt (vgl. Integral 23c)[88b]).

3. Sie liefern für jede Funktion der Bewegungsphase $\varphi(q, p)$ ein und dasselbe Zeitmittel[88c]).

Gerade wegen dieser letzteren Eigenschaft tritt in den Untersuchungen *Boltzmanns* die Definition ergodischer Systeme auf und dazu die Hypothese, dass die Gasmodelle ergodische Systeme sind (vgl. Nr. **11**).

Nun ist aber die *Existenz* ergodischer Systeme (d. h. die *Widerspruchslosigkeit ihrer Definition*) durchaus *zweifelhaft*: Es ist bis jetzt nicht einmal das Beispiel eines solchen mechanischen Systemes bekannt, bei welchem die einzelne G-Bahn jedem Punkt der zugehörigen „Energiefläche" *beliebig nahe kommt*[89]). — Vollends aber ist kein Beispiel bekannt, bei dem die einzelne G-Bahn *durch* jeden Punkt der zugehörigen Energiefläche *hindurchgeht*[89a]). Und doch fordert das letztere

---

88a) Die Überlegung verläuft etwa so: die einzelne G-Bahn geht „*durch* jeden Phasenpunkt" der Energiefläche. Anderseits geht durch jeden Phasenpunkt Γ nur eine einzige Fortschreitungslinie (Anm. 71), also gelangt man zur Folgerung (1). Zum Beleg vgl. bes. *Boltzmann* [15].

88b) Vgl. diesbezüglich in *Boltzmann* [15] das, was dort über die *Phasendifferenz* der beiden Teilschwingungen in einer Lissajousbewegung für den Fall irrationalen Periodenverhältnisses gesagt wird.

88c) Dieses Zeitmittel ist definiert durch:

$$\lim_{\substack{T_1 = -\infty \\ T_2 = +\infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \varphi(q, p)\, dt;$$

vgl. Anm. 72.

89) Um zu erreichen, dass bei der in Anm. (84) angeführten Bewegung die G-Bahn allen ∞^3 Γ-Punkten beliebig nahekommt, die nur mehr der *einen* Gleichung

$$\frac{m}{2}(u^2 + v^2) + \frac{ax^2 + by^2}{2} = E_0$$

genügen, denkt sich *Boltzmann* in der x, y-Ebene ein unendlich kleines elastisches Hindernis angebracht, an das der schwingende Punkt im Verlauf seiner Bewegung immer wieder anstösst. Ähnlich in anderen Beispielen. Vgl. über diesen Punkt auch *Lord Rayleigh* [2]. Wegen der Komplikation der Zusammenstösse, welche die Moleküle aneinander und an den rauhen, vollkommen elastischen Gefässwänden erleiden, halten *Boltzmann* und *Maxwell* die Annahme für gerechtfertigt, dass die Gasmodelle ergodische Modelle sind.

89a) Zur Erläuterung des Unterschiedes zwischen den Forderungen: I. „jedem Punkt der Energiefläche beliebig nahe kommen"; II. „durch jeden Punkt der

nicht nur der *Wortlaut* der *Boltzmann-Maxwell*schen Definition, sondern gerade auf diesem Zug der Definition bauen beide Autoren die Behauptung auf, dass bei dem Gasmodell als einem ergodischen System alle Bewegungen gleicher Totalenergie dieselbe φ-Bahn durchlaufen und *deshalb* für jedes $\varphi(q, p)$ gleiche Zeitmittel liefern[90]).

10b. Ergodische Dichtenverteilungen im Γ-Raum. In der Litteratur sind hauptsächlich nur folgende *spezielle* Fälle von stationären Dichtenverteilungen betrachtet worden:

(30) (vgl. 28) $$\varrho(q, p) = F(E)$$

für die „*räumliche*" Dichte einer Verteilung über den Γ-Raum[91]). Ferner

(31) (vgl. 29) $$\sigma(q, p) = \frac{1}{Q(q, p)}$$

für die „*Flächendichte*" einer Verteilung über die Energiefläche

$$E(q, p) = E_0$$ [92]).

Zu dieser Spezialisierung der Dichtenwahl ist zu bemerken:

Energiefläche hindurchgehen" betrachte man wieder eine geodätische Linie auf dem Torus mit einer irrationalen Windungszahl, z. B. etwas grösser als $1/2$. Sie durchsetzt einen Meridionalkreis in ∞ vielen Punkten P_h, die überall dicht über die Peripherie verteilt sind. Anderseits kann man behaupten, dass man aus P_h durch keine noch so grosse Zahl von Umläufen längs der geodätischen Linie *in* den Punkt Q gelangen kann, der dem P_h auf dem Meridiankreis diametral gegenüberliegt — andernfalls würde man ja durch die doppelte Zahl von Umläufen von P_h zu P_h zurückgelangen, was der Voraussetzung widerspricht. Man erkennt auf diesem Wege leicht, dass die Menge der Punkte P_h, die von der gegebenen geodätischen Linie *erreicht* werden, eine abzählbare Menge bildet inmitten des Kontinuums von Peripheriepunkten, denen die geodätische Linie *beliebig nahe* kommt.

90) Nennt man für den Augenblick solche Systeme, welche nur die Forderung I in 89a) erfüllen, „quasi-ergodische", so wird man in Gegenüberstellung zu den Folgerungen 1) 2) 3) im Text sagen müssen: Für ein *quasiergodisches* System hat man auf jeder Fläche $E(q, p) = E_0$ ein Kontinuum von ∞^{2rN-2} voneinander verschiedenen G-Bahnen mit verschiedenen Werten der Konstanten c_2 bis c_{2rN-1} zu unterscheiden. Auf quasiergodische Systeme lässt sich also nicht die *Boltzmann-Maxwellsche* Begründung der Behauptung (3) übertragen.

91) Vgl. Anm. 170(f).

92) Für ein ergodisches *System* wäre die ergodische *Dichtenverteilung* (31) die *einzige*, welche sich stationär aufrecht erhalten kann: Einerseits sollen nach 88a) alle Punkte der Fläche $E(q, p) = E_0$ auf einer und derselben G-Bahn des Systems liegen. Anderseits muss nach Gl. (29) das Produkt σQ entlang der einzelnen G-Bahn konstant bleiben. Für ein *nicht*-ergodisches System sind die Verteilungen (30) und (31) auch stationär, erscheinen dann aber als willkürlich spezialisiert.

1. Sie ist ausschlaggebend für das Zustandekommen der Hauptresultate in der statistischen Theorie der Gasbewegungen (vgl. dazu Anm. 170).

2. Als *Maxwell* und *Boltzmann* diese speziellen Dichtenverteilungen zum erstenmal einführten, beriefen sie sich zur Rechtfertigung ausdrücklich auf die Hypothese, dass die Gasmodelle ergodische Systeme sind[93]).

In der späteren Litteratur wurde allgemein diese spezielle Wahl beibehalten, während dann in der Regel von der Ergodenhypothese keine Rede mehr ist[94]).

Es empfiehlt sich, die speziellen Dichtenverteilungen (30), (31) als *ergodische* zu bezeichnen, um daran zu erinnern, dass bis jetzt keinesfalls ein anderer Rechtfertigungsversuch für ihre Wahl vorliegt als die Berufung auf die Ergodenhypothese.

11. Das mittlere Verhalten des Gasmodelles für eine unbegrenzte Bewegungsdauer.

11a. Die Boltzmannsche Untersuchung. Auf sie wurde *Boltzmann* geführt, als er noch *vor Aufstellung des H-Theorems* nach einem Beweis dafür suchte, dass dem Wärmegleichgewicht nur die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung entspricht[95]).

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet etwa folgende aus der Erfahrung abstrahierte Behauptung[96]): Ein *isoliertes* Gasquantum geht aus jedem vom Wärmegleichgewicht verschiedenen Zustand in das Wärmegleichgewicht über und verharrt darin dauernd. Betrachtet man also das *mittlere Verhalten* eines Gasquantums, das während der sehr langen Zeit T sich selbst überlassen bleibt, so wird bei unbegrenzt wachsendem T schliesslich das *mittlere* Verhalten mit dem *Verhalten im Wärmegleichgewicht* identisch.

---

93) Beschränkt man sich auf *stetige* Dichtenverteilungen $\sigma(q, p)$, so würde auch schon für *quasiergodische* Systeme die Verteilung (31) die einzige sein, die sich stationär aufrecht erhalten kann. Dass aber durch diesen analytischen Kunstgriff physikalisch nichts gewonnen wird, erkennt man bei der Gleichung 33: Das Zeitmittel, von dem dort die Rede ist, kann sich für ein quasiergodisches System von Bahn zu Bahn total unstetig ändern, da es durch eine Mittelbildung über eine unendliche Zeit gewonnen wird.

94) *Boltzmann* selbst führt in seiner Gastheorie II, p. 92 unten die Verteilung (31) ein als „einfachsten Fall“ einer stationären Verteilung und bezeichnet sie auch als „ergodische“, ohne an irgendeiner Stelle dieses Lehrbuches die Ergodenhypothese zu erwähnen.

95) *Boltzmann* [2] (1868).

96) Vgl. die davon abweichende Behauptung, zu der die Fortsetzung dieser Untersuchung in Nr. **13** und **14** führt.

Dementsprechend erscheint als Ziel der erwähnten Untersuchung *Boltzmanns* der Nachweis für folgende Behauptung:

Das mittlere Verhalten eines Gasmodelles während einer unbegrenzt fortgesetzten Bewegung entspricht der Maxwell-Boltzmannschen Zustandsverteilung.

Die fundamentale Voraussetzung dieser Untersuchung ist die Hypothese, dass die Gasmodelle *ergodische Systeme* sind [vgl. Nr. **10**]. Mit ihrer Hilfe berechnete *Boltzmann* das *Zeitmittel* z. B. der kinetischen Energie jedes Atomes (es ergiebt sich für alle Atome der gleiche Wert!)[97]; ebenso die Zeitmittel anderer Funktionen $\varphi(q, p)$, welche sonst noch die *durchschnittliche Zustandsverteilnng* charakterisieren.

Um die genannten Zeitmittel zu berechnen, geht *Boltzmann* aus von der Fiktion einer Schaar von unendlich vielen gleichbeschaffenen Exemplaren des vorgegebenen Gasmodells, die sich gänzlich unabhängig voneinander bewegen[98]), und zwar derart, dass sie alle dieselbe Totalenergie E_0 besitzen, und dass zur Zeit t_0 ihre G-Punkte sich mit der „Flächendichte"

(31a) [vgl. 31] $$\sigma = \frac{1}{Q(q, p)}$$

über die Fläche $E(q, p) = E_0$ verteilen. Nach Nr. **9**d erhält sich diese Verteilung stationär aufrecht[99]).

Bei dieser Phasenverteilung der Systemschaar ergeben sich zunächst die *Zahlmittel* der oben erwähnten Phasenfunktionen $\psi(q, p)$ durch Integration über die Energiefläche[100])

(32) $$\overline{\psi(q, p)} = \frac{\int \psi \cdot \sigma \cdot dS}{\int \sigma \, dS}.$$

Um nun von diesen *Zahlmitteln* zu den von *Boltzmann* gesuchten *Zeitmitteln* zu gelangen, bedarf es noch folgender Kette von Gleichsetzungen:

(33) Zahlmittel = Zeitmittel des Zahlmittels
= Zahlmittel des Zeitmittels = Zeitmittel.

Die erste Gleichsetzung folgt aus der Stationarität der gewählten Phasenverteilung;[101]) die zweite aus der Vertauschbarkeit der Mittelbildungen; die dritte Gleichsetzung stützt sich aber auf die *Behauptung, dass alle Bewegungen der betrachteten Schaar ein und dasselbe Zeitmittel für $\psi(q, p)$ aufweisen.*

97) Vgl. V 8, Nr. 28. — Gastheorie II, § 34.

98) Vgl. *Boltzmann* [4. Kap. II zw. Gl. 22 und 23].

99) Diese Aussage ist von der Ergodenhypothese noch unabhängig.

100) Für dS ist Gl. (25) heranzuziehen.

101) Vgl. Anm. 99.

Und das ist der Punkt, in dem die Hypothese eingreift, dass das Gasmodell ein ergodisches System ist. Schon mit Rücksicht auf die Bedenken gegen die Ergodenhypothese (Nr. **10**a) muss also die *angeführte Untersuchung als nicht einwandfrei* bezeichnet werden[102]).

Die hier skizzierte Art der Berechnung der *Zeitmittel* entspricht übrigens mehr derjenigen Anordnung, die sich in der Arbeit von *Maxwell* (1879)[103]) und in den an sie anschliessenden Darstellungen von *Lord Rayleigh*[104]) und *Jeans*[105]) findet. Doch weicht sie nur *formal* von der ursprünglichen Darstellung *Boltzmanns* ab. Diese entwickelt aus der Fiktion der ergodisch verteilten Systemschaar und unter Benutzung der Hypothese, dass das Gasmodell ein ergodisches System ist[106]) zunächst eine Formel für die Zeiten, während welcher der G-Punkt im Verlauf einer unbegrenzten Bewegung in den verschiedenen Teilen der Energiefläche angetroffen wird:[107])

$$(34) \qquad \lim_{T=\infty} \frac{dt}{T} = \frac{\sigma\, dS}{\int \sigma\, dS},$$

wo σ wieder durch (31a) bestimmt ist. Diese Formel führt ersichtlich für das Zeitmittel einer Phasenfunktion $\psi(q, \dot{q})$ ebenfalls auf den Ausdruck (32).

11b. Kritik und Bedeutung des Boltzmannschen Resultates. Bezüglich der Gl. (34) ist hervorzuheben:

1. *Akzeptiert* man die Ergodenhypothese, so beansprucht Gl. (34) ein *rein mechanisches* Theorem zu sein, unabhängig von irgendwelchen „Wahrscheinlichkeits“-Überlegungen.

2. *Verwirft* man die Ergodenhypothese ganz, oder sucht man sie in modifizierter Form festzuhalten[108]), so fehlt zur Zeit jeder Anhaltspunkt zur Behauptung, dass die Gl. (34) zu Recht besteht oder auch nur eine irgendwie brauchbare Annäherungsformel darstellt.

Als gültig angenommen führt die Gl. (34) nicht nur zu Aussagen über das *mittlere* Verhalten. Darüber hinaus bestimmt sie prinzipiell

---

102) Vgl. *Lord Rayleigh* [2], *Bryan* [1], *Lord Kelvin* [Baltimore lectures on molecular dynamics, London 1904], *Jeans*, Dynam. theory, §§ 92—95.

103) *Maxwell* [3]. Siehe dazu das Referat von *Boltzmann* [13].

104) *Lord Rayleigh* [2].

105) *Jeans* l. c.

106) *Boltzmann* [4. Kap. III].

107) l. c. zw. Gl. 22 und 23.

108) Die von *Jeans* [Dynam. theory, § 96 ff.] entwickelte Modifikation der Ergodenhypothese stützt sich auf den Stosszahlansatz. Deshalb scheint auch dieser Versuch nicht zu einer kritischen Grundlegung geeignet.

auch die relative Länge der Zeiten, während welcher im Gas die verschiedenen Zustandsverteilungen angetroffen werden.

Diese vertiefte Fragestellung wurde in den Untersuchungen *Boltzmanns* zunächst in den Hintergrund gedrängt durch die bald darauf erfolgte Aufstellung des *H*-Theorems (1872). Nur erst gegenüber dem *Loschmidt*schen Umkehreinwand (Nr. 7a) nimmt *Boltzmann* dieses Problem wieder auf, um eine modifizierte Fassung des *H*-Theorems zu gewinnen: Er versucht zu zeigen, dass im Verlauf der unbegrenzten Bewegung die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung zeitlich enorm vor allen anderen Verteilungen vorherrscht, und dass daraus die Tendenz zur Annäherung an diese ausgezeichnete Verteilung verständlich wird.

Dies wird in Nr. **13** u. **14** näher ausgeführt; es sind aber noch einige Hilfsmittel vorauszuschicken.

12. Mechanische Eigenschaften des Gasmodells: Fortsetzung.

12a. Der Phasenraum der Moleküle (μ-Raum). Zustandsverteilung Z der Moleküle. Der Bewegungsphase des ganzen Gasmodelles entsprach ein Punkt in einem $2rN$-dimensionalen „Γ-Raum". Es empfiehlt sich nun auch die jeweilige Phase jedes unter den N Molekülen z. B. des k-ten durch einen Bildpunkt $m^{(k)}$ in einem $2r$-dimensionalen „μ-Raum" abzubilden. Jedes einzelne Molekül entsende so einen Bildpunkt $m^{(k)}$ der ihm durch den Index k dauernd zugeordnet bleibt. *Erst die Angabe der Lage aller N Punkte $m^{(1)}, \ldots m^{(N)}$ bestimmt die Phase des ganzen Gases*[109]).

Der μ-Raum sei ein für allemal in sehr kleine, aber endliche[110]) und untereinander gleiche Parallelipipede ω geteilt[111]). Zur Zeit t enthält jede Zelle ω_i eine bestimmte Zahl a_i von Bildpunkten $m^{(k)}$[112]).

---

109) Die Richtung, in der irgendein fester μ-Punkt von einem Punkt $m^{(k)}$ durchlaufen wird, hängt also ab von der gleichzeitigen Lage aller übrigen Punkte m und ist dementsprechend zu verschiedenen Zeiten verschieden — im Gegensatz zu dem, was nach Anm. 71 vom Γ-Raum gilt.

110) Hier ist ein Kompromiss zu treffen zwischen den Forderungen: a) ω sei sehr klein gegenüber der feinsten physikalischen Unterscheidbarkeit; b) ω sei so gross, dass die sogleich einzuführenden Zahlen a_i im allgemeinen noch sehr gross ausfallen. Für zahlreiche Fragen ist zu beachten, dass man also mit diesen Parallelopipeden ω_i wesentlich nicht zur Grenze 0 übergehen kann. Vgl. dazu Anm. 119.

111) Die hier definierten ω_i sind die $\Delta\tau$, von denen in den Anm. 37 und 53 die Rede war.

112) Wenn wir später $a_i!$ durch die *Stirling*sche Approximation ersetzen, so folgen wir hierbei dem allgemein acceptierten Vorgang von *Boltzmann*. Besonders hier kommt also die Forderung b) in Anm. 110 in Betracht.

Unter der Zustandsverteilung[113]) Z *der Moleküle zur Zeit* t *versteht man das System der Zahlen* a_i.

12b. Das einer Zustandsverteilung Z entsprechende Volumen des Γ-Raumes[114]). Aus der Definition der Zustandsverteilung folgt:

1. Zu einem vorgegebenen Γ-Punkt gehört eine eindeutige bestimmte Zustandsverteilung Z.

2. Zu einer vorgegebenen Zustandsverteilung Z gehört noch ein $2rN$-dimensionales Kontinuum von Γ-Punkten: das Gebiet (Z), das man etwa „*Z-Stern*“[115]) nennen dürfte.

3. Das Volumen $[Z]$ des Z-Sternes berechnet sich zu:[116])

$$[Z] = \frac{N!}{a_1!\, a_2! \ldots} [\omega]^N. \tag{35}$$

113) Vgl. als Beispiele die *stationären* Zustandsverteilungen in Gl. (3) und (3′), die dem Wärmegleichgewicht entsprechen.

114) *Boltzmann* [10]. *Jeans*, Dynam. theory, §§ 39 ff.

115) Das System der Zahlen a_i bleibt nämlich exakt ungeändert, wenn man mit der Phase der Gasmodelle folgende zwei Arten von Variationen vornimmt:

a) Man lasse einen der Bildpunkte $m^{(k)}$ alle Punkte μ derjenigen Zelle ω_i durchstreichen, in der er sich befindet. Alle a_i bleiben ungeändert. Somit bleiben sie es auch dann, wenn man die entsprechende Operation gleichzeitig mit allen N-Bildpunkten $m^{(k)}$ vornimmt. Bei diesem Prozess durchstreicht der G-Punkt im Γ-Raum eine gewisse $2rN$ dimensionale „Ω-Zelle“ vom Volumen

$$[\Omega] = [\omega]^N. \tag{35a}$$

b) Man lasse einen der Bildpunkte $m^{(k)}$ mit einem anderen $m^{(h)}$ im μ-Raum den Platz austauschen. Alle a_i bleiben ungeändert. Somit bleiben sie es auch, wenn man der Reihe nach alle $N!$ Permutationen dieser Art vornimmt. Dabei nimmt der Γ-Punkt des Gasmodelles im ganzen $N!$ verschiedene Lagen ein. Ihre Verteilung darf vielleicht *sternförmig* genannt werden, weil sie durch bestimmte endliche Drehungen des Γ-Raumes um den O-Punkt ineinander übergeführt werden können.

116) Man gehe von einer bestimmten Phase Γ_0 aus und nehme zunächst alle diejenigen Permutationen vor, bei denen kein Bildpunkt $m^{(k)}$ diejenige ω-Zelle, in der er sich befindet, verlassen muss. Man gelangt so im ganzen zu $a_1!\, a_2!\, a_3! \ldots$ Γ-Punkten. Sie liegen alle innerhalb derjenigen Ω-Zelle, die aus Γ_0 schon durch die Operation a) der vorigen Anmerkung erzeugt wurde. Um zu einem Γ-Punkt zu gelangen, der einer anderen Ω-Zelle angehört, hat man solche zwei Bildpunkte $m^{(k)}$ und $m^{(h)}$ zu permutieren, die in verschiedenen ω-Zellen liegen. — An Hand dieser Bemerkung erkennt man leicht: 1. dass die $N!$ Punkte, welche im ganzen durch die Permutationen aus Γ_0 erzeugt werden, in Gruppen von je $a_1!\, a_2!\, a_3! \ldots$ Punkten zerfallen, die immer in je einer Ω-Zelle beisammen liegen, 2. dass ebendeshalb die Kombination der Operationen (a) mit den Permutationen im ganzen nur

$$\frac{N!}{a_1!\, a_2! \ldots}$$

voneinander verschiedene Ω-Zellen liefert, womit Gl. (35) bewiesen ist.

12 c. Funktionen der Zustandsverteilung. Bei einer *stetigen* Verlegung des Phasenpunktes G ändert sich das System der *ganzen* Zahlen a_i in unstetiger Weise, so oft der G-Punkt aus einem Z-Sterne in einen anderen übertritt. Jede *Funktion der Zahlen* a_i — Funktion der Zustandsverteilung: $F(Z)$ — ist also als Funktion der Phase (q,p) betrachtet eine *diskontinuierliche Phasenfunktion.*

Diese Funktionen bilden ein charakteristisches Hilfsmittel der kinetischen Theorie.

Die Masszahl von [Z] resp. deren erster Faktor

(36) $$P(Z) = \frac{N!}{a_1!\, a_2! \ldots}$$

liefert ein erstes Beispiel für eine $F(Z)$.

Hier gehören ferner alle $F(Z)$, durch die man in der kinetischen Gastheorie die *exakten Werte stetiger Phasenfunktionen approximiert:* Sei λ_i die kinetische Energie, die einem Molekül zukommt, wenn sein Phasenpunkt exakt im Mittelpunkt der Zelle ω_i des μ-Raumes liegt. Da die ω-Zellen sehr klein gewählt worden sind, so lässt sich die *gesamte* kinetische Energie aller a_i Moleküle, deren Phasenpunkte in der Zelle ω_i liegen, sehr *angenähert* durch

(37) $$a_i \lambda_i$$

darstellen; der exakte Wert der kinetischen Energie des ganzen Gasmodells $L(q,p)$ — eine stetige Phasenfunktion — wird danach approximiert durch die $F(Z)$:

(38) $$L(Z) = \sum a_i \lambda_i.$$

Analog die potentielle Energie $\Phi(q,p)$ durch[38])

(39) $$\Phi(Z) = \sum a_i \varphi_i$$

und somit die Totalenergie $E(q,p)$ durch

(40) $$E(Z) = \sum a_i \varepsilon_i.$$

Man bestätigt leicht folgende Bemerkung, die in Nr. **13** benutzt wird:

Die Gleichung

(41) $$E(Z) = E_0$$

schneidet aus dem Γ-Raum ein (schalenförmiges) Gebiet von $2rN$-*Dimensionen* heraus: die Zusammenfassung aller Z-Sterne, für die die a_i der Gl. (41) genügen. Die Gleichung

(41a) $$E(q,p) = E_0$$

bestimmt hingegen eine $(2rN-1)$-*dimensionale* Hyperfläche, die teils innerhalb, teils ausserhalb der durch (41) abgegrenzten Schale verläuft.

12 d. Die Funktion $H(Z)$. Die Ausdrücke (35) und (36) hängen von der jeweiligen Zustandsverteilung Z nur vermöge des Bestandteiles

$$\Pi(Z) = a_1!\, a_2!\, a_3! \ldots$$

ab. Fasst man in der *Stirling*schen Approximation für Logarithmus von $\Pi(Z)$:

(42) $$\lg \Pi(Z) = \sum^{i} \{\tfrac{1}{2} \lg 2\pi + (a_i + \tfrac{1}{2}) \lg a_i - a_i\}$$

diejenigen Glieder zusammen, die für die Veränderlichkeit von $\lg \Pi(Z)$ mit (Z) ausschlaggebend sind, so gelangt man zur Funktion

(43) $$H(Z) = \sum a_i \lg a_i .$$

Die Arbeiten von *Boltzmann* haben die vielseitige Bedeutung dieser Funktion klargestellt[117]).

12 e. Die Symbole $\frac{dH(Z)}{dt}$ und $\frac{\Delta H(Z)}{\Delta t}$. Wie in Nr. **14**b gezeigt werden wird, hat die Verwechslung eines gewissen zeitlichen *Differenzen*quotienten von $H(Z)$ mit dem *Differential*quotienten in die Diskussion über das H-Theorem beträchtliche Verwirrung hineingetragen. Man vermeidet diese Verwechslung durch folgende Bemerkungen:

1. Die Kurve, die den vollen zeitlichen Verlauf irgendeiner $F(Z)$ darstellt, hat immer *Treppenform*[118]); der zeitliche *Differential*quotient besitzt also nur folgende drei Werte:

(44) $$\frac{dF(Z)}{dt} = 0, \quad \frac{dF(Z)}{dt} = -\infty, \quad \frac{dF(Z)}{dt} = +\infty .$$

2. Das „Zeitelement Δt“, mit dem die kinetische Gastheorie, speziell auch das H-Theorem operiert, ist zwar sehr klein gegenüber den experimentell zugänglichen Zeitintervallen; es ist aber wesentlich *nicht* beliebig klein[119]).

3. Die Aussagen über den zeitlichen Verlauf von $H(Z)$ oder einer beliebigen $F(Z)$ beziehen sich also meistens auf eine *diskrete Punktfolge*, die auf der Treppenkurve herausgegriffen wird. Es kommen dabei *Differenzen*quotienten in Betracht, deren Δt noch *sehr* viele Stufen der Treppenkurve umfasst[120]).

---

117) Siehe besonders *Boltzmann* [10. Kap. V], ferner V 8, Nr. **13**.

118) Ganz unabhängig davon, ob die Änderung der ganzen Zahlen a_i durch einen Zusammenstoss oder durch die stossfreie Bewegung der Moleküle bewirkt ist.

119) Von Δt wird in den meisten Rechnungen gefordert, es solle so gross sein, dass in ihm noch eine *grosse* Zahl von Zusammenstössen bestimmter Art erfolge (vgl. Anm. 110).

120) Vgl. Nr. **14**b.

13. Das Vorherrschen der Maxwell-Boltzmannschen Verteilung. Gelegentlich des Versuches, die am Ende von Nr. **11** b angeführte Behauptung zu beweisen, stellte *Boltzmann* (1877)[121]) folgende Eigenschaft der *Maxwell-Boltzmann*schen Verteilung fest:

(I) Unter allen Zustandsverteilungen Z, welche ein und denselben Wert von

(45) $$E(Z) \equiv \sum a_i \varepsilon_i = E_0$$

liefern, besitzt die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung:

(46) $$a_i = A e^{-h\varepsilon_i}$$

den grössten Wert von $[Z]$. Die Grösse $[Z]$ sinkt enorm rasch ab, wenn die a_i bei konstantem $E(Z)$ sich merklich von den *Maxwell-Boltzmann*schen Werten (46) entfernen[122]).

Bei der üblichen Terminologie, welche dem Unterschied zwischen den Gleichungen: $E(q, p) = E_0$ und $E(Z) = E_0$ (vgl. Ende von Nr. **12** c) keine Rechnung trägt, wird die Behauptung (I) kaum unterscheidbar von der folgenden Behauptung:

(II) Auf jeder Hyperfläche $E(q, p) =$ konst. ist der „Flächen"-inhalt[123]) der zur *Maxwell-Boltzmann*schen Verteilung gehörigen Gebiete erdrückend viel grösser als der Inhalt der übrigen Gebiete[124]).

Hält man an der bedenklichen Ergodenhypothese und Gl. (34) fest (Nr. **10**), so führt die Aussage (II) unmittelbar zu dem am Ende von Nr. **11** b angekündigten Resultat:

(III) Im Verlauf der unbegrenzt fortgesetzten Bewegung des Gasmodells herrscht *zeitlich* die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung vor, und zwar erdrückend gegenüber allen merklich anderen Zustandsverteilungen.

---

121) *Boltzmann* [10]. *Jeans*, Dynam. theory, § 41 ff.

122) Es handelt sich hier ersichtlich um Rechnungen, die denen des *Bernoulli*schen Theorems parallel laufen. Zum Beweis des *ersten* Teiles der Behauptung hat man nur das Maximum von (36), also das Minimum von (43) unter der Nebenbedingung (45) zu bestimmen. — Von dem *zweiten* Teil der Behauptung macht *Boltzmann* in allen den Fällen Gebrauch, wo er die *Maxwell*sche Geschwindigkeitsverteilung als „*erdrückend* wahrscheinlichste" bezeichnet. Eine mehr quantitative Formulierung und Herleitung dieses Teils der Behauptung skizziert *Jeans* in [2, §§ 22—26] und in Dynam. theory, §§ 44—46 und § 56.

123) Vgl. Gl. (25).

124) Ein eigentlicher Beweis der Behauptung II oder ihre Ableitung aus Behauptung I liegt nicht vor. Sie würde die eigentliche Grundlage bilden für jede Untersuchung, bei der es sich um die Abweichungen vom „wahrscheinlichsten Zustand" handelt (vgl. Nr. **25**). Insofern dringen die dort genannten Arbeiten noch am tiefsten in diese Frage ein.

Fällt dagegen, wie es in den neueren Darstellungen zu sein pflegt, jede Benutzung der Ergodenhypothese weg, so entsteht zwischen (II) und (III) unzweifelhaft eine Lücke.

14. Die modifizierte Fassung des H-Theorems.

Bei der üblichen „Wahrscheinlichkeits“-Terminologie ist die Lücke zwischen den Aussagen (II) und (III) kaum bemerkbar, dank der schwankenden Bedeutung in der dabei der Term „relative Wahrscheinlichkeit“ gebraucht wird. Er erscheint zunächst als abgekürzte Bezeichnung für die *Quotienten bestimmter Γ-Volumina*, nämlich in folgender Formulierung des Satzes (I):

(I′) *Die Maxwell-Boltzmannsche Verteilung ist unter allen Zustandsverteilungen gleicher Totalenergie die „wahrscheinlichste“, und zwar die erdrückend wahrscheinlichste.*

Hinterher aber wird diese „Wahrscheinlichkeit“ je nach Bedarf als Quotient von *Zeitdauern* gedeutet oder als relative Häufigkeiten in statistischen Gesamtheiten noch sehr verschiedener Art. In dieser Weise führt die Formulierung (I′) zur Aussage (III) hinüber und auch weiter zu allen Einzelaussagen, welche zusammen die *modifizierte Fassung des H-Theorems* ausmachen.

In logischer Beziehung ist ein solches Verfahren wenig befriedigend. Deshalb wird in der folgenden Darstellung die Wahrscheinlichkeitsterminologie ausgeschaltet: Die modifizierte Fassung des H-Theorems erscheint dann als eine Aneinanderreihung von hypothetischen Behauptungen über eine bestimmte Schaar von Bewegungen des Gasmodells. (Behauptung IV — VII.) Nur so lässt sich ein Überblick über die Lücken der neuen Fassung gewinnen.

14a. Die Treppenkurve der $H(Z)$-Werte. Benutzt man als Mass für die Abweichung einer Zustandsverteilung (Z) von der *Maxwell-Boltzmann*schen Verteilung die Grösse $H(Z)$, so nimmt die Behauptung (III) folgende Gestalt an:

Die **Treppenkurve,**[129]) die den zeitlichen Verlauf von $H(Z)$ für eine unbegrenzt fortgesetzte Bewegung des Gasmodells darstellt, bleibt

(IVa) während erdrückend grosser Zeitstrecken überaus nahe einem Minimum H_0. Nur während relativ sehr kleiner Zeiten erhebt sie sich merklich oder gar stark.

(IVb) Bezeichne H_1 einen Wert, der merklich vom Minimum H_0 verschieden gewählt wird: die Länge der Zeiten während welcher die Treppenkurve *oberhalb* der Horizontalen H_1 verläuft, nimmt enorm

129) Vgl. Nr. 12e.

rasch ab, wenn die für H_1 gewählte Höhe auch nur um weniges vergrössert wird.

14b. Die H-Kurven. Auf dieser Treppenkurve greifen wir nun eine **diskrete Punktfolge** mit der konstanten Abszissendifferenz Δt heraus, wo Δt gemäss Nr. **12**e gewählt sei. Auf sie übertragen sich zunächst die Aussagen (IV). Sie lassen sich aber hier verschärfen. Seien nämlich drei einander naheliegende H-Werte gegeben

$$H_a < H_b < H_c,$$

die alle stark vom Minimum H_0 abweichen. Man kann dann im Anschluss an *Boltzmann*[130]) den Aussagen (IV) folgende Formulierung geben:

Fasst man auf der *diskreten Punktfolge* alle Punkte zusammen, die in der Höhe H_b liegen, so bilden sie *in erdrückender Mehrzahl*[131]) *Spitzenmaxima,* schematisch repräsentiert durch:

$$\begin{matrix} & H_b & \\ H_a & & H_a. \end{matrix} \tag{47}$$

Nur ein *kleiner Bruchteil* der Punkte H_b liegt auf einem *absteigenden Abhang:*

$$\begin{matrix} H_c & & \\ & H_b & \\ & & H_a \end{matrix} \tag{48}$$

oder auf einem *aufsteigenden Abhang*

$$\begin{matrix} & & H_c \\ & H_b & \\ H_a & & \end{matrix} \tag{49}$$

und ein noch weitaus *kleinerer Bruchteil* bildet ein *Minimum:*

$$\begin{matrix} H_c & & H_c \\ & H_b. & \end{matrix} \tag{50}$$

Weiterhin möge diese auf der $H(Z)$-Treppenkurve herausgegriffene *diskrete Punktfolge und nur sie* als „**H-Kurve**“ bezeichnet werden. Man kann die obigen Aussagen noch auf die Form bringen, in der sie *Boltzmann* gewöhnlich benutzte:

---

130) *Boltzmann* [17, 21], *Jeans* [2, § 32], *P.* und *T. Ehrenfest* [2].

131) Eine zahlenmässige Verfolgung der relativen Häufigkeit der Vorkommnisse für eine analoge, durch ein Lotterieschema definierte „Kurve“ vgl. bei *Ehrenfest* [2].

(Va) Die einzelne „H-Kurve" läuft von allen ihren höher gelegenen Punkten *fast immer sofort* abwärts[132]).

(Vb) Diese Aussage gilt in gleicher Weise, sowohl wenn man die fertige Kurve von links nach rechts durchläuft (positive Zeitfolge) als auch, wenn man sie von rechts nach links durchläuft (verkehrte Zeitfolge)!

(Vc) Im übrigen verläuft die H-Kurve wie die Treppenkurve fast immer sehr nahe dem Minimum H_0.

Die Aussagen Va und Vb wurden gelegentlich als geometrisch sinnlos bezeichnet. Hierzu ist zu bemerken:

1. *Boltzmann* hat die Bezeichnung „H-Kurve" in schwankender Bedeutung gebraucht:
   a) für die Treppenkurve,
   b) für die auf ihr herausgegriffene *diskrete Punktfolge.*
   c) für gewisse „ausgeglättete" stetige Interpolationskurven von a) und b)[133]) und hat auch vielleicht nicht immer genügend scharf den Gegensatz von *„H-Kurve"* und *„Kurve des H-Theorems"* (vgl. **14** d) betont.

2. *Boltzmanns* Ausdrucksweise erweckt sehr leicht die durchaus *falsche* Vorstellung, also sollte in (Va) und (Vb) unter „H-Kurve" gerade die glatte Interpolationskurve verstanden werden.

3. Im speziellen unterstützte er dieses Missverständnis dadurch, dass er die *Spitzenmaxima* der H-Kurven immer als *„Buckel"* bezeichnete, wobei man fast notwendig an ein Maximum mit horizontaler Tangente denkt.

Sobald man unter H-„Kurve" ausschliesslich und konsequent die *diskrete Punktfolge* versteht und beachtet, dass *alle* ihre höheren Punkte fast ausschliesslich *Spitzen*maxima bilden, fällt jedes Bedenken gegen die *geometrische* Zulässigkeit der Aussagen (Va), (Vb) weg.

Für das Verständnis der Stellung, die Boltzmann zum Umkehr- und Wiederkehreinwand einnimmt, ist dieser Punkt entscheidend[134]).

132) Hier hat man zu beachten: Da die H-Kurve in jede hohe Höhe sehr viel öfter eindringt als in die um einen Schritt höhere Höhe, so bildet auch H_a seinerseits enorm viel häufiger die Spitze eines Maximums als den Abhang zu einem benachbarten höheren H_b.

133) Die ausgeglättete Interpolationskurve besitzt in einem endlichen Abschnitt nur *endlich* viele Maxima, während das übrige *Kontinuum* ihrer Punkte auf die Abhänge dieser Maxima entfällt; auf die Interpolationskurve sind also in der Tat die Aussagen (Va) und (Vb) *nicht* anwendbar.

134) Vgl. noch Anm. 151.

14c. Das Büschel der H-Kurven. Seine Verdichtungskurve. Sei für t_A eine Zustandsverteilung Z_A mit relativ hohem $H(Z_A)$ vorgeschrieben. Man greife im Γ-Raume den zugehörigen Z_A-Stern (Nr. **12** b) heraus. Das daran anschliessende Kontinuum von Bewegungen liefert in einer t, H-Ebene ein aus dem Punkt $t = t_A$, $H = H(Z_A)$ ausstrahlendes Büschel von zugehörigen H-Kurven. Über seinen Verlauf stellen wir folgende *Behauptungen* zusammen[135]):

(VIa) Die Gesamtheit der H-Werte, zu denen das Büschel in einem späteren Zeitpunkt $t_A + n\Delta t$ führt, drängt sich *mit enorm kleiner Dispersion*[136]) um einen Wert $\mathfrak{H}_n$ zusammen.

Man fasse die Werte $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$ zu einer diskreten Punktfolge zusammen; sie heisse zur Abkürzung: *Verdichtungskurve* des Büschels. Es wird dann weiter behauptet:

(VIb) Die *Verdichtungskurve* des Büschels läuft vom hohen Anfangswert $H(Z_A)$ *monoton* abwärts, schmiegt sich an das Minimum H_0 an und entfernt sich **niemals** mehr von ihm[137]).

Ferner zur näheren Erläuterung von (VIa):

(VIc) Von t_A an begleitet während *langer Zeit* die erdrückende Mehrzahl[138]) der Kurven sehr nahe die Verdichtungskurve.

(VId) Diejenigen Bewegungen hingegen, deren H-Kurven auch bei *unbegrenzter* Fortsetzung der Bewegung *ohne Unterbrechung* der Verdichtungskurve sehr nahe bleiben, bilden — falls sie überhaupt existieren — in der Schar nur eine niedrigere Mannigfaltigkeit[139]).

14d. Die Kurve des H-Theorems. Innerhalb der Auffassung, die wir seit Nr. **9** festhalten, ist der „Stosszahlansatz (Nr. **3** b) und damit das ganze H-Theorem ein zunächst noch bedeutungsloses Rechenschema[140]): Von der Anfangsverteilung Z_A ausgehend, definiert es für das Ende jedes folgenden Δt ein neues Z: $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots$ und stellt so den zuletzt eingeführten Kurven eine weitere H-Folge gegen-

135) Wiederum als Fixierung einer Reihe von Bemerkungen, die sich in den genannten Arbeiten von *Boltzmann* verstreut finden. Sie mögen in Evidenz setzen, wie zahlreiche rein intuitive Behauptungen sich hier hinter der üblichen Wahrscheinlichkeitsterminologie verbergen.

136) Das Dispersionsmass müsste sich stützen auf das Γ-Volumen der entsprechenden Anfangszustände. Vgl. Anm. 170.

137) Die einzelne H-Kurve verläuft fast immer nahe bei H_0. In einem Moment $t_A + n\Delta t$ können also — wenn nur n nicht zu klein ist — sehr wohl fast alle H-Kurven des Büschels nahe an H_0 liegen und nur eine verschwindende Menge gerade einen ihrer „Buckel" durchlaufen.

138) Vgl. Anm. 136 und Anm. 170.

139) Vgl. Anm. 60.

140) Vgl. allerdings Nr. 18.

über: diskret, mit der Abszissendifferenz Δt *monoton abwärts laufend* (vgl. Nr. 6) — die „*Kurve des H-Theorems*".

Es kommt nun *eine statistische Auffassung des H-Theorems* zustande, indem wieder ohne Beweis noch folgende *Behauptung* eingreift:

(VII) Die *Kurve des H-Theorems* ist identisch mit der *Verdichtungskurve* des unter (VI) geschilderten Büschels von H-Kurven.

15. Der statistische Charakter kinetischer Deutungen.

Wie jede „Erklärung" einer physikalischen Erscheinung, so besteht auch die kinetische Deutung eines aerodynamischen Prozesses in der *Abbildung* der *beobachteten Zustandsfolge* durch ein rein *begriffliches Schema.* Eine Besonderheit der kinetischen Deutungen bildet aber der statistische Charakter des abbildenden Schemas; dem *einzelnen* Prozess im vorgegebenen Gasquantum wird eine *Schar* von Bewegungen des Gasmodells gegenübergestellt, und zwar durch die folgende, abschliessende Behauptung:

(VIII) Die im Gasquantum von t_A an *faktisch beobachtete* Zustandsfolge ist identisch mit derjenigen, welche von der *erdrückenden Mehrzahl*[141]) der in (VI) besprochenen Bewegungen geliefert wird.

15a. Zustandsverteilung und beobachtbare Daten. Die durch (VIII) formulierte Abbildung weist folgende *Lücke* auf: Die Behauptungen (V)—(VII) handeln von dem Kontinuum von Bewegungen, das aus einer für t_A vorgeschriebenen Zustandsverteilung Z_A hervorgeht. Der direkten *Beobachtung* hingegen sind nicht Zustandsverteilungen zugänglich, sondern das, was man vielleicht den „*sichtbaren*" *Zustand* des Gasquantums nennen dürfte: Eine nur grobe Bestimmung der Verteilung von Druck, Dichte, Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit innerhalb des Gases.

In den üblichen Darstellungen wird diese Lücke nicht weiter beachtet. Es wird verfahren, als ob etwa folgender Satz bewiesen wäre:

(IX) Unter der Gesamtheit von verschiedenen Zustandsverteilungen Z, die ein und demselben „sichtbaren" Zustand S_n entsprechen, giebt es eine ausgezeichnete: $\mathfrak{Z}_n$, so dass ihr und den ihr sehr nahe gleichen Z ein enorm viel grösseres Gebiet im Γ-Raume zugehört als allen anderen Z, die zu S_n gehören.

15b. Determinationspostulat. Brownsche Bewegung. Aus der Erfahrung *abstrahiert* man folgende Behauptung über das Verhalten eines *isolierten* Gasquantums:

Durch den „sichtbaren" Zustand S_A zur Zeit t_A ist der „sichtbare" Zustand für jeden folgenden Zeitpunkt t_B vollständig bestimmt.

141) Vgl. Anm. 136 und Anm. 170.

Diese Aussage ist offenbar durchaus nicht der unmittelbare Ausdruck einer Erfahrungstatsache: Abgesehen von einer sehr engen Gruppe von aerodynamischen Prozessen haben wir es immer mit *turbulenten* Gasbewegungen zu tun, wo eine messende Verfolgung des „sichtbaren“ Zustandes unmöglich wird. Ferner erweisen sich die besten Isolationen gegen Wärmestrahlung und Wärmeleitung als vollkommen ungenügend, sobald es sich nicht um ganz *kurze* Beobachtungszeiten handelt.

Die obige Aussage ist also ein *Postulat*, das wesentlich über die experimentelle Kontrolle hinausgreift: Welche Zustandsfolgen ein *wirklich isoliertes* Gasquantum während *enorm langer* Zeitstrecken zeigen *würde*, und ob sie dem *Determinationspostulat* genügen würden, darüber können die bekannten Beobachtungen nichts besagen.

Sobald man unter die Beobachtungsmittel für den „sichtbaren“ Zustand auch noch das Mikroskop miteinbegreift, stösst man auf die Brownsche Bewegung — für den so verschärften „sichtbaren“ Zustand scheint das Determinationspostulat nicht mehr zu gelten. Andererseits hat sich gezeigt, dass dieses Phänomen sich überraschend gut in die statistische Deutung einfügt[146]).

16. Rückblick auf den Umkehr- und Wiederkehreinwand. Decken sie in der statistischen Auffassung innere Widersprüche auf? Mehrere angesehene Forscher bejahen auch jetzt noch diese Frage[147]). Es bedarf eben einer sorgfältigen Beachtung der *geometrischen* Eigentümlichkeiten der „H-Kurven“, um zu verstehen, wieso ihnen *Boltzmann* in seinen Erläuterungen zum H-Theorem folgende, scheinbar unvereinbare Eigenschaften zuschreiben durfte:

1) Dass H von *jedem* höheren Wert fast immer sofort abwärts geht (im Sinne des H-Theorems).

2) Dass dies sowohl bei direkter als bei inverser Durchlaufung der Kurve gilt (wie es *Loschmidt* verlangt, Nr. **7** a).

3) Dass H quasiperiodisch verläuft (wie es *Zermelo* verlangt, Nr. **7** b).

Sobald man hier alle Missverständnisse überwunden hat (vgl. die Ausführungen in Nr. **14** b), wird man *Boltzmann* zustimmen müssen, dass *auf diesem Wege kein innerer Widerspruch aufgedeckt wurde*[148]).

Es ist noch eine andere Formulierung des Umkehreinwandes zu besprechen[149]): Man fasse im Γ-Raum alle Phasenpunkte zusammen,

146) Vgl. Nr. **25**.

147) Vgl. Anm. 11.

148) Die letzte Äusserung *Boltzmanns* zu dieser Frage siehe V 8, Nr. **14**.

149) *Zermelo* [2 — „Satz II“].

die einem vorgegebenen *hohen* H-Wert H_A entsprechen, denke für jeden die Änderung ΔH im folgenden Zeitelement Δt bestimmt und den Mittelwert über die herausgegriffene Phasenmenge gebildet. Angeblich lasse sich beweisen, dass dieser Mittelwert gleich Null ist, statt kleiner als Null zu sein.

Zunächst ist richtig, dass innerhalb der herausgegriffenen Phasenmenge zu jeder Phase Γ eine Phase Γ' gefunden werden kann, derart, dass Γ und Γ' dem Gasmodell gleiche Konfigurationen und entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten zuerteilen[150]. — Unrichtig ist aber die Behauptung, dass

(51) $$\left(\frac{\Delta H}{\Delta t}\right)_{\Gamma'} = -\left(\frac{\Delta H}{\Delta t}\right)_{\Gamma}$$

ist[151]. Damit fällt die Folgerung weg, dass der gesuchte Mittelwert gleich Null sei.

Sind danach diese Einwände auch nicht imstande gewesen, innere Widersprüche wirklich nachzuweisen, so erinnern sie doch daran, dass andererseits die *Widerspruchslosigkeit* nur durch einen Beweis der Behauptungen (III)—(VII) sichergestellt werden könnte.

17. Verhältnis der statistischen Auffassung zum Entropiesatz. Für Prozesse von *experimentell zugänglicher* Zeitdauer stimmt die statistische Auffassung mit der Forderung überein, dass die Entropie im isolierten Gasquantum nur zunimmt[152]. Darüber hinaus kann man in der Hauptsache zwei einander entgegengesetzte Anschauungen verteidigen.

1) Man behauptet, dass in einem *vollständig isolierten* Gasquantum bei *unbegrenzter* Beobachtungsdauer ein quasiperiodisches Verhalten mit enorm langen Perioden beobachtet werden würde[153]. — Dieser Standpunkt hat den Vorzug, dass er eine wesentliche Eigentümlichkeit der bisher formulierten Theorie unverschleiert hervortreten lässt. Andererseits erinnert er daran, wie weit das Postulat einer *ausnahmslosen* Zunahme der Entropie über die experimentelle Kontrolle hinausgreift[155].

---

150) Siehe Gl. (13).

151) Diese irrtümliche Behauptung entsteht, wenn man die *diskrete* H-Kurve mit ihrer ausgeglätteten Interpolationskurve verwechselt: Für die letztere würde in jedem Punkt der vordere und hintere *Differential*quotient gleich sein, womit man leicht zu einer der Gl. (51) ähnlichen Gl. gelangt. Ein derartiger Schluss kann aber nicht auf die *Differenzen*quotienten übertragen werden, von denen Gl. (51) spricht.

152) Vgl. übrigens Anm. 55.

153) V 8, Nr. 14. *Boltzmann,* Gasth., Bd. II, § 88, 89.

155) Gerade in diesem Zusammenhang ist bemerkenswert, dass die *Brown*-

2) Man verzichtet auf den Anspruch, dass die verhältnismässig primitiven Annahmen über die Struktur des Gasmodells auch noch für Prozesse von *enormer Zeitdauer* eine vollkommen zutreffende Abbildung liefern sollen. — Auch dieser Standpunkt ist natürlich *Boltzmann* nicht entgangen: er hatte schon sehr frühe (1871)[156]) betont, dass eine Weiterentwicklung der kinetischen Theorie die Wechselwirkung zwischen Molekül und Äther wird berücksichtigen müssen (Einfluss der Strahlung auf das Wärmegleichgewicht). In den Diskussionen über das H-Theorem hat er aber mit Recht den *ersten* Standpunkt bis zu seinen äussersten Konsequenzen festgehalten; denn die Berufung, z. B. auf die Wärmestrahlung, führt leicht zu einer voreiligen Aburteilung der *Boltzmann*schen Ideen: als ob die Entropiezunahme auch für Prozesse von *beobachtbarer* Dauer nicht ohne Berücksichtigung der Strahlung gedeutet werden könnte.

18. Die statistische Weiterbildung des Stosszahlansatzes. Hypothese der molekularen Unordnung.

18a. Boltzmanns Andeutungen. *Boltzmann* hat wiederholt die Frage berührt, welche Umdeutung der für die *ältere* Fassung des H-Theorems fundamentale „Stosszahlansatz" innerhalb der *neuen* statistischen Auffassung erfahren müsste; die Einwände gegen das H-Theorem hatten jedenfalls gezeigt, dass die freien Bewegungen des Gasmodelles nicht immer dem Stosszahlansatz gehorchen können[157]). — Bei Benützung der Wahrscheinlichkeitsterminologie lassen sich *Boltzmanns* Andeutungen etwa folgendermassen zusammenfassen[158]):

1) Der Stosszahlansatz gebe für jedes Zeitelement Δt nur die *„wahrscheinlichsten" Werte der Stosszahlen* an. [Entsprechend liefere dann das H-Theorem für jedes Δt nur den *wahrscheinlichsten Wert der H-Änderung*.]

2) Die *wirkliche* Zahl der Stösse [und wirkliche H-Änderung] schwanke um diesen wahrscheinlichsten Wert nach Massgabe der zwar viel kleineren, aber doch von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit auch anderer Werte[159]).

Dabei soll dann die relative Wahrscheinlichkeit der verschiedenen

---

sche Bewegung sich besser an die kinetischen Ideenbildungen anschliesst als an die dogmatische Fassung des zweiten Hauptsatzes.

156) *Boltzmann* [3 — Ende] und „Über die Natur der Gasmoleküle", Wien. Ber. II 74 (1876), p. 555).

157) Vgl. Anm. 62.

158) *Boltzmann* [9. Kap. II] [17, 18, 19, 21]. Für das Modell Nr. **5** (Zwischenstück) lassen sich diese Aussagen leicht quantitativ präzisieren.

159) *Boltzmann*, Gasth., p. 43.

Veränderungen von H in Einklang stehen mit der relativen Wahrscheinlichkeit der verschiedenen *Werte von H*, wie sie sich aus der Behauptung (I') in Nr. **14** ergiebt.

Es zeigen sich auch hier wieder grosse Lücken, sobald man den abkürzenden Term „Wahrscheinlichkeit" an jeder Stelle, wo er in den obigen Aussagen auftritt, durch die entsprechende *Häufigkeitsangabe* zu ersetzen versucht.

Jeans[160]) hat in diesem Sinne die Aussage 1) wesentlich präzisiert. Die Aussage 2) hingegen — die uns das zu repräsentieren scheint, was *Boltzmann eigentlich* unter *„Hypothese der molekularen Unordnung"* verstanden wissen wollte[161]) — hat noch nicht die entsprechende Formulierung gefunden. Die folgenden Andeutungen stützten sich vor allem auf die Ausführungen von *Jeans* und versuchen den Anschluss an die Bemerkungen herzustellen, in denen *Burbury*[161a]) wiederholt den Stosszahlansatz kritisiert hat.

18b. Verschärfte Determination der Zustandsverteilung. Jeans-Gruppierung. Die Angabe der Zustandsverteilung Z_A reicht nicht aus, die Zahl der Zusammenstösse für das folgende Zeitelement Δt festzulegen. Dazu bedarf es noch der Angabe, wieviel *Paare von Molekülen* zu den Zusammenstössen verschiedener Art im Moment t_A bereitstehen[162]): Angabe der *„Gruppierung"* der Moleküle, wie man vielleicht zur Abkürzung sagen darf.

Der Z_A-Stern, der im Γ-Raum der Zustandsverteilung Z_A zugeordnet ist [vgl. Nr. **12**b], zerfällt in Teilgebiete, entsprechend den verschiedenen *Gruppierungen*. Man denke unter ihnen diejenige bestimmt, auf die das grösste Γ-Volumen entfällt. Sie sei für das folgende *„Jeans-Gruppierung"* genannt. Es liegen dann folgende Behauptungen vor[163]):

160) *Jeans* [2] und [Dynam. theory, § 62 ff.].

161) Bei der üblichen Terminologie wird leider nicht unterschieden zwischen: a) Stosszahlansatz, b) Hypothese der molekularen Unordnung. Siehe z. B. *Boltzmann*, Gasth. I, p. 21. Ebenso gebrauchen die französischen Autoren *„mouvement inorganisé"* in beiden Bedeutungen. Siehe auch *„assumption A"* in den Abhandlungen von *Burbury*. Bei *Jeans* sind die beiden *Begriffe* einander scharf gegenübergestellt. Die *Bezeichnung „molecular chaos"* bedeutet aber trotzdem gelegentlich den Stosszahlansatz.

161a) *Burbury*, Treatise (1899), § 39, § 69. Ferner in zahlreichen Abhandlungen im Phil. mag. 1900—1908.

162) Wegen der einschränkenden Voraussetzung über die Kleinheit der Zellen ω_i (Anm. 110) hängt es nämlich noch von der genaueren Lage der Bildpunkte $m^{(k)}$ innerhalb ihrer ω-Zelle ab, ob zwei zugehörige Moleküle im folgenden Zeitelement Δt zum Zusammenstoss gelangen oder nicht.

163) *Jeans* [Dynam. theory, § 65, 66].

(Xa) Fast das ganze Volumen jedes Z_A-Sternes entfällt auf die entsprechende *Jeans*-Gruppierung und die mit ihr sehr nahe zusammenfallenden. Ein relativ nur sehr kleiner Rest entfällt auf die merklich abweichenden Gruppierungen.

(Xb) Die *Jeans*-Gruppierung liefert für das nächste Zeitelement Δt gerade dasjenige System von Stosszahlen, das der Stosszahlansatz angibt[164]).

18c. Die Hypothese der molekularen Unordnung. Geht man nun auf die Bewegungsschar zurück, von der in Nr. **14**c die Rede war, so hat man zu beachten:

Im Anfangsmoment t_A geht sie aus von *allen* Bewegungsphasen, die zu der *einen* Zustandsverteilung Z_A gehören; d. h. gerade von derjenigen Gesamtheit, auf welche sich die Aussagen (X) beziehen. Danach folgt unmittelbar aus (X), dass im *ersten Zeitelement:* t_A bis $t_A + \Delta t$ die *erdrückende Mehrzahl* der betrachteten Bewegungen den Stosszahlansatz erfüllt.

In irgend einem späteren Moment t_B laufen die Bewegungen der betrachteten Schar in Γ-Punkte ein, welche schon voneinander verschiedene Zustandsverteilungen Z'_B, Z''_B usw. aufweisen. Andererseits ist in diesem Moment jede einzelne dieser Zustandsverteilungen z. B. Z'_B in der Schar im allgemeinen nur durch einen Teil der Bewegungsphasen vertreten, die den ihr zugehörigen „Z-Stern" zusammensetzen.

Es bedarf da also noch einer ergänzenden Behauptung, die etwa folgendermassen zu formulieren wäre[165]):

(XI) In jeder der genannten *Teilmengen* kommen die verschiedenen „Gruppierungen" mit derselben relativen Häufigkeit vor, wie in der zugehörigen *vollen Menge*, von welcher die Aussagen (X) sprechen.

Erst wenn auch noch Behauptung XI zugegeben ist, lässt sich die Aussage rechtfertigen, dass nicht nur im *ersten* Zeitelement t_A bis $t_A + \Delta t$, sondern auch in allen *folgenden* die erdrückende Mehrzahl der betrachteten Bewegungen den Stosszahlansatz erfüllen.

Behauptung (XI) könnte vielleicht eine gewisse *quantitative* Korrektion erfahren durch Bemerkungen, die *Burbury*[161a]) entwickelt hat.

---

164) In Nr. **12**b wurde noch von den Korrektionen abgesehen, welche in Gl. (35a) (Anm. 115) wegen der Undurchdringlichkeit der Moleküle einzuführen sind. *Hier* aber kommen diese Korrektionen in Betracht. Siehe *Jeans* l. c.

165) Über die Verträglichkeit oder Unverträglichkeit dieser Behauptung mit allen früheren liesse sich ersichtlich nur dadurch eine Entscheidung gewinnen, dass man durch rechnerische Verfolgung aller Bewegungen der Schar von t_A bis t_B die Zusammensetzung der Teilmenge bestimmt, was praktisch unmöglich ist.

Nach *Burbury* wird durch die Ausdehnung der Moleküle und durch die Kräfte, mit denen sie aufeinander wirken eine „correlation of velocities" benachbarter Moleküle erzeugt, welche auf die Zahl der Zusammenstösse Einfluss hat. Da die *Jeans*sche Analyse keinesfalls über den Nachweis von (Xa) und (Xb) hinausgreift, kann sie über diese Korrektionen nichts entscheiden.

Aber wenn auch die Formulierung der „molekularen Unordnungshypothese" noch viele Lücken aufweist, jedenfalls scheint klargestellt zu sein: der Umkehr- und Wiederkehreinwand richten sich nur gegen die *ursprüngliche* Fassung des Stosszahlansatzes, deren Unhaltbarkeit sie in der Tat nachweisen. Die *statistische Weiterbildung* des Stosszahlansatzes trägt hingegen schon allen Forderungen Rechnung, die aus jenen Einwänden erfliessen[166]).

III. Die „statistische Mechanik" von W. Gibbs.

19. Das Axiomatisierungsproblem der Kinetostatistik. Um den Übergang von der *älteren* Fassung der kinetischen Theorie zu der noch skizzenhaften *statistischen* Fassung richtig zu bewerten, wäre ein Vergleich mit den anderen Disziplinen notwendig, in denen ebenfalls die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung gefunden haben. Sie alle zeigen einen analogen Entwicklungsprozess:

Ursprünglich appelliert der Term „Wahrscheinlichkeit" ganz offen an ein spezifisches *Abschätzungsgefühl*, das imstande sein soll, Lücken in den Beobachtungen und Rechnungen auszufüllen[167]); vor allem an eine Art *instinktiven Wissens* darüber, welche elementaren Vorkommnisse in jedem Fall als „gleichmöglich" gelten müssen[167a]).

Später zeigt sich dann eine kritische Reaktion, die in den verschiedenen Anwendungsgebieten zu sehr verschiedenen Ergebnissen führte, nur ausnahmsweise aber zu einer vollständigen Verwerfung (dieses scheint z. B. für die „Theorie der Abstimmungen" und die „Theorie der Zeugenaussagen" der Fall zu sein[168])). Überall, wo sich die bisherigen Ansätze *der Erfahrung gegenüber als fruchtbar erwiesen hatten*, wurde eine neue Formulierung gefunden, in der die bewährten Ansätze aufrechterhalten und weitergebildet werden (vgl. die Formu-

---

166) *Burbury* hat sich dieser Auffassung *nicht* angeschlossen.

167) Vgl. z. B. den Ansatz von *Krönig* in Nr. 2.

167a) Vgl. *J. v. Kries*, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg 1886, Kap. VIII.

168) Vgl. *H. Bruns*, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Leipzig 1906, § 63, 64.

lierung, welche die Kollektivmasslehre in die Theorie verschiedener Massenerscheinungen einführte[169]).

Für eine entsprechende Durchbildung der kinetischen Theorie liegt ersichtlich nur erst eine Skizze vor, und es bleibt zweifelhaft, inwieweit sie sich durchführen lassen wird. Jedenfalls bezeichnet sie aber klar die Auffassung, welche die ehemaligen „Wahrscheinlichkeitshypothesen" und die „Hypothesen" über die Natur der Gasmoleküle [vgl. Nr. **1**] erhalten müssen:

Die kinetischen „Erklärungen" werden zu *Abbildungen* [vgl. Nr. **15**] und dementsprechend jene beiden Gruppen von „Hypothesen" zu *willkürlichen Festsetzungen über den Aufbau des abbildenden Schemas;* nämlich zu Festsetzungen

1) über die Struktur des Gasmodelles,

2) über die Auswahl der Bewegungsschar[170]).

---

169) *Bruns* l. c., p. 93 ff.

170) Überall, wo in den Aussagen (IV)—(XI) (Nr. **14**—**17**) der Ausdruck „erdrückende Mehrzahl" gebraucht wurde, sollte im Anschluss an *Boltzmann* als Häufigkeitsmass das „*Volumen*" entsprechender Gebiete im Γ-Raum genommen werden. Von der Wahl des Häufigkeitsmasses hängt ab, *welches* Vorkommnis sich in der Bewegungsschar als „erdrückend häufigstes" hervorhebt. Man stösst hier also auf eine Frage, die in analoger Weise bei jeder Untersuchung auftritt, welche „*geometrische Wahrscheinlichkeiten*" betrifft: *mit welchem Recht bevorzugte Boltzmann dieses spezielle Häufigkeitsmass vor anderen?* — Es seien gegeben zwei Scharen von Bewegungen; ihre G-Punkte mögen im Γ-Raum zu den konsekutiven Zeiten $t_1, t_2, t_3 \ldots$ die Gebiete $(A_1), (A_2), (A_3) \ldots$ resp. $(B_1), (B_2), (B_3) \ldots$ erfüllen. Als Massbestimmung für die relative Häufigkeit der Bewegungen in der einen und der anderen Schar — das heisst ihrer G-Punkte — wird man offenbar nur eine solche zulassen können, bei welcher sich *für die relative Häufigkeit dieser G-Punkte in allen Momenten $t_1, t_2, t_3 \ldots$ dieselbe Zahl ergiebt*, und dies für jede beliebige Auswahl der Anfangsgebiete A_1 und B_1. Bezeichnen wir diese relative Häufigkeit mit $\{A_s\} : \{B_s\}$, so fordern wir also, dass sei:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\{A_1\}}{\{B_1\}} = \frac{\{A_2\}}{\{B_2\}} = \cdots = \frac{\{A_s\}}{\{B_s\}}.$$

Man gelangt nun unmittelbar zu folgenden Bemerkungen:

a) Das *Boltzmann*sche Häufigkeitsmass: $\{A_s\} = [A_s]$, $\{B_s\} = [B_s]$ erfüllt wegen des *Liouville*schen Theorems (Gl. 26) in der Tat die Invarianzforderung (I).

b) Nimmt man als Γ-Raum statt des (q, p)-Raumes einen $(q, \dot{q})$-Raum und als Häufigkeitsmass die Volumina, welche die G-Punkte in *diesem* Raum erfüllen, so kommt man im allgemeinen in Widerspruch mit Forderung (I). Vgl. Anm. 77[a].

c) Nimmt man als Häufigkeitsmass das Integral

$$\text{(II)} \qquad \int \cdots \int F(E, \varphi_2, \ldots \varphi_{2rN-1})\, dq_1^1 \ldots dp_r^N,$$

erstreckt über das Gebiet, welches die G-Punkte jeweils im (q, p)-Raum erfüllen

Die Freiheit der Festsetzungen erscheint dabei in der Hauptsache nur an *eine* Forderung gebunden: *Das Schema soll in sich widerspruchsfrei sein.* Diese *Tendenz zur Axiomatisierung* bildet einen wesentlichen Faktor in der ganzen neueren Entwicklung der kinetischen Theorie; allgemeinere Beachtung von Seiten der Mathematiker[171]) fand sie aber nur erst in der programmatischen Formulierung, die ihr *W. Gibbs* im Vorwort zu seiner „statistischen Mechanik" (1901) gab.

20. Das Programm von W. Gibbs in seiner „statistischen Mechanik". An der genannten Stelle bezeichnet *Gibbs* etwa folgendermassen das Ziel seiner Darstellung: Die statistisch-mechanischen Begriffe und Methoden seien bisher nicht als selbständige Disziplin ausgebaut worden, sondern immer nur als *Hilfsmittel* für die kinetische Theorie der Materie; die grössten Schwierigkeiten rührten bei dieser Art der Bearbeitung davon her, dass man sich immer bemühe, Hypothesen über die Struktur der Gasmodelle zugrunde zu legen, die möglichst allen Beobachtungstatsachen Rechnung tragen. „Schwierig-

— Bedeutung von F dieselbe wie in Gl. (28) —, so genügt diese Massbestimmung der Forderung (I) bei beliebiger, nur ein für allemal festgehaltener Wahl der Funktion F.

d) Die in (c) angegebene Klasse von Massbestimmung benutzt als Gewichtsfunktion die allgemeinste stationäre Dichtenverteilung (Gl. 28) im Γ-Raum.

e) Eine Gewichtsfunktion, die sich *nicht* auf die Form: $F(E, \varphi_2 \dots \varphi_{2rN-1})$ bringen lässt, kann nicht gleichzeitig erfüllen: die Forderung (I) und die Forderung, dass sie für ein bestimmtes Element des Γ-Raumes zu allen Zeiten t dieselbe Massbestimmung liefere.

f) Die Beschränkung der Gewichtsfunktion auf die weitaus speziellere Form: $F(E)$ ist gleichwertig mit der Beschränkung auf die „ergodische" Dichtenverteilung (30) im Γ-Raum. (Da man in Nr. **13—15** immer nur mit einer Schar von Bewegungen mit gleichem E zu tun hat, so liefert hier die *Boltzmann*sche Massbestimmung mit $F = 1$ keine anderen Resultate als die allgemeinste ergodische mit $F = F(E)$).

Zusammenfassend erkennt man: Die *Boltzmann*sche Massbestimmung ist insofern *nicht ganz willkürlich*, als das *Liouville*sche Theorem in Verbindung mit der Forderung (I) alle Massbestimmungen ausschliesst, ausser der in (c) angeführten Klasse, deren *einfachster Spezialfall* eben die *Boltzmann*sche Massbestimmung ist. *Willkürlich bleibt die Beschränkung der Gewichtsfunktion von $F(E, \varphi_2 \dots \varphi_{2rN-1})$ auf $F(E)$, sobald man sich nicht mehr auf die Behauptung beruft, dass die Gasmodelle ergodische Systeme sind.* — Dass man an dieser Spezialisierung auch in solchen Fällen festhalten zu müssen glaubt, wo sie *deutlich unzweckmässig* wird (vgl. Nr. **26** Ende), erklärt sich wohl zum Teil historisch: die vorbildlichen Arbeiten, in denen *Boltzmann* und *Maxwell* die statistisch mechanischen Methoden begründeten, waren eben noch ganz von jener Ergodenhypothese beherrscht.

171) Siehe *J. Hadamard* [1] und *H. Poincaré* [4].

keiten dieser Art haben den Verfasser vor dem Versuche zurückgeschreckt, die Geheimnisse der Natur zu erklären, und haben ihn genötigt, sich mit dem bescheideneren Ziel zu begnügen, einige der einfacheren Sätze aus dem statistischen Zweig der Mechanik aufzustellen. *Hier kann es keinen Irrtum in bezug auf Übereinstimmung der Hypothesen mit den Tatsachen in der Natur geben, denn so etwas wird hier gar nicht beansprucht. Der einzige Fehler, in den man noch verfallen kann, wäre eine mangelnde Übereinstimmung zwischen den Voraussetzungen und den Folgerungen. Einen solchen dürfen wir aber bei einiger Sorgfalt zu vermeiden hoffen*"[172]).

Die folgenden Angaben über den Inhalt des *Gibbs*schen Buches sind nur so weit durchgeführt, als es für die Beurteilung folgender zwei Fragen erforderlich ist:

1) Inwieweit hat *Gibbs* das angekündigte Ziel erreicht, eine *in sich widerspruchsfreie* statistische Mechanik zu begründen?

2) Welches Verhältnis besteht zwischen den von *Gibbs* angegebenen Analogien zur Thermodynamik und den von *Boltzmann* angegebenen?

Besonders im Hinblick auf die erstere Frage hat man drei Gruppen von Untersuchungen auseinanderzuhalten, die sich in jener Darstellung kombiniert finden:

a) Die definitionsgemässe Einführung gewisser *spezieller stationärer* Systemscharen — stationärer Dichtenverteilungen im Γ-Raum — sowie die Entwicklung von Theoremen über verschiedene Mittelwerte, welche jene Systemscharen *vermöge ihrer speziellen Verteilung* liefern.

b) Behauptungen über das Verhalten *nichtstationärer* Systemscharen: darüber, wie sich eine nichtstationäre Dichtenverteilung im Γ-Raum allmählich „zerrührt", und wie sich dabei gewisse Funktionen dieser Dichtenverteilung zeitlich verändern.

c) Erörterungen, die zeigen sollen, dass zwischen dem Verhalten jener speziellen Scharen und dem thermodynamischen Verhalten eines warmen Körpers eine tiefgehende Analogie besteht.

21. Die Einführung gewisser spezieller stationärer Dichtenverteilungen im Γ-Raum (kanonische und mikrokanonische Verteilung). Nach einer Rekapitulation der Untersuchungen von *Boltzmann* über die allgemeinste stationäre Dichtenverteilung im Γ-Raum:

$$\varrho(q, \dot{q}) = F(E, \varphi_2, \ldots \varphi_{2rN-1}) \tag{52}$$

172) Zitiert nach der Übers. von *Zermelo*. Die Erörterungen l. c. pg. 171 zeigen, daß *Gibbs* sich weiterhin an dieses Axiomatisierungs-Programm kaum enger hält als etwa *Maxwell* und *Boltzmann*.

[vgl. Nr. 9d Gl. 28], beschränkt sich *Gibbs* in der Hauptsache auf folgende sehr spezielle Verteilungen[173]:

A) *Die mikrokanonische Verteilung:* ϱ überall gleich Null, ausser zwischen den Energieflächen $E = E_0$ und $E = E_0 + \delta E_0$, wo δE_0 sehr klein ist. Innerhalb dieser Schale besitzt ϱ einen konstanten Wert. Diese Verteilung der räumlichen Dichte $\varrho(q, p)$ wird ersichtlich für ein $\delta E_0 = 0$ äquivalent mit der ergodischen Flächen-Dichten-Verteilung (31) in Nr. **10**b.

B) *Die kanonische Verteilung*[174])

$$\varrho(q, p) = e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}}. \tag{53}$$

Dabei ist $E(q, p)$ die Totalenergie, die das Gasmodell besitzt, falls sein Phasenpunkt G im Γ-Raum die Lage (q, p) hat. — Θ ist eine *willkürliche Konstante*, der „*Modul*" der Verteilung (53). — Ψ ist eine zweite *Konstante*, die sich aus der Forderung bestimmt, dass das über den *ganzen* Γ-Raum erstreckte Integral

$$\int \cdots \int \varrho \cdot dq_1^1 \cdots dp_r^N = 1 \tag{54}$$

sein soll, d. h. aus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}} dq_1^1 \cdots dp_r^N = 1. \tag{55}$$

Durch diese Verfügung wird bei der Berechnung des *Schar-Mittelwertes* einer Phasenfunktion $f(q, p)$

$$\overline{f(q, p)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int f \cdot e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}} dq_1^1 \cdots dp_r^N}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}} dq_1^1 \cdots dp_r^N} \tag{56}$$

der Nenner auf den bequemen Wert „Eins" reduziert.

Den späteren Anwendungen entsprechend, hänge dabei die potentielle Energie Φ nicht nur von den Koordinaten q ab, sondern noch von irgendwelchen Parametern $r_1, r_2 \ldots r_m$ — etwa von der Stellung irgendwelcher Kraftzentren, die auf die Moleküle des Gases Fernkräfte ausüben[175]).

---

173) Siehe noch die in Anm. 189 erwähnten Scharen.

174) Die auf Gl. (61) und (62) folgenden Erörterungen sowie die Ausführungen am Beginn von Nr. **24**a und Mitte Nr. **25** suchen klarzustellen, was *Gibbs* zur Einführung dieser speziellen Scharenverteilung veranlasst haben dürfte. Siehe *Gibbs* l. c. Cap. II u. Cap. XIV pg. 187, 188.

175) Im Beispiel (Anm. 67) bilden die Intensität des Kraftfeldes und die Stempelstellung solche Parameter.

Ein gleiches gilt dann von der Totalenergie

$$E = E(q, p; r_1, r_2, \ldots)$$

und damit von den rechten Seiten der *Hamilton*schen Gleichungen (22), welche die Strömung der G-Punkte im Γ-Raum dirigieren.

Man kann nun über die Parameter $r_1, r_2, \ldots$ zwei verschiedene Festsetzungen treffen:

1) Es werden ihnen zwar ganz beliebige Werte zuerteilt, aber sie werden zeitlich nicht verändert. In diesem Fall bleibt das System der Stromlinien im Γ-Raum zeitlich unverändert, und die Dichtenverteilung (53) hält sich *stationär* aufrecht.

2) Die Parameterwerte seien willkürlich gegebene Funktionen der Zeit: $r_1(t)$, $r_2(t)$, ... In diesem Falle ändert sich für jeden Punkt des Γ-Raumes fortlaufend die ihm zugehörige Strömungsrichtung, und die Dichtenverteilung (53) wird sich *nicht* stationär aufrecht erhalten.

22. Mittelwerts-Relationen bei kanonisch verteilten Systemscharen.

Wir haben zunächst Verfügung (1) festzuhalten. Unter dieser Annahme bildet *Gibbs* für einige spezielle Phasenfunktionen $f(q, p)$ die durch (56) definierten *Mittelwerte über die kanonische Gesamtheit*, und es wird hauptsächlich bestimmt:

A) die *Streuung*, welche eine solche Funktion f innerhalb der kanonischen Gesamtheit um ihren Mittelwert $\bar{f}$ aufweist;

B) die Abhängigkeit der Mittelwerte $\bar{f}$ vom Modul Θ und den Parametern $r_1, r_2, \ldots$.

Die Relationen, die *Gibbs* hierbei aufstellt, werden unmittelbar aus den Definitionsgleichungen für die Mittelwerte abgeleitet. Sie beruhen auf der Wahl der dabei benutzten Gewichtsfunktion: $e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}}$. Für die Behandlung der Frage B) ist zu beachten: dass die Gewichtsfunktion, d. h. die kanonische Dichtenverteilung, abhängt: 1) explicit von Θ; 2) vermöge E von den $r_1, r_2, \ldots$; 3) vermöge Ψ von Θ und den $r_1, r_2, \ldots$. Es seien hier einige Resultate dieser Art angeführt, soweit sie uns für die weiteren Erörterungen notwendig sind.

22a. Einige der Gibbsschen Resultate. 1. Bei Berücksichtigung des Umstandes, dass die Zahl der Freiheitsgrade eines Gasmodelles von der Grössenordnung der Trillion ist, beweist *Gibbs* folgendes Theorem[176]):

176) l. c. Cap. VII, p. 73. Vgl. den in Fussnote 2 p. 75 diskutierten Ausnahmefall. Wie in Behauptung (XII) die Kleinheit der Dispersion mit der enormen

(XII) In einer mit dem Modul $\Theta = \Theta_0$ *kanonisch* verteilten Gasmodellschar besitzt die erdrückende Mehrzahl aller Individuen sehr nahe ein und denselben Wert der Totalenergie; $E = E_0$.

2. Die kinetische Energie jedes Moleküles, z. B. die des k-ten, ist eine definite quadratische Form seiner Momente $p_1^k \ldots p_r^k$. Sie lässt sich aber immer als halbe Summe der Quadrate gewisser r linear-homogener reeller Verbindungen dieser Momente darstellen. Diese Verbindungen $u_1^k \ldots u_r^k$ — sogenannte „Momentoide"[177]) — lassen sich dabei noch auf unendlich viele Weisen wählen. *Gibbs* beweist nun für die über die kanonische Schar gebildeten Quadratmittel der Grössen $u_1^1 \ldots u_r^N$ die Gleichung:

(57) $$\frac{1}{2}\overline{(u_1^1)^2} = \cdots \frac{1}{2}\overline{(u_s^k)^2} = \cdots \frac{1}{2}\overline{(u_r^N)^2} = \frac{\Theta}{2},$$

Grösse von $2rN$ zusammenhängt, macht man sich bequem an folgendem Beispiel klar (l. c. p. 79): Das Gasquantum bestehe aus N Punktmolekülen, die elastisch an Gleichgewichtslagen gebunden sind. Die Koordinaten x, y, z jedes Moleküles seien von seiner Gleichgewichtslage aus gerechnet. Dann ist $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $\ldots$, $q_{3N} = z_N$; $p_1 = m\dot{x}$, $\ldots$, $p_{3N} = m\dot{z}_N$, also

$$E = \frac{x}{2}\sum_1^{3N}{}^h q_h^2 + \frac{1}{2m}\sum_1^{3N}{}^h p_h^2.$$

Die Flächenschar $E =$ const. besteht aus einer Schar ähnlicher „Ellipsoide", deren Oberfläche mit E enorm rasch wächst, nämlich wie $(\sqrt{E})^{6N-1}$. Die Zahl der Individuen der Schar (53), für die $\sqrt{E}$ zwischen gegebenen, infinitesimal benachbarten Grenzen liegt, ist hier

(A) $$\text{const. } R^{6N-1} \cdot e^{-\frac{R^2}{\Theta^2}}\, dR$$

(R zur Abkürzung $\sqrt{E}$). Als häufigsten, ferner als mittleren Energiewert und als Quadratmittel der Abweichung vom Mittelwert findet man:

$$E_0 = (6N-1)\frac{\Theta}{2}, \quad \bar{E} = 6N\frac{\Theta}{2}, \quad \overline{(E-\bar{E})^2} = 3N\Theta^2.$$

Bei Benützung des üblichen Masses ergiebt sich also

(B) $$\frac{\overline{(E-\bar{E})^2}}{(\bar{E})^2} = \frac{1}{3N}$$

als die gesuchte „Dispersion". Man vergleiche mit der Verteilung (A) der *Gasmodellschar* die Maxwellsche Verteilung für die Absolutgeschwindigkeit c in einer *Schar von Punktmolekülen* und die Dispersion, welche sie für die kinetische Energie λ dieser Moleküle liefert:

(A′) $\text{const. } c^2 \cdot e^{-\alpha c^2} dc$ (B′) $\frac{\overline{(\lambda-\bar{\lambda})^2}}{(\bar{\lambda})^2} = \frac{1}{3}$.

177) Diese Bezeichnung hat *Boltzmann* (1882) [13] eingeführt. Ebendort Diskussion des Gegensatzes zwischen Moment und dessen *Verallgemeinerung*, dem Momentoid.

woraus sich für den *Scharmittelwert* der kinetischen Energie des ganzen Gasmodelles folgende einfache Beziehung zum Scharmodul Θ ergiebt:

(58) $$\bar{L} = \frac{rN\Theta}{2}.$$

3. Das Gasmodell übt in jedem Augenblick auf die oben erwähnten Kraftzentren oder den Stempel eine gewisse Rückwirkung aus: in einer bestimmten Bewegungsphase (q, p) wirkt es „entlang des Parameters r_h" mit der generalisierten Kraft

(59) $$R_h(q, p; r) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_h} = -\frac{\partial E}{\partial r_h}$$

nach außen. Differenziert man Gl. (55) nach r_h und kombiniert mit Gl. (59), so ergiebt sich unmittelbar folgende Relation für den *Scharmittelwert* von R_h:

(60) $$\overline{R_h} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r_h}.$$

22b. Beziehung zum Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz. Um sich einen Überblick über diese und analoge Relationen zu verschaffen, wie sie *Gibbs* entwickelt, empfiehlt es sich, folgende Frage zu berühren, die allerdings den Rahmen der *Gibbs*schen Darstellung wesentlich überschreitet[178]).

Sei $f(q, p)$ eine Phasenfunktion, die ihren Wert nicht ändert, wenn man die Moleküle untereinander vertauscht; sie wird also einen bestimmten Wert aufweisen, falls unter den Molekülen des Gases die zu $E_0, r_1 \ldots r_m$ gehörige Maxwell-Boltzmannsche Verteilung (46) herrscht — den Wert:

(61) $$[f(q, p)]_{E_0, r}^{\text{M. B.}} = B(E_0, r_1 \ldots r_m).$$

Sei ferner

(62) $$\overline{f(q, p)} = g(\Theta_0, r_1 \ldots r_m),$$

der Mittelwert gebildet über jene kanonische Gasmodellschar, deren Modul $\Theta = \Theta_0$ gerade — vgl. (XII) — dem Energiewert E_0 angepasst ist. *Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen den Grössen* (62) *und* (61)?

Nach (XII) ist zunächst plausibel, dass *im allgemeinen* der *kanonische* Scharmittelwert (62) sehr nahe zusammenfallen wird mit dem Mittelwert, gebildet für eine zu $E = E_0$ gehörige *mikrokanonische* oder auch ergodische Schar: In der Tat fällt dann auch z. B. die

178) Die Dissertation von *L. S. Ornstein* (1908) [1] enthält eine eingehende Untersuchung dieser Frage. Siehe besonders l. c. p. 119.

Gl. (57) zusammen mit einer Relation, welche *Boltzmann* (1871) für ergodische Scharen abgeleitet hatte[179]). Die mikrokanonische Schar ist aber weiter sehr nahe gleichwertig mit einer Schar, welche mit konstanter Dichte über die zu

$$E(Z) \equiv \sum a_i \varepsilon_i = E_0$$

gehörige „Schale" im Γ-Raum verteilt ist (vgl. Nr. **12**c).

Ergänzt man nun die *Gibbs*sche Darstellung durch die in Nr. **13** (I) besprochenen Untersuchungen von *Boltzmann*, so folgt schliesslich: *in einer kanonisch verteilten Gasmodellschar weist die erdrückende Mehrzahl der Individuen die zu* $r_1, \ldots r_m$ *und* $E_0 = \bar{E}$ *gehörige Maxwell-Boltzmannsche Verteilung* (46) *auf.*

Aus dem Gesichtspunkt der *Boltzmann*schen Darstellung erscheint somit die Einführung der *kanonischen* Verteilung als ein *analytischer Kunstgriff*, der einigermassen an *Dirichlets „Diskontinuitätsfaktor"* erinnert[178]): Bei der Mittelwertbildung (56) zur Berechnung von $\overline{f(q,p)}$ bleibt die Integration immer unveränderlich über den unendlichen Γ-Raum erstreckt; die *entscheidende Hauptmasse* aller Gasmodelle aber wird durch passende Regulierung des Moduls Θ und der Parameter $r_1 \ldots r_m$ jeweils auf Γ-Gebiete aufgeschoben, welche diejenige M.-B.-Vert. liefern, die zum vorgegebenen E_0 und den übrigen vorgeschriebenen Bedingungen gehört.

22c. Die Gibbssche Massfunktion σ für die Abweichung von der kanonischen Verteilung. Als Hilfsmittel für die Untersuchungen nichtstationärer ϱ-Verteilungen führt *Gibbs* eine Massfunktion ein für die Abweichung, welche eine beliebig vorgegebene ϱ-Verteilung gegen die kanonische Verteilung mit gleichem $\bar{E}$ aufweist. Diese Funktion heisse σ und ist definiert durch[180])

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \varrho \lg \varrho \quad dq_1^1 \cdots dp_r^N. \tag{63}$$

Ihr Mass-Charakter ist durch Sätze von folgender Art gekennzeichnet:

(XIII) Wird eine *gegebene Menge* von G-Punkten über ein *gegebenes Gebiet* des Γ-Raumes verteilt, so nimmt σ seinen relativ kleinsten Wert an, falls diese Menge innerhalb des Gebietes mit *überall gleicher Dichte* verteilt wird.

---

179) *Boltzmann* [4]. Nur durch eine Reihe von Zusatzannahmen kann man von Gl. 57 zur Gl. 57′ in Nr **24**a übergehen.

180) *Gibbs* bezeichnet diese Funktion und die durch (66) eingeführte Funktion Σ unterschiedslos mit $\bar{\eta}$. Der Beweis der Behauptungen (XIII)—(XIV) l. c. Cap. XI.

(XIII a) Wenn die Totalmenge der G-Punkte, die auf jedes Energiegebiet $E, E + \delta E$ entfällt, gegeben ist, so nimmt σ seinen kleinsten Wert an, falls ϱ entlang jeder einzelnen Energiefläche konstant ist.

(XIV) Wenn für eine Schar von der Totalmenge Eins der *Mittelwert* $\bar{E}$ *gegeben* ist, so liefert die zu $\bar{E}$ gehörige *kanonische* Scharverteilung den relativ kleinsten Wert von σ.

Beim Beweis von (XIII) und (XIII a) kommt in der Definition von σ allein die „Konkavität" des Integranden $\varrho \lg \varrho$ in Betracht, und diese Aussagen werden also auch z. B. für den Integranden ϱ^{2n} gültig bleiben. Damit aber bei den in (XIV) gegebenen Nebenbedingungen gerade die *kanonische* Scharverteilung ausgezeichnet erscheine, war σ in jener speziellen Weise zu konstruieren.

Die bisher angeführten, *vorbereitenden* Resultate vom Typus der Gleichungen (57), (58), (60) oder der Aussagen (XII)—(XIV) leitet *Gibbs* durch elementare, *vollständig durchführbare Umformungen* her. In der Tat handelt es sich soweit auch nur um die unmittelbaren rechnerischen Folgen aus der speziellen ϱ-Wahl (53).

An ihre Stelle treten *skizzenhafte Erwägungen*, sobald sich die Untersuchung dem Hauptgegenstand des *Gibbs*schen Buches zuwendet: den *nichtstationären Gesamtheiten.* Es liegt das daran, dass eigentlich nur erst hier der *dynamische* Charakter der behandelten statistischen Gesamtheiten zur Geltung kommt.

23. Nichtstationäre Dichtenverteilungen im Γ-Raum.

23a. Das „Zerrühren" der nichtstationären Verteilungen. Man hat da vor allem die Aussagen zu analysieren, welche im Kap. XII des Buches entwickelt werden. Sie beziehen sich auf die Frage: Was wird im Laufe der Zeit aus einer $\varrho(q, p)$-Verteilung, welche *nicht* die Form (52) besitzt und die also *nicht* imstande ist, sich stationär aufrecht zu erhalten?

Es sei der Γ-Raum irgendwie in sehr kleine, aber wesentlich nicht verschwindend kleine Zellen Ω geteilt: $\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_\lambda \ldots$ die etwa gleichgroße Würfel sein können. Der Mittelwert, den die *„feine"* Dichte $\varrho(q, p, t)$ im Moment t für die Zelle Ω_λ liefert, sei als *„grobe"* Dichte $P_\lambda(t)$ — lies „gross ϱ" — dieser Zelle bezeichnet. Es ist wegen (54):

(64) $$\sum P_\lambda(t) = 1.$$

Die für alles Folgende grundlegende Behauptung, zu der hier *Gibbs* gelangt, lässt sich dann so formulieren:

(XV) Jede nichtstationäre *feine* Dichtenverteilung wird im (sta-

tionären) Strömungsfeld des Γ-Raumes derart „*zerrührt*“, dass die zugehörigen *groben* Dichten allmählich stationärbleibende Werte annehmen.

H. A. Lorentz[181]) charakterisiert diese Tendenz zu einer stationären P-Verteilung noch näher durch folgende ergänzende Behauptung:

(XV′) Jene Grenzwerte von P sind entlang den einzelnen Flächen konstanter Energie konstant;

$$\lim_{t=+\infty} P(t, p, q) = F(E). \tag{65}$$

Zur Begründung seiner Behauptung beruft sich *Gibbs* vor allem auf die *Anschauung*: Zerrühren eines (nichtdiffundierenden) Farbstoffes in einem farblosen Lösungsmittel, und giebt weiterhin eben dieser Begründung eine mehr rechnerische Fassung — in durchsichtigerer Form bei *Lorentz* reproduziert.

Bemerkungen zu (XV) *und* (XV′): 1. Im Hinblick auf die später zu besprechenden Analogien zur Thermodynamik ist es wichtig zu wissen, von welcher *Grössenordnung* die Zeiten sein mögen, nach welchen sich jene stationären P-Werte angenähert eingestellt haben werden. Nehmen wir irgend einen normalen Wert für die Totalenergie des Gasmodelles und fassen wir zunächst die Zeit ins Auge, die ein G-Punkt durchschnittlich braucht, um von einer Ω_λ-Zelle auslaufend wieder zu ihr zurückzukehren. Es handelt sich hier ersichtlich um Zeiten von der Art jener „enorm grossen“ *Poincaré-Zermelo*schen Wiederkehrepochen, die uns im „Wiederkehreinwand“ (Nr. 7b) begegnet sind. Solange man also — wie es *Gibbs* und *Lorentz* tun — bei der Begründung der Behauptung (XV) und (XV′) keine anderen Umstände in Rechnung zieht als diejenigen, welche beim Zerrühren eines Farbstoffes in Betracht kommen, so kann man die angenäherte Stationarität von P und den angenäherten Eintritt der P-Verteilung (65) nur erst nach vielen *Poincaré-Zermelo*-Epochen erwarten. 2. Die Beh. (XV′) und einige später auszuführenden Aussagen stehen ersichtlich in enger Beziehung zur Ergodenhypothese[182]). 3. Die rechnerische Analyse, welche *Gibbs* und *Lorentz* für den Vermischungsprozess geben, enthält eine wesentliche Unvollkommenheit: sie benützt die Bezeichnung „Dichte“ schwankend im Sinne von ϱ und P, und nur dadurch wird verständlich, wie jener Kalkul so einfach und ohne

181) *Lorentz* (1906) [2] § 79.

182) *Gibbs* l. c. p. 174: „Die mikrokanonische Gesamtheit, in der alle Systeme die gleiche Energie besitzen, stellt in vielen Fällen einfach die *Zeitgesamtheit* dar, d. h. die Gesamtheit der Phasen, durch die ein einzelnes System im Laufe der Zeit hindurchgeht.“

besondere Annahmen eine mit wachsender Zeit wachsende Vermischung ergeben konnte[183]).

Aus dem *Liouville*schen Theorem Gl. (26) und (26′) ergiebt sich unmittelbar, dass die Grösse σ, welche die Verteilung der *feinen* Dichte ϱ kontrolliert, bei jenem Vermischungsprozess zeitlich exakt konstant bleibt; die in analoger Weise aus der *groben* Dichte P aufgebaute Funktion

(66) $$\Sigma = \sum P_\lambda \lg P_\lambda$$

kann sich hingegen sehr wohl mit der Zeit verändern[184]). *Gibbs* versucht gleichzeitig mit der Beh. (XV) die folgende Behauptung zu beweisen[185]):

(XVI) Jede nichtstationäre ϱ-Verteilung wird durch die im Γ-Raum herrschende stationäre Strömung derart zerrührt, dass für das Inhomogenitätsmass Σ der P-Verteilung gilt:

(67) $$\lim_{t=+\infty} \Sigma(t) \leqq \Sigma(t_0).$$

Bemerkungen zu (XVI): 1. *Gibbs* hebt ausdrücklich hervor: er versuche nur eine Aussage über den lim $\Sigma(t)$ für $t = +\infty$ zu beweisen, nicht aber die Aussage, dass $\Sigma(t_2) < \Sigma(t_1)$, falls nur $t_2 > t_1$ ist[186]). 2. Für die späteren Anwendungen ist entscheidend, *wie* niedrig der Limes ausfällt. Giebt man Beh. (XV′) zu und kombiniert sie mit dem (von σ auf Σ übertragenen Theorem (XIIIa)), so erhält man für jenen Limes einen Wert, der noch *beliebig stark* über demjenigen Wert bleiben kann, welcher zur entsprechenden *kanonischen* ϱ-Verteilung gehört. 3. Die Bemerkung (1) zu (XV) überträgt sich auf die Frage, nach welcher Zeit $\Sigma(t)$ merklich seinen Grenzwert erreicht.

---

183) *T.* u. *P. Ehrenfest* (1906) [1].

184) Seien (q, p) die Koordinaten, die ein G-Punkt im Moment t besitzt, falls er im Moment O die Lage (q_0, p_0) hatte. Es ist

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \varrho \lg \varrho \, dq_1^1 \ldots dp_r^N = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \varrho \lg \varrho \, \frac{\partial(q_1^1 \cdots p_r^N)}{\partial(q_{10}^1 \cdots p_{r0}^N)} \, dq_{10}^1 \ldots dp_{r0}^N.$$

Nach Anm. 77 ist die Transformationsdeterminante gleich Eins, und nach (26′) ist $\varrho \lg \varrho = \varrho_0 \lg \varrho_0$, also das letzte Integral gleich $\sigma(0)$. Für P trifft hingegen die zu (26′) analoge Aussage nur mehr angenähert zu. Vgl. Anm. 195.

185) l. c. p. 153 oben.

186) l. c. p. 153. Dies ist deshalb bemerkenswert, weil *Gibbs* hier offenbar fühlte, dass sein Beweis mehr lieferte, als er nach den Voraussetzungen liefern durfte. Der für die Irreversibilitätstheorie sehr wichtige vorletzte Absatz des Cap. XII ist uns unverständlich.

23 b. Das Verhalten spezieller nichtstationärer Gasmodellscharen. Um zu Analogien mit den Sätzen der Thermodynamik zu gelangen, behandelt *Gibbs* weiterhin das Verhalten gewisser spezieller nichtstationärer Scharen.

Es handelt sich dabei hauptsächlich um folgende beiden Probleme:

A) Bis zur Zeit t_A mögen alle Parameter $r_1, r_2, \ldots$ konstant die Werte $r_1^A, r_2^A, \ldots$ besitzen, und bis dahin möge die zu diesen Parameterwerten und zum Modul Θ^A gehörige kanonische Phasenverteilung

(68) $$\varrho^A = e^{\frac{\psi^A - E^A}{\Theta^A}}$$

geherrscht haben. Von da ab werden den Parametern $r_1, r_2, \ldots$ beliebige zeitliche Änderungen erteilt. Es sind die nun eintretenden Phasenverteilungen zu verfolgen.

B) Es werde der Fall betrachtet, dass das Molekularsystem in zwei Teile I und II geteilt ist, die zwar in Wechselwirkung stehen aber doch so, dass die Totalenergie E sich additiv aus den Energien beider Teile aufbaut:

(69) $$E = E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}}.$$

Für t_A sei die Phasenverteilung

(70) $$\varrho^A = e^{\frac{\psi_{\mathrm{I}} - E_{\mathrm{I}}}{\Theta_{\mathrm{I}}} + \frac{\psi_{\mathrm{II}} - E_{\mathrm{II}}}{\Theta_{\mathrm{II}}}}$$

vorgegeben; die Parameter $r_1, r_2, \ldots$ mögen *dauernd* konstant gehalten werden. [Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Verteilung sich im allgemeinen nicht aufrecht erhalten kann.] Es sind die nun eintretenden Phasenverteilungen zu verfolgen.

Die Behauptungen, zu denen *Gibbs* hier gelangt, wären etwa folgendermassen zu formulieren[187]):

(XVII) Besteht die in (A) erwähnte Änderung der Parameter in einem *einmaligen diskontinuierlichen Übergang* zu den Werten $r_1^B, r_2^B \ldots$, die weiterhin dauernd festgehalten werden, so ist die nach unendlicher Zeit sich einstellende P-Verteilung so beschaffen, dass sie (für alle Mittelwertsbildungen) sehr nahe durch eine bestimmte *kanonische*

187) Diese Behauptungen treten l. c. in Cap. XIII, wo sie abgeleitet werden, in anderer Form auf als in Cap. XIV, wo sie bei der Diskussion der thermodynamischen Analogieen benutzt werden. Wir folgen der letzteren Formulierung und der Darstellung von *Lorentz* [2].

ϱ-Verteilung

$$\varrho^B = e^{\frac{\psi^B - E^B}{\Theta^B}} \tag{71}$$

ersetzt werden kann.

(XVIII) Erfolgt in (A) die Änderung der Parameter $r_1, r_2 \ldots$ unendlich langsam, so ändert sich die P-Verteilung derart, dass sie fortlaufend sehr nahe durch *kanonische* ϱ-Verteilungen ersetzt werden kann. *Dabei bleibt* Σ *sehr nahe konstant.*

(XIX) Bei der unter (B) geschilderten Anordnung ist die für $t = +\infty$ sich einstellende P-Verteilung ebenfalls sehr nahe durch eine bestimmte *kanonische* ϱ-Verteilung ersetzbar.

Bemerkung zu (XVII)—(XIX). *Gibbs* sucht diese Behauptungen zu beweisen, indem er (XV) und (XVI) mit dem von σ auf Σ übertragenen Minimum-Theorem (XVI) kombiniert. Beachtet man aber Bemerkung (2) zu (XVI), so erkennt man folgendes: Während die Erörterungen der Kap. XI und XIII in allen diesen Fällen höchstens ein gewisses *Näherkommen* an die kanonische Verteilung nachweisen, verfährt das Kap. XIV bei der Diskussion der Analogien zur Thermodynamik so, als ob das *angenäherte Erreichtwerden* der kanonischen Verteilung nachgewiesen worden wäre. Nur erst dieser Sprung, der inmitten der elementaren, aber weitläufigen Umformungen von einer Ungleichung zur anderen leicht verborgen bleibt[187a]), lässt aus den Erwägungen allgemeiner *qualitativer* Natur, die *Gibbs* über nichtstationäre Scharen anstellt, die *quantitative* Aussage hervorgehen, dass in so vielen Fällen die Endverteilungen nahe-kanonisch sind.

Für die folgenden Ausführungen nehmen wir die Behauptungen (XV)—(XIX) als zugestanden an.

24. Die Analogien zum beobachtbaren Verhalten warmer Körper.

Es seien hier für einige spezielle, aber typische Fragen das *Gibbs*sche und *Boltzmann*sche Verfahren einander gegenübergestellt. Um ihren *begrifflichen Gegensatz* bequem überblickbar zu machen, ist es zweckmässig, den *Parallelismus ihres Rechenapparates* möglichst scharf hervortreten zu lassen. Wir stellen da zunächst einige Hilfsformeln zusammen.

24a. Aufstellung einiger Hilfsformeln. Die *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung der Molekülphasenpunkte im μ-Raum (Gl. 46)

187a) Siehe besonders l. c. p. 165, wo der Beweis für die Beh. XIX abgeschlossen wird. Vgl. Anm. 195.

lässt sich ersichtlich auch in folgender Form schreiben:

(53′) $$a_i = e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}},$$

wo die Energie ε_i, die ein Molekül aufweist, falls sein Phasenpunkt in der i^{ten} μ-Zelle liegt, noch abhängen kann von den oben eingeführten Parametern $r_1, \ldots r_m$. Die Grösse ϑ kann man entweder direkt vorgeben, in welchem Falle sich dann ψ aus der Forderung

(55′) $$\sum^i a_i = \sum^i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}} = N$$

und die Totalenergie E des Gases sich aus

(72) $$E = \sum^i a_i \varepsilon_i = \sum^i \varepsilon_i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}}$$

bestimmen würde, oder man kann umgekehrt bei gegebener Totalenergie ausser ψ auch ϑ durch (55′) und (72) bestimmt denken. Die Kraft, welche die N Moleküle *bei dieser Verteilung* in Richtung des Parameters r_h nach aussen ausüben, ist gegeben durch:

(59′) $$R_h = \sum^i a_i \left(- \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial r_h}\right);$$

differenziert man die Relation (55′) nach r_h, so ergiebt sich eine Umformung von (59′) in:

(60′) $$R_h = - \frac{\partial}{\partial r_h} \left(N \psi\right).$$

Die Rechnung, durch welche *Gibbs* Gl. (57) ableitet, erscheint als Übertragung derjenigen Rechnung, durch welche *Boltzmann* (1871) aus (53′) folgende Beziehung herleitete[188]):

(57′) $$\frac{1}{N} \sum_1^N {}^k \frac{1}{2} (u_1^{\,k})^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N {}^k \frac{1}{2} (u_2^{\,k})^2 = \cdots \frac{1}{N} \sum_1^N {}^k \frac{1}{2} (u_r^{\,k})^2 = \frac{\vartheta}{2}.$$

Daraus für die gesamte lebendige Kraft der N Moleküle:

(58′) $$L = \frac{N r \vartheta}{2}.$$

Geht man von derjenigen *M.-B.-Vert.* (53′), welche ϑ, $r_1 \ldots r_m$ entspricht, zu jener über, welche $\vartheta + \delta\vartheta$, $r_1 + \delta r_1 \ldots r_m + \delta r_m$ entspricht, so erhält man für diese Variation aus (55′) folgende Identität:

$$\sum^i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}} \delta\left(\frac{\psi}{\vartheta}\right) + \sum^i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}} \varepsilon_i \frac{\delta \vartheta}{\vartheta^2}$$
$$- \sum^i e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}} \frac{1}{\vartheta} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial r_1} \delta r_1 + \cdots \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial r_m} \delta r_m\right) = 0,$$

188) *Boltzmann* [3]. An der genannten Stelle für den speziellen Fall kartesischer Koordinaten. Vgl. *Boltzmann,* Gastheorie 2, p. 124.

daraus erhält man mit Hilfe von (55′), (72) und (59′) folgende Beziehung:

$$(73') \qquad N\delta\left(\frac{\psi}{\vartheta}\right) + \frac{E}{\vartheta^2}\delta\vartheta + \frac{1}{\vartheta}(R_1\delta r + \cdots R_m\delta r_m) = 0.$$

Geht man von derjenigen *kanonischen* Verteilung (53), welche $\Theta, r_1 \ldots r_m$ entspricht, zu jener über, welche $\Theta + \delta\Theta, r_1 + \delta r_1 \ldots r_m + \delta r_m$ entspricht, so erhält man für diese Variation aus (55) und (59) in ganz analoger Weise:

$$(73) \qquad \delta\left(\frac{\Psi}{\Theta}\right) + \frac{\overline{E}}{\Theta^2}\delta\Theta + \frac{1}{\Theta}(\overline{R}_1\delta r_1 + \cdots \overline{R}_m\delta r_m) = 0.$$

Nach diesen formalen Vorbereitungen stellen wir die typischen Analogien zum sichtbaren Verhalten eines warmen Körpers zusammen.

24b. Das Gas im Wärmegleichgewicht und der Temperaturausgleich zweier verschieden warmer Körper. 1. *Interpretation des Verhaltens, welches das Gas bei gegebener Totalenergie E_0 und bei gegebenen $r_1 \ldots r_m$ im Fall des Wärmegleichgewichtes zeigt.*

Boltzmann: Man greife im Γ-Raum die „Schale" von Γ-Punkten heraus, welche der vorgegebenen Totalenergie E_0 entsprechen. Die erdrückende Mehrzahl dieser Phasenpunkte erteilt den Molekülen des Gasmodelles sehr nahe eine entsprechende *M.-B.-Vert.* (53′) — vgl. Nr. **13** (I). Man berechne für *diese* Zustandsverteilung z. B. den Druck und die übrigen Reaktionskräfte, die kinetische Energie pro molekularen Freiheitsgrad usw. nach (57′), (60′) und ähnlichen.

Gibbs: Man berechne für die zu $\overline{E} = E_0$ und den gegebenen $r_1 \ldots r_m$-Werten gehörige kanonische Gasmodellschar[189]) die *Scharmittelwerte*: $\overline{R}_h$, $\overline{L}$ usw. nach (57), (60) und ähnlichen.

2. *Interpretation des Temperaturausgleiches bei Berührung zweier verschieden warmer Körper K_{I} und K_{II}.*

---

189) Wenn ausser der Totalenergie noch die Werte anderer Bewegungsintegrale, z. B. für ein freies System die Flächenmomente $F_1(q,p)$, $F_2(q,p)$, $F_3(q,p)$, vorgeschrieben sind, so greift *Boltzmann* die betreffenden Gebiete des Γ-Raumes heraus, während dann *Gibbs* mit einer Scharverteilung

$$e^{\frac{\Psi - E}{\Theta} + \frac{F_1}{\Omega_1} + \frac{F_2}{\Omega_2} + \frac{F_3}{\Omega_3}}$$

operiert; l. c. p. 37. In den kombinatorischen Entwicklungen, durch welche *Boltzmann* (1883) [14] die Zustandsverteilung im Dissoziationsgleichgewicht ableitet, tritt ausser der Festlegung der Totalenergie noch die Festlegung der Anzahl von Atomen verschiedener Art als Nebenbedingung auf. *Gibbs* umgeht durch seinen formalen Kunstgriff auch diese Nebenbedingungen, indem er im Cap. XV seines Buches bei der Behandlung des Dissoziationsgleichgewichtes eigentümliche Gasmodellscharen einführt, wo bei den verschiedenen Individuen der Schar die erwähnten Atomzahlen alle ganzen Werte von 0 bis ∞ durchlaufen, l. c. p. 198.

Boltzmann[190]): Vor der Koppelung wird den Molekülen von K_{I} resp. K_{II} diejenige *M.-B.-Vert.* zugeschrieben, die ihren vorgegebenen Anfangstemperaturen entspricht. Für das gekoppelte System — als *ein* Molekularsystem aufgefasst — ist dadurch die anfängliche Zustandsverteilung festgelegt. Der mittlere und zugleich erdrückend häufigste Verlauf in der anschliessenden Schar von Bewegungen (Nr. **14**c) soll dem Stosszahlansatz und H-Theorem gemäss erfolgen; dementsprechend werden schliesslich K_{I} und K_{II} *M.-B.-Vert.* mit untereinander gleichem ϑ aufweisen, d. h. nach (57'): kinetische Energie pro molekularem Freiheitsgrad in K_{I} und K_{II} gleich.

Gibbs: Vor der Koppelung werden K_{I} resp. K_{II} repräsentiert durch je eine kanonisch verteilte Gasmodellschar mit den Modulen Θ_{I}^{A} und Θ_{II}^{A}. Um ihren Kontakt zu repräsentieren, gebe man die Schar, welche entsteht, wenn man jedes Individuum der Schar I — in seinem momentanen Bewegungszustand — koppelt mit jedem Individuum der Schar II. Man erhält so in einem Γ-Raum von $2r_{\mathrm{I}}N_{\mathrm{I}}+2r_{\mathrm{II}}N_{\mathrm{II}}$ Dimensionen eine Dichtenverteilung, die im ersten Augenblick t^{A} durch die Formel (70) gegeben wird. War schon im Anfang $\Theta_{\mathrm{I}}^{A}=\Theta_{\mathrm{II}}^{A}$, so ist die *Kombinationsschar* von vornherein kanonisch und bleibt stationär[191]). Ist hingegen $\Theta_{\mathrm{I}}^{A}\neq\Theta_{\mathrm{II}}^{A}$, so ist jene anfängliche Dichtenverteilung im allgemeinen *nicht* imstande, sich stationär zu erhalten. Sie soll sich also gemäss den Aussagen (XV, XVI, XIX) zerrühren, wobei die *kanonische* ϱ-*Endverteilung* wieder angesehen werden kann als Mischverteilung zweier kanonischer Scharen I und II mit nunmehr schon gleichem Modul $\Theta_{\mathrm{I}}^{\infty}=\Theta_{\mathrm{II}}^{\infty}=\Theta^{\infty}$[192]). Wegen (57) und (58) ist dann der *Scharmittelwert* der kinetischen Energie pro molekularen Freiheitsgrad für K_{I} und K_{II} gleich gross.

24c. Die Temperatur als integrierender Nenner. Deutung der Entropie und Entropievermehrung bei irreversiblen Prozessen.

1. *Die Temperatur als integrierender Nenner der reversibel zugeführten Wärmemengen. Deutung der Entropie.*

Boltzmann: Bei unendlich langsamer Beeinflussung des Gasmodelles dürfe man so rechnen, als ob die Moleküle in jedem Augenblick eine *M.-B.-Vert.* besitzen, welche den Momentanwerten von $E_1, r_1 \ldots r_m$ entspricht. Unter dieser Annahme ergiebt sich für die Summe aus Energiezuwachs + Arbeitsabgabe bei einem infinitesimalen Übergang,

190) *Boltzmann* hat (1894) [17a] in einer gemeinsamen Arbeit mit *G. H. Bryan* seine älteren Ausführungen in einigen Beziehungen vervollständigt.

191) l. c. p. 35.

192) Vgl. Anm. 187a).

d. h. für die „*zugeführte Wärme*"

(74') $$\delta Q = \delta E + (R_1 \delta r + \cdots R_m \delta r_m)$$

mit Hilfe der Beziehung (73') folgende Aussage:

(75') $$\frac{\delta Q}{\vartheta} = \delta\left(\frac{E - N\psi}{\vartheta}\right).$$

Der Bau der Grösse, welche auf der rechten Seite von (75'), die die Rolle der *Entropie* spielt, legt folgende Darstellung nahe:

(76') $$\frac{E - N\psi}{\vartheta} = -\sum^i \lg\left(e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}}\right) e^{\frac{\psi - \varepsilon_i}{\vartheta}}.$$

Diese Darstellung giebt dann weiter den Anstoss, *versuchsweise* auch *für beliebige Zustandsverteilungen* a_i der Entropie die Funktion:

(77') $$-H = -\sum^i a_i \lg a_i$$

gegenüberzustellen.

Gibbs: Beeinflußt man alle Individuen einer anfänglich kanonischen Schar so, wie es der reversiblen Beeinflussung eines Gases entspricht[193]), so sei es erlaubt anzunehmen (vgl. XVIII), daß die Schar fortlaufend durch lauter kanonische Verteilungen hindurchgehe. Unter dieser Annahme lässt sich der *Scharmittelwert* des oben definierten δQ darstellen als[194])

(74) $$\overline{\delta Q} = \delta \overline{E} + (\overline{R}_1 \delta r_1 + \overline{R}_m \delta r_m)$$

und mit Hilfe der Beziehung (73) umformen in:

(75) $$\frac{\overline{\delta Q}}{\Theta} = \delta\left(\frac{\overline{E} - \Psi}{\Theta}\right).$$

Die Darstellung der rechtsstehenden Grössen durch

(76) $$\frac{\overline{E} - \Psi}{\Theta} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int \lg\left(e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}}\right) e^{\frac{\Psi - E}{\Theta}} dq_1^{\,1} \cdots dp_r^{\,N}$$

und dementsprechend der *Gibbs*sche Versuch die Grösse

(77) $$-\sigma = -\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int \varrho \lg \varrho \, dq_1^{\,1} \cdots dp_r^{\,N}$$

oder die Grösse $(-\Sigma)$ nun auch für *beliebige* ϱ-Verteilungen als „*Entropie*" anzusprechen, treten so in eine genaue *rechnerische* Analogie zur *Boltzmann*schen Behandlung der *H*-Funktion.

193) l. c. p. 158 u. f.

194) Diese Annahme ist hinreichend, um $\overline{\delta E}$ durch $\delta \overline{E}$ ersetzen zu können, wie dies in Gl. (74) geschehen ist. Die Identität (73) beruht auf der Annahme, dass die variierte Scharverteilung ebenfalls kanonisch ist.

2. *Die Entropievermehrung bei irreversiblen Prozessen in einem isolierten System.*

Boltzmann: Ist die für t^A vorgegebene Verteilung der Molekül-Phasenpunkte im μ-Raum nicht Maxwell-Boltzmannisch, so weist die Grösse H, welche ihre a_i-Vert. kontrolliert, für die erdrückende Mehrzahl der anschliessenden Bewegungen in jedem späteren Zeitpunkt t^B einen kleineren Wert auf als im Moment t^A.

Gibbs: Ist die für t^A vorgegebene Verteilung der Gas-Phasenpunkte im Γ-Raum weder kanonisch noch überhaupt vom Typus (52)[195]), so weist die Grösse Σ, welche ihre P_λ-Verteilung kontrolliert, nach unendlich langer Zeit einen kleineren Wert auf als im Moment t^A.

24 d. Bemerkungen zur Interpretation der Entropie durch die Gibbssche Massfunktion ($-\Sigma$). 1. *M. Planck* hat hervorgehoben[196]): Beim Aufbau der Grösse H berücksichtigt *Boltzmann* von vornherein die Frage, ob alle Moleküle des Gases untereinander gleich, d. h. —

195) Jede ϱ-Verteilung vom Typus (52) erhält sich nämlich stationär aufrecht und liefert so ein zeitlich konstantes Σ. In diesem Zusammenhang ist es instruktiv aus dem *Boltzmannschen* Gesichtspunkt die irreversiblen Prozesse in folgendem idealisierten System zu betrachten: Man fingiere ein Gas aus N Punktmolekülen, die aufeinander keinerlei Wechselwirkung ausüben und keinerlei Kräften unterworfen sind ausser den elastischen Repulsionskräften bei ihren Zusammenstössen mit der unregelmässig geformten vollkommen elastischen Gefässwand. Die N-Molekül-Bildpunkte im μ-Raum bewegen sich *in diesem Fall* ebenso unabhängig voneinander, wie sich die ∞ vielen Gasbildpunkte im Γ-Raum *immer* unabhängig voneinander bewegen. Eine beliebig vorgegebene a_i-Verteilung im μ-Raum wird sich im allgemeinen allmählich „zerrühren" (Ausgleich von Dichtenunterschieden im Gefäss und Verschwinden von ausgezeichneten Bewegungsrichtungen), und so wird man die Behauptung, dass $\lim_{t=\infty} H(t) < H(t_0)$ sei, für plausibel halten. Die Behauptung aber, dass dieser Limes exakt oder nahe mit demjenigen H-Wert zusammenfällt, der zur entsprechenden Maxwell-Verteilung gehört, ist hier offenbar unannehmbar: Hier kann im allgemeinen keine Rede sein von einem angenäherten Erreichtwerden der Maxwell-Verteilung, denn die anfängliche Verteilung der Absolutgeschwindigkeit bleibt exakt erhalten. Es ist bemerkenswert, dass *Boltzmann* diejenige Änderung, die H durch das *stossfreie Zerrühren* der a_i-Verteilung erfährt, immer vernachlässigt gegenüber derjenigen Änderung, die durch die *Zusammenstösse* zwischen den Molekülen bewirkt wird. Vgl. *Boltzmann* (1872) [6] Cap. V und Gastheorie 1 § 18 Fussnote (2) und 2 § 75. Dass *Boltzmann* und alle an ihn sich anschliessenden Autoren für die Zerrühränderung von *H exakt* Null erhalten, beruht darauf, dass sie die diskontinuierliche a_i-Verteilung durch eine kontinuierliche Verteilung approximieren und so mit einer Funktion η arbeiten, die sich zu H analog verhält, wie in Anm. 184 die Grösse σ sich zu Σ verhält.

196) *M. Planck* (1903) [1].

siehe Nr. **12** b, d — miteinander permutierbar sind, oder ob ein Gasgemisch vorliegt. Bei der Definition der Grösse Σ finde hingegen dieser Umstand keine Berücksichtigung. Infolgedessen ergebe die *Gibbs*sche Definition „zunächst keinen Aufschluss über die Art, wie die Konzentrationen verschiedener Molekülsorten in die additive Konstante des Entropieausdruckes eingehen". *Planck* deutet an, wie man diese Lücke durch Einführung einer anderen Funktion ausfüllen müsste. *L. S. Ornstein*[197]) findet hingegen ($-\Sigma$) für ein Gasmodell, das mehrere Molekülsorten enthält, in voller Übereinstimmung mit der thermodynamisch definierten Entropie des im Gleichgewicht befindlichen Gasgemisches. Aber es ist zu beachten, dass er in Abweichung von der *Gibbs*schen Darstellung, nach dem Verfahren von *Boltzmann* auf die Permutabilität der gleichartigen Moleküle zurückgreifen muss, wo er berechnen will, um wieviel die Entropie bei der Diffusion zweier Gase wächst.

2. *H. A. Lorentz*[198]) führt aus, warum man die Grösse ($-\Sigma$) nicht als befriedigende Interpretation der Entropie ansehen kann, sobald es sich um *nichtstationäre* Fälle handelt, und deutet an, wie man sich eine befriedigendere Interpretation verschaffen müsste.

3. Beziehung zum Wiederkehreinwand. Für die Grösse Σ lässt sich nicht ein solches quasi-periodisches Verhalten beweisen wie für die Grösse H; denn während *Poincaré*s Wiederkehrsatz vor allem an die Voraussetzung *endlich* vieler Freiheitsgrade gebunden ist, *misst Σ die Verrührung eines Kontinuums von G-Punkten im Γ-Raum.* Es könnte danach scheinen, als ob *Gibbs* den Wiederkehreinwand überwindet, wenn er die Entropie *des Gases* durch ($-\Sigma$) statt durch ($-H$) interpretiert. Ersichtlich kann aber der Umstand, dass man diese oder jene Funktion ins Auge fasst, nichts daran ändern, dass der einzelne G-Punkt der Schar auf seiner E-Fläche im Γ-Raum seinen Rundlauf vollzieht: dass das einzelne Gasmodell seinen *Poincaré-Zermelo*-Zykel durchmacht. Mehr noch: nach der Darstellung des Kap. XII würde — wie wir schon erwähnten (Bem. 1 zu XV und XVI) — das Zerrühren der nichtstationären Anfangsverteilung von P und damit das Absinken von Σ auf sein relatives Minimum gerade wesentlich dadurch zustande kommen, dass der einzelne G-Punkt vielemal rund läuft!

Wie ein genauerer Vergleich zeigt, beruht auch bezüglich *dieses* Punktes die Überlegenheit der *Boltzmann*schen Theorie der Entropievermehrung darauf, dass sie die Permutabilität der Moleküle gebührend in Betracht zieht.

---

197) *L. S. Ornstein* (1908) [1] p. 57, 58.

198) *H. A. Lorentz* [2] § 83.

Bei Ausführung der *Planck-Lorentz*schen Andeutungen dürfte die *Gibbs*sche Erörterung der Σ-Abnahme im wesentlichen übergehen in eine Untersuchung der Abnahme des Scharmittels von H (vgl. Nr. **14** c).

24e. Die Monocykel-Analogien zur Thermodynamik (vgl. V 3). Als *Helmholtz* (1884), *J. J. Thomson* u. a. auf diese Analogien hinwiesen, untersuchte *Boltzmann*, wie ihr Zustandekommen vom Standpunkt der kinetisch-statistischen Theorie aus zu beurteilen ist. Jene Arbeiten *Boltzmanns* (1884, Ges. Abh. III, Nr. 73, 74, 82) sind gerade an dieser Stelle zu nennen, weil er besonders in ihnen die Methoden und thermodynamischen Analogien entwickelt, die dann 15 Jahre später *Gibbs* bei der Behandlung mikrokanonisch verteilter Systemscharen wieder geltend macht: *Boltzmann* geht dort von der Betrachtung einer ergodisch (= mikrokanonisch) verteilten Schar aus, deren Scharverteilung er unendlich langsam verändert, indem er gewisse in der Kräftefunktion enthaltene Parameter $r_1 \ldots r_n$ unendlich langsam variieren lässt. — Auf diesem Wege gelangte *Boltzmann* zu einer tiefgehenden Kritik der Monocykel-Analogien, die in *allen* Darstellungen der *Helmholtz*schen Monocykeltheorie unberücksichtigt blieb.

25. Arbeiten, die sich an die Gibbssche Darstellung anschliessen oder mit ihr verwandt sind. Die Arbeiten von *L. S. Ornstein* (1908—9) liefern vor allem einen sehr wertvollen Beitrag zur Aufhellung der *Grundlagen* der *Gibbs*schen Darstellung. Überdies zeigen sie: 1. dass das Operieren mit kanonischen Scharen für die Behandlung von komplizierten Gleichgewichtsfragen (z. B. Gleichgewicht in kapillaren Übergangsschichten) gelegentlich ein *bequemeres Rechenschema* liefert als das *Boltzmann*sche Verfahren; 2. warum in einer grossen Gruppe von *Gleichgewichts*-Problemen beide Verfahren das gleiche Resultat liefern.

A. Wassmuth (1908) weist nach, dass unter allen Verteilungen von der Form $\varrho = F(E)$ *nur* die kanonische Verteilung folgende Forderung erfüllt: Greift man aus der Schar diejenigen G-Punkte heraus, welche den Molekülen des Gasmodelles — bei beliebigen Geschwindigkeitswerten — eine bestimmte Konfiguration erteilen ($q_1^1 \ldots q_r^N$ gegeben) und bildet für diese Teilchen den Mittelwert eines Momentoidenquadrates[177]), so soll sich dieser Mittelwert als unabhängig erweisen von der vorgegebenen Konfiguration.

Um die Stellung einiger anderer Arbeiten zu kennzeichnen, ist es zweckmässig, auf eine Folgerung hinzuweisen, welche *Boltzmann* (1871) aus der Ergodenhypothese und der Gl. (34) zog[199]); sie ist wohl die eigentliche Wurzel der Idee, das Verhalten eines Körpers im

199) *Boltzmann* [4] Cap. III.

Wärmegleichgewicht durch das mittlere Verhalten einer *kanonischen* Schar zu repräsentieren: Man fasse in einem ergodischen System, das aus N Molekülen besteht, eine Gruppe von N' Molekülen ins Auge, wo N' zwar an sich gross sein kann, aber sehr klein gegen N sein soll. *Boltzmann* erhält dann für die *relative Länge der Zeiten,* während welcher der Zustand dieser N' Moleküle in einem Gebiet $dq_1^1 \ldots dp_r^{N}$ liegt, einen Ausdruck von der Form:

$$dW = Ce^{-\frac{E'}{\Theta}} dq_1^1 \ldots dp_r^{N'}, \tag{78}$$

E' = Totalenergie der Molekülgruppe in diesem Zustand, $\Theta/2$ = kinetische Energie, die im Zeitmittel auf jeden Freiheitsgrad des ergodischen Systems entfällt. Geht man zur entsprechenden stationär verteilten ergodischen Schar (31a) über, so wird (78) proportional zu der *Anzahl derjenigen Individuen der Schar,* bei denen der Zustand der betrachteten N' Moleküle in dem Gebiet $dq_1^1 \ldots dp_r^{N'}$ liegt. So gelangt man zu der Formulierung, in welcher der Satz bei *Maxwell* (1878) [3] auftritt. Bei *Gibbs* nimmt er folgende Fassung an (l. c. p 188): „Ist ein System mit einer grossen Zahl von Freiheitsgraden *mikrokanonisch* in der Phase verteilt, so kann jeder sehr kleine Teil davon als *kanonisch* verteilt angesehen werden.“ Das *Teil*-System von N' Molekülen ist der Körper, für dessen Verhalten wir uns interessieren; das *volle* ergodische System ist er zusammen mit einem sehr grossen Wärmebad. Das ist nun auch die Art, in der *Einstein* in zwei Arbeiten über die *„kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des II. H. S. der Thermodynamik“* (1902, 1903) [1, 2] von der Ergodenhypothese, von mikrokanonischen und kanonischen Scharen Gebrauch macht. Zur Interpretation der Entropie eines Körpers bedient er sich der Scharfunktion ($-\Sigma$), und dementsprechend verläuft die Deutung des II. Hauptsatzes.

Der Ausdruck (78) führt aber nicht nur zu Aussagen über das *mittlere* Verhalten der Gruppe von N' Molekülen, sondern er besagt auch, mit welcher *relativen Häufigkeit* die vom mittleren Verhalten *abweichenden* Zustände während genügend langer Zeit in der gegebenen Molekülgruppe vorkommen oder — bei Heranziehung der dem Ansatz (78) entsprechenden *kanonischen* Schar — mit welcher relativen Häufigkeit in *ihr* jene Zustände vertreten sind. Akzeptiert man also nur erst einmal die Ergodenhypothese, die Gl. (34) und den Übergang zum Ansatz (78), so kann man sich dieser *kanonischen* Schar als eines formalen Hilfsmittels bei allen Fragen bedienen, bei denen es auf die *„Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Abweichung vom wahrscheinlichsten Zustand“* ankommt.

M. v. Smoluchowski hat (1903)[200]) die zuletzt erwähnte „Unregelmässigkeits"-Frage von mehreren Seiten her in Angriff genommen gelegentlich der Behandlung folgenden Problemes: Wie wirken die Abweichungen, welche die Moleküle eines im Gleichgewicht befindlichen Gases in jedem Augenblick von ihrer „*wahrscheinlichsten*" Raumverteilung zeigen, auf die Zustandsgleichung und den H-Wert? *Smoluchowski* weist hier auch schon auf die Beziehungen hin zur Stabilitätsgrenze bei Überhitzung einer Flüssigkeit und Unterkühlung eines Dampfes, die er in einer späteren Arbeit (1907)[201]) näher untersucht.

In die Zwischenzeit fallen zwei Arbeiten von *Einstein* (1905)[202]) und zwei Arbeiten von *Smoluchowski* (1906)[203]) über die *Brown*sche Bewegung. Im vorliegenden Zusammenhang kommt für uns besonders der Gedankengang der *zweiten* Arbeit von *Einstein* in Betracht. Die N' Moleküle, von denen im Ausdruck (78) die Rede ist, mögen ein mikroskopisch kleines Körperchen zusammensetzen, das in einer im Wärmegleichgewicht befindlichen Flüssigkeit suspendiert ist. Um den jeweiligen Bewegungszustand des Körperchens zu determinieren, benütze man außer den Koordinaten der inneren Konfiguration und Bewegung noch solche Daten, wie die Höhe des Schwerpunktes oder Winkel, welche die Drehorientierung des Körperchens charakterisieren. Einer dieser zuletzt genannten Parameter sei mit α bezeichnet. Es werde ferner vorausgesetzt, dass die potentielle Energie des Körperchens den Parameter α nur in einem summativen Glied $\chi(\alpha)$ enthält. Integriert man (78) nach allen Parametern ausser nach α, so erhält man für die relative Länge der *Zeiten*, während welcher α zwischen α und $\alpha + d\alpha$ liegt, einen Ausdruck von folgender Form:

$$dw(\alpha) = c \cdot e^{-\frac{\chi(\alpha)}{\Theta}} d\alpha, \tag{79}$$

wo c von α unabhängig ist. $\chi(\alpha)$ möge für $\alpha = \alpha_0$ ein Minimum besitzen. Würde keine Temperaturbewegung herrschen, so würde das Körperchen sich bei $\alpha = \alpha_0$ im Gleichgewicht befinden. (79) giebt also Aufschluss über die *Abweichungen, welche der Parameter α vermöge der Temperaturbewegung von seinem „wahrscheinlichsten" Wert α_0 zeigt.* Unter den Anwendungen, die *Einstein* vom Ansatz (79) macht, heben wir zwei hervor[204]): 1. Auf die Verteilung mikroskopischer

200) *Smoluchowski* [1].
201) *Smoluchowski* [4].
202) *A. Einstein* [3, 4].
203) *Smoluchowski* [2, 3].

Suspensionen in einer Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwere; 2. auf das Quadratmittel der Veränderungen, welche der Parameter α in je einem Zeitintervall τ vermöge der Wärmebewegung erfährt (speziell: horizontale Wanderung und Drehung der suspendierten Teilchen).

26. Schluss. Das vorliegende Referat hatte sich vor allem mit den *begrifflichen Grundlagen* der statistisch-mechanischen Untersuchungen zu beschäftigen. Demgemäss musste besonderes Gewicht darauf gelegt werden, dass in diesen Untersuchungen eine grosse Zahl von unscharf formulierten und vielleicht miteinander sogar unverträglichen Behauptungen eine zentrale Bedeutung besitzen. Und in der Tat handelt es sich da um eine in *logischer Beziehung* schwerwiegende Unvollkommenheit, die in anderen Gebieten der Mechanik in wesentlich geringerem Grade anzutreffen ist. Diese Unvollkommenheit scheint aber nicht entscheidend zu sein für die Wertschätzung, welche die statistisch-mechanischen Untersuchungen bei den *Physikern* finden: In den letzten Jahren haben speziell die *Boltzmann*schen Ideen, (*H*-Theorem, *Maxwell-Boltzmann*sche Verteilung, Gleichgewicht der lebendigen Kraft, Beziehung zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit usw.) plötzlich eine weite Verbreitung gefunden, man wird aber kaum auf entsprechende Fortschritte in der begrifflichen Klärung des *Boltzmann*schen Systems hinweisen können, denen dieser Umschwung zuzuschreiben wäre.

Entscheidend dürfte hier vielmehr gewesen sein, dass in dieser Zeit einerseits die *Elektronenforschung*, anderseits die *ultramikroskopische Erforschung der kolloidalen Lösungen* eingreifen. Ganz allgemein bewirken beide eine Neubelebung und Vertiefung der Vorstellung, dass jeder Körper als Aggregat einer *endlichen* Zahl von sehr kleinen, gleichartigen Elementenbestandteilen aufgefasst werden kann, und dass dementsprechend in allen physikalischen und chemischen Fragen der mit normalen Hilfsmitteln beobachtbare Prozess ein Gewebe enorm vieler Einzelprozesse ist. Es bot sich hier Gelegenheit, die Methoden der kinetischen Gastheorie von jenen Anwendungsgebieten, für welche sie ursprünglich ausgearbeitet worden waren, auf ganz andere physikalische Gebiete zu übertragen. So vor allem auf die Elektronenbewegung in Metallen (V. 14, Nr. **40**, *H. A. Lorentz*), auf die *Brown*sche Bewegung mikroskopisch kleiner Suspensionen (Nr. **25**) und auf die Theorie der Hohlraumstrahlung (V. 23, *W. Wien*)[205]).

204) Betreffs ihrer experimentellen Bestätigung vgl. die in Anm. 208 zitierte Arbeit von *J. Perrin*.

205) Weitere Anwendungen auf neue Gebiete findet man in Arbeiten von

Allerdings handelt es sich dabei zunächst um eine versuchweise Übertragung der wichtigsten *Resultate* ohne eine entsprechende Weiterbildung der Grundlagen. Es wird z. B. das *Maxw.-Boltzm.-Vert.-Ges.* und der Satz vom Gleichgewicht der lebendigen Kraft ohne weiteres auf die Wärmebewegung der Elektronen in Metallen übertragen, obwohl die Koppelung mit dem Äther, von der in den Grundlagen der *Maxwell-Boltzmann*schen Theorie ganz abstrahiert wird, hier sicher eine wesentliche Rolle spielen muss.

Ein Urteil über die *Erlaubtheit* dieser verschiedenen statistischen Ansätze in den neuen Anwendungsgebieten wird dadurch ermöglicht, dass hier gewisse Experimente die Details der Ansätze viel tiefer nachzuprüfen gestatten, als das bei den früheren Anwendungen der Fall war[206]). So gelang es z. B. *O. W. Richardson* (1908—9)[207]), durch eine sehr direkte elektrische Methode die *Geschwindigkeits-Verteilungskurve* und mittlere kinetische Energie derjenigen *Elektronen* durchzumessen, welche aus einem erhitzten Metall infolge der Wärmebewegung herausgeschleudert werden. Betreffs der Resultate, welche die *mikroskopische Untersuchung der Brownschen Bewegung* geliefert hat, sei auf die zusammenfassenden Arbeiten von *Smoluchowski* und von *Perrin*[208]) verwiesen. In den genannten Fällen haben die Messungen Resultate geliefert, die als eine sehr direkte und weitgehende Bestätigung der kinetischen Ansätze angesehen werden. Wie die verbleibenden Differenzen[209]) zu deuten sind, wird sich natürlich erst bei einer Weiterführung der Experimente erkennen lassen.

P. Langevin: Über die Wiedervereinigung in elektrisch dissoziierten Gasen (Thèse 1902, Paris) und über die magnetische Permeabilität von Gasen (J. d. Phys. 4 (1905), p. 678).

206) Hier kommt vor allem in Betracht, dass die Elektronen und Gasionen vermöge ihrer elektrischen Ladung viel weiter kontrollierbar und beeinflussbar sind als die elektrisch neutralen Moleküle. Ausserdem vermag unter gewissen Umständen ein *einzelnes* Ion eine sicher beobachtbare Auslösungserscheinung zu liefern. Wie überraschend weit man durch Ausbeutung dieses Umstandes das einzelne Atom verfolgen kann, zeigen zwei neue Arbeiten von *E. Regener* (1908) Verh. d. Berlin. phys. Ges. 10, p. 78 und *E. Rutherford* und *H. Geiger* (1908/9) Phys. Zeitschr. Jhrg. 10, p. 1: Hier werden die 3—5 α-Teilchen, welche eine bestimmte Menge einer radioaktiven Substanz *pro Minute* durch ein kleines Metallfenster sendet, Stück für Stück durch optische resp. elektrische Auslösungseffekte gezählt.

207) *O. W. Richardson*, Phil. mag. (6) 16 (1908), p. 353, 890; ebendort 18 (1909), p. 681. Die erste Arbeit gemeinsam mit *F. C. Brown*.

208) *M. v. Smoluchowski* (1906) [3]. *J. Perrin* (1909) [1] vgl. ferner die in Nr. 14d zitierten Arbeiten von *A. Einstein*.

209) Z. B. bei *Perrin* l. c. § 28 Ende. Bei *Richardson*: Die Abhängigkeit der Effekte von der Temperatur.

Komplizierter liegen die Verhältnisse bei der Übertragung der statistischen Ansätze der kinetischen Theorie auf die Strahlungserscheinungen: Einige ältere Ansätze haben vorläufig noch kein deutliches Resultat geliefert; so die Verknüpfung der *Interferenzgrenze bei hohen Gangunterschieden* mit der mittleren Zeit zwischen den Zusammenstössen, die ein Emissionszentrum erfährt[210]), oder die Bemerkung, dass die Temperaturbewegung der Emissionszentren, wegen des entsprechenden *Dopplereffektes,* eine untere Grenze für die *Breite feinster Spektrallinien* bedingt[211]).

Der Satz vom Gleichgewicht der lebendigen Kraft hat bei seiner Ausdehnung auf das *Wärmegleichgewicht zwischen Materie und Äther* eine vorzügliche Bestätigung erfahren, soweit es sich um den ultraroten Teil der Hohlraumstrahlung handelt. Seine Übertragung auf das ultraviolette Gebiet führt aber zu Absurditäten, so dass man vorläufig noch nicht einmal imstande ist, das *Boltzmann-Stefan*sche Gesetz und *Wien*sche Verschiebungsgesetz anders abzuleiten, als durch Heranziehung thermodynamischer Schlüsse. Vorläufig ist nicht zu sehen, wie diese Schwierigkeiten sich lösen lassen[212]).

Sie treffen mit analogen Schwierigkeiten innerhalb der Gastheorie selbst zusammen[213]): Während sich der Satz vom Gleichgewicht der lebendigen Kraft für die translatorische und einige Fälle der rotatorischen Bewegung der Moleküle vorzüglich bewährt, versagt er ersichtlich für die komplizierteren inneren Bewegungen der Moleküle. Anderseits ist aber jener Satz eine fast unmittelbare Folge einer An-

---

210) V 23, Nr. **11**. Die Tatsache, dass natürliches Licht *un*polarisiert ist, und dass Lichtstrahlen, die von verschiedenen Emissionszentren stammen, nicht miteinander interferieren können, *inkohärent* sind, wird schon von *Fresnel* daraus erklärt, dass bei jedem Zusammenstoss die Phase und Schwingungsrichtung der Emissionszentren sich sprunghaft ändert und alle überhaupt möglichen Fälle gleichmässig erschöpft. Vgl. hier auch die Anwendungen von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen bei *Lord Rayleigh*: On the Resultant of a large Number of Vibrations of the same pitch and of arbitrary phase (1871), Scient. Pap. I, Nr. 6 und (1880) ebendort I, Nr. 68. Ähnliche Betrachtungen bei *van der Waals jr.* (1900) [1] Cap. IV und *H. A. Lorentz*: Emission u. Absorption d. Metalle, Proc. Akad. Amsterdam (1903), p. 666, zur Behandlung der Frage, wie viel Strahlung eine Gruppe von Elektronen vermöge ihrer zufälligen Abweichung von der wahrscheinlichsten Verteilung im Mittel aussendet. (Auch bei *A. Einstein* (1906) [4] § 2.)

211) Vgl. *O. Schönrock*: Breite der Spektrallinien nach dem Dopplerschen Prinzip, Ann. d. Phys. 20 (1906), p. 995. Dort auch Besprechung der Arbeiten von *F. Lippich* (1870), *Lord Rayleigh* (1889, 1905), *Ch. Godfrey* (1901) und *A. Michelson* (1902) über diesen Gegenstand.

212) Vgl. V 23 (*W. Wien*), Nr. 6.

213) V 8, Nr. 28.

nahme, welche allen *Boltzmann*schen Untersuchungen über Wärmegleichgewicht zugrunde liegt: dass nämlich bei den Mittelwertsbildungen im Γ-Raum solche Scharen zu benützen sind, welche entlang den Flächen konstanter Energie mit konstanter Dichte verteilt sind[214]).

Zumindest in diesem Punkt ist also eine Weiterbildung gerade in den Grundlagen der statistischen Mechanik unzweifelhaft notwendig geworden.

IV. Nachträge.

Seit Abschluss des Referates, das in der vorliegenden Fassung der Redaktion im Januar 1910 zum Druck eingereicht wurde, sind eine Reihe wichtiger Abhandlungen erschienen, die insbesondere zu den in den Nrn. **23—26** erörterten Fragen Stellung nehmen. Über diese wird im folgenden in Form von Nachträgen zu den jeweils in Frage kommenden Abschnitten noch kurz berichtet.

27. Nachtrag zu Nr. 23: Nichtstationäre Dichteverteilung im Γ-Raum. *Jan Kroò*[215]) giebt im Hinblick auf die Unrichtigkeit[216]) des betreffenden Verfahrens von *Gibbs* eine nähere Analyse für das „Zerrühren" einer nichtstationären Dichtenverteilung im stationären Strömungsfeld des Γ-Raumes. Zunächst betrachtet er ein periodisches System von *einem* Freiheitsgrad. Der zweidimensionale Γ-Raum lässt sich dann (wenigstens stückweise) so abbilden, dass die Bahnkurven zu konzentrischen Kreisen werden. Ist die Periode für die verschiedenen Bahnen verschieden, so rotieren diese Kreise mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten[217]). Unter der Voraussetzung, dass die *feine* Dichtenverteilung $\varrho(q, p)$ für $t = t_0$ hinlänglich stetig und die Stationäritätsbedingung (Konstanz von ϱ längs der einzelnen Bahnkurve) verletzt ist, zeigt *Kroò*, dass in der Grenze für $t = +\infty$ die *grobe* Dichte P längs den Bahnkurven und damit auch zeitlich konstant wird; zugleich wird

$$\lim_{t=+\infty} \Sigma(t) \leqq \Sigma(t_0).$$

214) In den Diskussionen über die *Rayleigh-Jean*sche Strahlungsformel wurde wiederholt behauptet, dass der Satz vom Gleichgewicht der lebendigen Kraft eine unmittelbare Folge der Hamilton-kanonischen Gleichungen ist (z. B. *H. A. Lorentz* auf dem intern. Mathematiker Kongress in Rom und V 23, Nr. 7). Es ist demgegenüber zu beachten, dass er *erst dann* zustande kommt, wenn man die Hamiltonschen Gleichungen mit der bedenklichen Ergodenhypothese oder der im Text formulierten Annahme kombiniert. Vgl. Anm. 170.

215) *Jan Kroò*, Über den Fundamentalsatz d. statist. Mechanik, Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 907.

216) *T.* u. *P. Ehrenfest* [1].

217) Die Behandlung dieses „reduzierten" Problems durch *Poincaré* (1906) [4] bezeichnet *Kroò* als nicht einwandsfrei.

Weiter geht *Kroò* zu periodischen Systemen von n Freiheitsgraden über, bei denen die Periode *wenigstens* mit *einer* der Integrationskonstanten $c_1 \ldots c_{2n-1}$, welche die G-Bahn des Systemes festlegen (vgl. Nr. **9**b), z. B. mit c_1 wirklich variiert. Fasst man dann die Bahnen in ∞^{2n-2} Scharen von je ∞^1 Bahnen zusammen, so findet in der zweidimensionalen Fläche, die jede dieser Scharen ausfüllt, dieselbe Art von „Zerrührung" statt, wie früher im zweidimensionalen Γ-Raum, und es ergeben sich so auch für diesen allgemeineren Fall dieselben Aussagen über das Verhalten der groben Dichte und der Grösse $\Sigma(t)$ bei $t = +\infty$, wie für das System von *einem* Freiheitsgrad.

Die *Kroò*sche Analyse zeigt also in der Tat, dass P für $t = +\infty$ der ergodischen Verteilung (30) *näher* liegt als für $t = t_0$ und $\Sigma(t)$ dem entsprechenden Σ-Wert[218]; es wäre aber natürlich ein blosses Versehen, dieses Resultat, das der Behauptung (XV) in Nr. **23**d entspricht, mit der Aussage zu verwechseln, dass für $t = +\infty$ die ergodische Verteilung und der zugehörige Σ-Wert *angenähert erreicht* werden, was der für *Gibbs* unentbehrlichen Behauptung (XV′) entspricht. — Gerade für die von *Kroò* behandelten periodischen Systeme lässt sich besonders bequem einsehen, dass für den Übergang von (XV) zu (XV′) eine besondere Hypothese vom Typus der Ergodenhypothesen unentbehrlich ist[219]. (Vgl. die Bemerkungen in Nr. **23**a, **23**b.)

28. Nachträge zu Nr. 24 und 25: Die Analogien zum beobachtbaren Verhalten warmer Körper und Arbeiten, die an die Gibbssche Darstellung sich anschliessen. Die Untersuchungen von *P. Hertz* versuchen klar zu stellen, welchen physikalischen Sinn es hat, wenn *Gibbs* bei Behandlung des thermodynamischen Verhaltens eines Systems von mikrokanonisch oder kanonisch verteilten Scharen ausgeht. *Hertz* lehnt zunächst[219] die *kanonische* Schar als rein formale Konstruktion ab, der *mikrokanonischen* Schar d. h. also der von *Boltzmann* und *Maxwell* eingeführten ergodischen Flächen-Dichtenverteilung (Gl. 31) spricht er hingegen physikalischen Sinn zu — auf Grund der Ergodenhypothese. Dementsprechend gelangt er zu dem *Boltzmann*schen Satz von der Gleichheit der mittleren kinetischen Energie für alle Freiheitsgrade. Um ihn mit dem thermodynamischen Begriff des Temperaturgleich-

218) Der Kalkul von *Kroò* würde natürlich genau dieselben Aussagen für $t = -\infty$ liefern. Die einzige Auszeichnung, die $t = t_0$ vor $t = \pm\infty$ besitzt, besteht darin, dass der Kalkul (Fourier-Entwicklung und partielle Integration) für die räumliche Schwankung der ϱ-Verteilung zur Zeit $t = t_0$ gewisse Beschränkungen voraussetzt, die für $t = \pm\infty$ verletzt sind.

219) *P. Hertz,* Über d. mechanischen Grundlagen der Thermodynamik. Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 225; 537.

gewichtes in Beziehung zu setzen, untersucht er näher, aus welchen Grundannahmen sich die folgenden beiden Behauptungen ableiten lassen:

A) *„Vereinigungssatz“:* Wenn zwei Körper vor der Berührung gleiche kinetische Energie pro Freiheitsgrad besitzen, so ist dies auch noch nach der Berührung der Fall.

B) *„Trennungssatz“:* Wenn ein aus zwei sich berührenden Körpern bestehendes System in seine Bestandteile zerlegt wird, so erhalten beide dieselbe kinetische Energie pro Freiheitsgrad, die früher dem vereinigten System zukam.

Der Beweis des zweiten Satzes erfordert sehr weitgehende Annahmen. Wenn wir uns der *Boltzmann*schen Ausdrucksweise bedienen, so ist vor allem im wesentlichen[220]) die folgende Annahme zu machen: die Zeit, während welcher im gekoppelten System die Energie sich über die beiden Teilsysteme sehr nahe gemäss dem Satz vom Gleichgewicht der lebendigen Kraft verteilt, ist erdrückend gross gegenüber den Zeiten, wo dies nicht der Fall ist. Im Fall der idealen Gase lässt sich — natürlich immer wieder nur unter Benutzung der Ergodenhypothese — der Nachweis für die Gültigkeit dieser Annahme führen, indem man das Volumen der entsprechenden Γ-Raumgebiete anwendet. Dies führt auf Rechnungen, die ihrem Wesen nach vom selben Typus sind wie die in Nr. **12**b angeführten *Boltzmann*schen Rechnungen. Für andere, z. B. *feste* Körper fehlen natürlich die Mittel zu entsprechenden Untersuchungen. Von dieser Basis aus verfolgt dann *Hertz* noch näher die Analogien zur Thermodynamik.

In einer zweiten Arbeit[221]) spricht *P. Hertz* unter Berufung auf die Untersuchungen von *L. Ornstein* [1] auch den *kanonisch* verteilten Scharen einen physikalischen Sinn zu, und zwar 1. auf Grund von Erwägungen, die sich wieder auf die Ergodenhypothesen stützen und deshalb ihren begrifflichen Grundlagen nach mit denjenigen Überlegungen *Boltzmanns* (1871) identisch sind, welche wir in Nr. **25** gelegentlich der Gl. (78) anführten[222]); 2. auf Grund derjenigen Argumente, die *Gibbs* im Kapitel XIV der „statistischen Mechanik“ (p. 185—188 der deutschen Ausgabe) zu gunsten einer Bevorzugung der *kanonischen*

220) Wegen der präzisen Formulierung der Annahmen muss auf §§ 5—8 der Originalarbeit verwiesen werden.

221) *P. Hertz*, Über d. kanon. Gesamtheit. Versl. Amsterdam 24. XII. 1910.

222) *Boltzmann* [4] Kap. III. Der analytische Apparat ist aber bei *Hertz* ein anderer als bei *Boltzmann*. Speziell beachte man bei *Hertz* den Übergang von einer „quasikanonischen“ zur „kanonischen“ Schar: nämlich die Ersetzung des Ausdruckes $h(E_0 - E)$ durch $e^{-h(E-E_0)}$ für die allein in Betracht kommenden sehr kleinen Werte von $(E - E_0)$.

vor den *mikrokanonischen* Scharen vorbringt[223]): Wenn uns ein System empirisch gegeben ist, z. B. ein Körper bestimmter Temperatur, so ist seine Energie nicht exakt, sondern nur sehr angenähert festgelegt, es sei demnach sinngemässer, sein Verhalten durch das mittlere Verhalten einer Systemschar zu analogisieren, in der (mit rasch abfallender Häufigkeit) auch die benachbarten Energiewerte vertreten sind.

L. Ornstein[224]) behandelt verwandte Fragen. Hervorzuheben sind hierbei 1. seine kritische Stellung zur Ergodenhypothese und demgemäss Einführung der mikrokanonischen Schar nicht als der einzig möglichen, sondern nur als einer einfachsten stationären Schar[170]); 2. einige Bemerkungen über die Eigenschaften von Systemscharen, die sich nach einem etwas anderen Gesetz als die kanonischen Scharen um die Fläche der wahrscheinlichsten Totalenergie häufen z. B. mit einer Dichte proportional zu

$$e^{-(E-E_0)^2 k} \quad \text{statt} \quad e^{-(E-E_0)k}.$$

A. Einstein[225]) bespricht das Verhältnis der Grundlagen seiner Darstellung zu denen der „statistischen Mechanik" von *Gibbs.* In seiner Arbeit über die Elektronentheorie der Metalle bedient sich *P. Debye*[226]) der *Gibbs*schen Darstellungsweise. Bei Festsetzung des Entropiemasses greift er zu einem kombinatorischen Verfahren, das mit der Verteilung einer grossen, endlichen Zahl von Gas-Bildpunkten über den Γ-Raum ebenso operiert wie *Boltzmann* mit der Verteilung der Molekül-Bildpunkte über den μ-Raum[226a]). Dabei lässt er im Falle eines Gasgemisches in eigentümlicher Weise die Permutabilität der gleichartigen Moleküle zur Geltung kommen[227]). Letzteres geschieht im Hinblick auf die *Planck*sche Kritik [Nr. 24d] der *Gibbs*schen Ansätze für die Entropie.

Eine umfassende Untersuchung über die logische Beziehung zwischen der *Boltzmann*schen Entropiedefinition einerseits und den verschiedenen Ansätzen, die *Gibbs* gegeben hat[228]), anderseits, liegt zurzeit noch nicht vor. Für ein System von sehr vielen Freiheitsgraden werden die verschiedenen *Gibbs*schen Entropieansätze untereinander

---

223) Auf sie verweist auch *Van der Waals jr.* Ann. d. Phys. 35 (1911), p. 185.

224) *L. S. Ornstein*, Some remarks on the mechan. foundation of thermodynamics, Proc. Amsterdam. 28. I. 1911 u. 25. II. 1911.

225) *A. Einstein,* Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 175.

226) *P. Debye,* Ann. d. Phys. 33 (1910), p. 441.

226a) Vgl. dazu *A. Einstein* [2] § 7.

227) Zu diesem Punkt vgl. auch *Gibbs*, Statist. Mechanik, Kap. XV.

228) Statist. Mechanik, Kap. XIV. In der Bezeichnung von *Gibbs* die Funktionen $\bar{\eta}$, log V und Φ. Bezüglich $\bar{\eta}$ vgl. Anm. 180.

äquivalent [229]), auch ist ihnen dann allen mit dem *Boltzmann*schen Entropiemass der Zug gemein, dass die Entropie eines Zustandes mit dem Logarithmus der „Wahrscheinlichkeit" dieses Zustandes zusammenfällt [230]). Dabei charakterisiert nun aber *Gibbs* den jeweiligen „Zustand" nur durch die Gesamtenergie E und die Werte der Parameter $r_1, \ldots, r_m$. Dementsprechend wird die relative Wahrscheinlichkeit zweier „Zustände" durch die relative Menge der Phasenpunkte gemessen, die bei bestimmten Werten der Parameter $r_1, \ldots, r_m$ die vorgeschriebene Gesamtenergie E liefern. Hierbei werden also *unterschiedslos* ausser denjenigen Phasenpunkten, die thermisches Gleichgewicht liefern, auch diejenigen mitgezählt, die beliebig starkes Nicht-Gleichgewicht liefern. — *Boltzmann* hingegen charakterisiert den jeweiligen „Zustand" des Gases wesentlich detaillierter, nämlich ausser durch die Werte von $r_1, \ldots, r_m$ noch durch die volle Angabe der Zustandsverteilung Z [Nr. 12a], welche die Moleküle besitzen sollen. Dementsprechend misst *Boltzmann* die relative Wahrscheinlichkeit zweier Zustände durch die relative Menge der Phasenpunkte, die dieser *engeren* Zustandscharakterisierung genügen. — Nun ist umittelbar verständlich, *warum im Falle von Gleichgewichtszuständen* (Betrachtung reversibler Prozesse) *das Boltzmannsche Wahrscheinlichkeits- und somit auch sein Entropiemass durch die Gibbschen Wahrscheinlichkeits-*

229) Im Falle eines idealen Gases kann man sich davon durch direkte Auswertung der Grössen $\bar{\eta}$, $\log V$ und Φ überzeugen.

230) Um die Richtigkeit dieser und der folgenden Bemerkung zu bestätigen, betrachte man zunächst diejenige Massfunktion der Entropie, welche *Gibbs* mit Φ bezeichnet. Φ ist definiert durch die Gleichung [Statist. Mechanik, Gl. 226]

$$\Phi = \log \frac{dV}{dE},$$

wo $V(E)$ — siehe ebenda Gl. 265 — das Volumen desjenigen Gebietes im Γ-Raum bedeutet, für welches die Totalenergie des Gases kleiner oder gleich dem Wert E ist. Man beachte nun, dass

$$V(E + dE) - V(E)$$

das Volumen einer infinitesimalen „Energieschale" misst. Daraus gewinnt man mit Hilfe einer einfachen Überlegung [vgl. Anm. 74 u. 82] die Aussage: *die Grösse* $\frac{dV}{dE}$ *misst die Gesamtmasse der G-Punkte, welche bei der ergodischen Flächendichten-Verteilung* (31) [Nr. 10b] *auf die zum Energiewert E gehörige Energiefläche des Γ-Raumes entfällt.* Bezüglich des *Gibbs*schen Entropiemasses Φ gilt also in der Tat das im Text Gesagte. — Weiter hat man sich dann nur noch zu überlegen, warum für ein System von sehr vielen Freiheitsgraden die beiden anderen Entropiemasse $\bar{\eta}$ und $\log V$ mit Φ sehr nahe zusammenfallen.

und Entropiemasse ersetzbar sind. Es beruht das darauf, dass — wie *Boltzmann* gezeigt hat [Nr. **13**] — die erdrückende Mehrzahl aller Γ-Punkte dem thermischen Gleichgewichte entsprechen. Diese Ersetzung dürfte wohl in vielen Fällen eine wesentliche Vereinfachung des Kalküls mit sich bringen. Anderseits ist aber auch ersichtlich, dass die *Gibbs*schen Entropiemasse *nicht* imstande sind, das *Boltzmann*sche Entropiemass bei Behandlung irreversibler Prozesse in isolierten Systemen zu vertreten, da sie ja die anfänglichen Nicht-Gleichgewichtszustände *unterschiedslos* mit den schliesslichen Gleichgewichten zusammenfassen. — Es lässt sich überblicken, wie eine entsprechende Weiterbildung der *Gibbs*schen Darstellungsweise z. B. durch Aufnahme der Daten der Zustandsverteilung in den Exponenten der kanonischen Dichtenverteilung sich erreichen liesse. Es würde dies in analoger Weise zu geschehen haben, wie *Gibbs* auch andere Nebenbedingungen des „Zustandes“ durch entsprechende Zusatzglieder im Exponenten der Dichte ϱ zur Geltung bringt[231]).

29. Nachtrag zu Nr. 26: Schlussbemerkung. Die Beschränkung auf die *ergodischen* Scharverteilungen führt — wie wir schon erwähnten — zu ernsten Widersprüchen mit der Erfahrung, insofern

231) Vgl. Anm. 189. — In diesem Zusammenhang sei auf ein eigentümliches mechanisch-statistisches Problem hingewiesen, das hervortritt, wenn man sich (z. B. im Hinblick auf die photochemischen oder die thermoelektrischen Prozesse) die Frage vorlegt: *welche statistischen und damit auch thermodynamischen Besonderheiten zeichnen die stationären irreversibeln Prozesse vor den nichtstationären aus.* Dass man natürlich die makroskopischen Differentialgleichungen für Temperatur-, Druck-Verteilung usw. auch hier aus dem Kalkul des H-Theorems gewinnen kann, indem man in ihn die Stationäritätsvoraussetzung explizit einführt, hat *Boltzmann* [siehe z. B. Gastheorie I, p. 144 die Gl. $B_1(\varphi) = 0$] gezeigt, und von dieser Bemerkung hat man auch in der kinetischen Theorie der Thermoelektrizität einen wenigstens partiellen Gebrauch gemacht [siehe *H. A. Lorentz,* Theory of Electrons, Leipzig 1909, p. 271]. — Hingegen blieb bisher folgende Frage unberührt, die sich doch mit Notwendigkeit aus dem Gedankengang *Boltzmanns* ergiebt: man betrachte einen irreversibeln Prozess der bei festgehaltenen äusseren Zwangsbedingungen von Nichtstationärität selbsttätig zu Stationärität übergeht; *lässt sich die Zustandsverteilung, die sich so schliesslich einstellt in irgend einem Sinn als „relativ wahrscheinlichste“ charakterisieren und lässt sie sich durch das Minimum irgendeiner Funktion kennzeichnen, die als Verallgemeinerung der Funktion H gelten kann?* [Wohl ist hier gerade so, wie im Fall des Gleichgewichtes $\frac{dH}{dt} = 0$. Die Stationärität durch irgendein relatives Minimum von H zu charakterisieren, ist aber nicht ohne weiteres möglich.] — Ein hierher gehöriges thermochemisches Problem bespricht *W. Nernst,* Das Dissoziationsgleichgewicht im Temperaturgefälle, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, p. 904.

sie unmittelbar den Satz liefert von der Gleichheit der mittleren kinetischen Energie für alle Freiheitsgrade, *wie ungleichartig auch immer die Natur dieser Freiheitsgrade sein mag.* Diese Widersprüche sind nun neuerdings besonders hervorgetreten gelegentlich der *Untersuchungen von W. Nernst* und seinen Schülern *über die spezifische Wärme fester Körper bei niedrigen Temperaturen*[232]): Schon in der theoretischen Analyse der spektralen Verteilung von Hohlraumstrahlung hatte sich gezeigt, dass bei der Konkurrenz eines Lichtresonators hoher Frequenz mit einem Lichtresonator niedriger Frequenz letzterer im Mittel ungleich mehr Energie enthält als der erstere, und dass nur für sehr hohe Temperaturen oder sehr niedrige Frequenzen die Lichtresonatoren merklich das Theorem von der gleichmässigen Aufteilung der Energie erfüllen[233]). Anderseits wies *Einstein* darauf hin[234]), dass die spezifischen Wärmen der festen Körper mit abnehmender Temperatur zunehmend vom *Dulong-Petit*schen Gesetz abweichen und die Tendenz zeigen, gegen Null abzusinken. Eine Beziehung zwischen beiden Gebieten stellte *Einstein* durch die Annahme her, dass die Energieaufteilung zwischen den in *Wärmeschwingung* begriffenen Atomen verschiedener fester Körper gerade in denselben Proportionen erfolge, wie zwischen Systemen von Lichtresonatoren verschiedener Frequenz. Die Atome eines und desselben Körpers sollen dabei mit einer bestimmten Frequenz um ihre Gleichgewichtslagen schwingen, die durch die Atommasse und den Elastizitätsmodul des Körpers bedingt ist[235]). — Die bis zu 23^0 absoluter Temperatur heruntergehenden Messungen von *Nernst* haben jenen von *Einstein* behaupteten Parallelismus gerade in seinen wesentlichsten Zügen an einem umfangreichen Material bestätigt. Vor allem hat sich die Behauptung bewährt, *dass die spezifische Wärme fester Körper bei Annäherung an $T = 0$ ausserordentlich stark gegen Null konvergiert.*

232) *W. Nernst*, Berl. Ber. 1910, p. 262; 1911, p. 306. — *F. A. Lindemann*, ebenda p. 316.

233) Vgl. V 23, Nr. 6. — Bei sinusoidalen Schwingungen ist der zeitliche Mittelwert der potentiellen Energie gleich dem der kinetischen Energie. Das Theorem von der gleichmässigen Aufteilung der kinetischen Energie bestimmt also für schwingende Freiheitsgrade auch gleich den Totalinhalt an Energie.

234) *A. Einstein,* Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme. Ann. d. Phys. 22 (1907), p. 180, p. 800. Vgl. auch *O. Sackur,* Ann. d. Phys. 34 (1911), p. 455.

235) Ist das Atomgewicht klein, so ist im allgemeinen eine höhere Frequenz zu erwarten und also schon bei normalen Temperaturen eine zu kleine spezifische Wärme; bei grossem Atomgewicht erst im Gebiet sehr niedriger Temperaturen.

Die statistisch-mechanische Theorie des Wärmegleichgewichtes kann diesem Faktum wohl nur dadurch Rechnung tragen, dass sie von der Betrachtung ergodisch verteilter Systemscharen übergeht zur Betrachtung solcher *Verteilungen im Γ-Raum, bei denen die Ungleichwertigkeit von Freiheitsgraden sehr verschiedener Natur stark zur Geltung gebracht wird.* Der einzige näher ausgearbeitete Versuch in dieser Richtung liegt in der *Planck*schen Theorie der Hohlraumstrahlung vor[236]), und ihn hat denn auch *Einstein* unverändert auf die Wärmeschwingungen in festen Körpern übertragen. Es bedarf aber noch weiterer experimenteller und theoretischer Untersuchungen, um festzustellen, welche allgemeinen nicht-ergodischen Scharen zu den in der Natur realisierten Energieverteilungen führen[237]) und für welche unter ihnen die Analogien zum II. Hauptsatz bestehen bleiben[237a]), insbesondere auch die Beziehung zwischen Entropie und „Wahrscheinlichkeit". Aus diesem Gesichtspunkt verdient besondere Beachtung ein Kunstgriff, von dem *Einstein* systematischen Gebrauch macht: an der Beziehung

Entropie = Logarithmus der „Wahrscheinlichkeit"

---

236) V 23 (*W. Wien*), Nr. 4. — Die *Planck*sche Annahme, dass ein Resonator von der Frequenz ν nur solche Energieinhalte aufweisen kann, die ganzzahlige Multipla des elementaren Quantums $h\nu$ sind (h universelle Konstante), besagt, dass der Phasenbildpunkt eines Systems von Resonatoren verschiedener Frequenz nicht in jeden Punkt des entsprechenden Γ-Raumes gelangen kann, sondern nur in die Punkte gewisser diskret liegender Gebiete niedriger Mannigfaltigkeit. Dabei liegen diese Gebiete in Richtung der verschiedenen Koordinaten des Γ-Raumes verschieden dicht; am wenigsten dicht in denjenigen Richtungen, welche den Koordinaten und Momenten der Resonatoren höchster Schwingungszahl entsprechen. [Der Nachweis, dass sich eine gleichmässige ϱ-Belegung dieser Gebiete des Γ-Raumes stationär aufrecht erhält — das Analogon zu den Sätzen in Nr. 9d —, fehlt bei *Planck*, da er den Mechanismus, durch den der Resonator seinen Energieinhalt sprunghaft ändert, unerörtert lässt.]

237) *W. Nernst* u. *F. A. Lindemann*, Berl. Ber. (1911), p. 494 besprechen die Abweichungen vom Einsteinschen Ansatz. — *P. Ehrenfest*, Welche Rolle spielt die Lichtquantenhypothese in der Theorie der Wärmestrahlung? Ann. d. Phys. 36 (1911), p. 91 untersucht die Möglichkeit einer Verallgemeinerung der Annahme von *Planck* im Gebiet der Wärmestrahlung.

237a) Beim Beweis dafür, dass $\delta Q : T$ ein vollständiges Differential ist, legen *Boltzmann* und auch *Gibbs* immer *ergodisch-verteilte* Systemscharen zu grunde. Nur gelegentlich seiner Kritik der *Helmholtz*schen Monocykelanalogien [vgl. Nr. 24e] untersucht *Boltzmann* auch einige spezielle Beispiele von *nicht-ergodisch-verteilten* Systemscharen, *um zu zeigen, dass für sie im allgemeinen die Analogien zur Thermodynamik fehlen.* — Im Hinblick auf das Problem der Wärmestrahlung konstruiert *P. Ehrenfest* [Journ. d. russ. phys. Ges. 43 (1911)] eine sehr allgemeine Klasse von *nicht*-ergodisch-verteilten Scharen, für welche die Relation $\delta Q : T = \delta \log W$ bestehen bleibt.

allgemein festhaltend, berechnet er in Umkehrung des *Boltzmann*schen Verfahrens die relative „Wahrscheinlichkeit" zweier Zustände aus dem *experimentell* bestimmten Verlauf der Entropie. Auf diesem Wege berechnet er — mit jeweils angepasster Ausdeutung des Begriffes „Wahrscheinlichkeit" — die zeitlichen oder sonstigen Mittelwerte von Zustandsparametern. In denjenigen Anwendungsfällen, wo erfahrungsgemäss eine Verletzung des Satzes von der Gleichaufteilung der kinetischen Energie vorliegt, führt dieses Verfahren wesentlich über den Wirkungsbereich des *Boltzmann*schen Verfahrens hinaus[238]).

Die experimentellen Anordnungen zur messenden und insbesondere auch direkt auszählenden(!) Erforschung des statistischen Zustandekommens von physikalischen Mittelwertseffekten haben neuerdings eine beträchtliche Vervollkommnung erfahren[239]). Die Übertragung der statistischen Betrachtungsweise auf einen sich stetig erweiternden Kreis von physikalischen Erscheinungen[240]) verschafft dem *„statistischen Ex-*

---

238) *A. Einstein*, Zum gegenwärt. Stand des Strahlungsproblems, Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 195, § 6.

239) Ausser den in Nr. **26** zitierten Arbeiten von *J. Perrin*, *E. Regener*, *E. Rutherford* u. *H. Geiger* sind als methodisch besonders interessant folgende neuere Untersuchungen hervorzuheben: *E. Rutherford* u. *H. Geiger*, Probability variations in the Emission of α-particles. Phil. mag. 20 (1910). p. 698. — *H. Geiger* u. *E. Mardsen*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 7. — *Th. Svedberg*, Nachweis der von der kinetischen Theorie geforderten Bewegung gelöster Moleküle, Ztschr. f. physik. Chemie 74 (1910), p. 738; Neue Methode z. Prüfung der Gültigkeit des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes für kolloide Lösungen, ebenda 73 (1910), p. 547; 77 (1911), p. 145. — Ferner die in Anm. 241 genannten Arbeiten. — Eine von *Milikan*, Das Isolieren eines Ions . . ., Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1097, ausgearbeitete Beobachtungsmethode liefert ein ganz neues Hilfsmittel für molekularstatistische Zählungen.

240) Ausser den in Nr. **26** (Anm. 205, 210, 211) genannten Gebieten und den **radioaktiven Zerfallserscheinungen** sind anzuführen:

Diffuse Zerstreuung des Lichtes durch Moleküle. Sie kommt nur insoweit zustande, als die Raumverteilung der Moleküle Zufalls-Abweichungen von regulärer Gitteranordnung besitzt. — *L. Mandelstam*, Phys. Ztschr. 8 (1907), p. 608; 9 (1908), p. 308, 641. *M. Planck*, ebenda 8 (1907), p. 906; 9 (1908), p. 354. *R. Gans* u. *H. Happel*, Ann. d. Phys. 29 (1909), p. 277. *H. A. Lorentz*, Proceed. Amsterd. 25, VI 1910. *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 34 (1911).

Magnetische und elektrische Doppelbrechung in Flüssigkeiten. Ihre Erklärung durch Suspensionen von unsichtbaren Kriställchen, deren vollständige Parallelorientierung durch die Wärmebewegung verhindert wird. — *A. Cotton* u. *H. Mouton*, Bull. soc. de phys. (1910), p. 189. *P. Langevin*, Le Radium 7 (1910), p. 249. *O. M. Corbino*, Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 756.

Hypothese einer räumlich-diskreten Struktur der Strahlungsfelder. — *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 17 (1905), p. 132; 20 (1906), p. 199; Phys. Ztschr. 10

periment" eine steigende methodische Bedeutung für die gesamte physikalische Forschung. Eine Bemerkung von *E. v. Schweidler* (1905)[241]) hat sehr wesentlich dazu beigetragen, das Interesse der Physiker auf die experimentelle Bestimmung der relativen Häufigkeit zu lenken, mit der ein Parameter von seinem „wahrscheinlichsten" Wert sich verschieden weit entfernt. *v. Schweidler wies nämlich darauf hin, dass sich aus der Dispersion eines Parameters darauf schliessen lässt, ob es sich bei dem betreffenden physikalischen Effekt um die Summenwirkung einer endlichen Zahl gleichartiger, voneinander unabhängiger Einzeleffekte handelt und wie gross deren Zahl ist.* Dieses Verfahren ist verwandt mit der Art, wie man auch in der Bevölkerungs- und biologischen Statistik — nach dem Vorgang von *W. Lexis* und *K. Pearson* — die Dispersionsgrössen als Kriterium für die „Unverbundenheit" der Einzelfälle verwertet[242]). Einige Begriffsbildungen und formale Hilfsmittel,

---

(1909), p. 185, 817. *J. Stark,* Phys. Ztschr. 10 (1909), p. 902; 11 (1910), p. 25. *A. Joffè*, Ann. d. Phys. 36 (1911). *E. v. Schweidler,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 225, 614. *N. Campbell,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1909), p. 310, 513. — Kritik d. Hypothese bei *M. Planck*, Ann. d. Phys. 31 (1910), p. 758.

Ablenkung der α-Teilchen beim Durchgang durch Materie. *H. Geiger*, Lond. Roy. Soc. Proc. A, 81 (1908), p. 174; 83 (1909), p. 492.

In diesem Zusammenhang sind noch die neueren Untersuchungen über das **thermomechanische Verhalten hochverdünnter Gase** zu nennen. Eine Reihe experimenteller Arbeiten von *M. Knudsen,* Ann. d. Phys. 28 (1909), p. 75, 999; 29 (1909), p. 179; 31 (1910), p. 205, 633; 32 (1910), p. 809; 33 (1910), p. 1435; 34 (1911), p. 593, 823; 35 (1911), p. 389. Theoretische Arbeiten: *M. v. Smoluchowski*, Ann. d Phys. 33 (1910), p. 1559; 34 (1911), p. 182; Phil. mag. 21 (1911), p. 11. *P. Debye,* Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 1115. Es handelt sich hier um die mechanischen und thermischen Besonderheiten, die zu Tage treten, wenn die Verdünnung so weit getrieben wird, dass der Weg, den ein Molekül ohne Zusammenstoss zurücklegt, im Mittel schon so gross ist, wie die Dimension des Gefässes.

241) *E. v. Schweidler*, Int. Congr. de Rad., Liège 1905. *K. W. F. Kohlrausch,* Wien. Ber. 115 (1906), p. 673. [Anwendung auf die Bestimmung der Zahl von α-Teilchen, welche ein Gramm Radium pro Sekunde aussendet; ihre direkte Auszählung gelang erst später, siehe Anm. 206.] Eingehende Diskussion aller hierher gehörigen Fragen bei *N. Campbell*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 15 (1909), p. 117, 310, 513 „The study of discontinuous phenomena". Auch Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 826. — *E. v. Schweidler*, Zur experimentellen Entscheidung d. Frage nach d. Natur d. γ-Strahlen. Phys. Ztschr. 11 (1910), p. 225, 614. *E. Meyer,* Struktur der γ-Strahlen. Berl. Ber. Juni 1910.

242) *W. Lexis*, Einleit. in Theorie d. Bevölkerungs-Statistik (Strassburg 1875); Massenerschein. in der menschl. Gesellschaft (Freiburg i. Br. 1877); Abhandlungen zur Theorie d. Bevölker.- u. Moral-Statistik (Jena 1903.) *L. Bortkiewicz,* Das Gesetz d. kleinen Zahlen (Leipzig 1898); Über den Präzisionsgrad des Divergenzkoeffizienten (Mitteil. d. Verbandes d. österr. Versich.-Techniker Heft V, Wien

die in diesen Gebieten ausgearbeitet vorliegen, harren im Augenblick noch ihrer Übertragung auf das Gebiet der physikalischen Statistik[243]). Umgekehrt darf man wohl erwarten, dass gerade die physikalische Statistik Vorbildliches für alle anderen Zweige der Statistik leisten wird; denn sie ist ausgezeichnet durch die verhältnismässige Primitivität der Einzelerscheinung, durch die Wohldefiniertheit der Versuchsbedingungen, vor allem aber durch die *Leichtigkeit, mit der sie mannigfaltige Massenbeobachtungen von sehr grossem Umfang beschafft*[244]).

30. Nachtrag zu Nr. 19: Das Axiomatisierungsproblem der Kinetostatistik. Eine befriedigende Charakterisierung der Ähnlichkeiten und der Unterschiede zwischen den „Wahrscheinlichkeits-Hypothesen" einerseits und den sonstigen naturwissenschaftlichen Hypothesen anderseits liegt — wie es scheint — bisher nicht vor. Die üblichen naturwissenschaftlichen Hypothesen bestehen in der Behauptung, dass ein bestimmtes abstraktes System von definierenden Axiomen und Theoremen ein (genügend genaues) Abbild einer konkreten Erscheinung liefert. Auch die „Wahrscheinlichkeits-Hypothesen" leisten etwas Ähnliches; auch sie stellen der konkreten Erscheinung ein bestimmtes, abstraktes Schema gegenüber (ein kombinatorisches Würfel-, Urnenschema usw.). Der Charakter der Abbildung ist hier aber ein wesentlich anderer: hier wird der *einen* konkreten Erscheinung E_{I} immer eine ganze *Schar* S_{I} von differenten Vorkommnissen im abstrakten Schema gegenübergestellt. *Worin soll dann die experimentelle Prüfung einer „Wahrscheinlichkeits-Hypothese" bestehen?* Man kann prüfen, ob der wirklich beobachtete Ausfall von E_{I} (genügend genau) mit dem „wahrscheinlichsten" Typus in der Schar S_{I} zusammenfällt. Weiter kann man das Ereignis E_{II} ins Auge fassen, das aus n_{I} Wiederholungen von E_{I} besteht und prüfen, ob der Ausfall von E_{II} (ge-

1901). *K. Pearson*, On the criterion, that a given system of deviations . . . has arisen from random sampling. Phil. mag. [5] 50 (1900). Ferner die Arbeiten *Pearsons* und seiner Schüler in der *Zeitschrift Biometrica* (Cambridge). — Vgl. I D 4 a: *L. Bortkiewicz*, Anwend. d. Wahrscheinlichkeitsrechn. auf Statistik.

243) So z. B. der *Galton-Pearson*sche *„Korelations-Koeffizient"*, siehe *G. F. Lipps*, Bestimmung d. Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes (Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 1905). Ferner der formale Apparat zur Bearbeitung umfangreicher statistischer Gesamtheiten, vgl. *H. Bruns*, Wahrsch.-R. u. Kollektivmasslehre, Leipzig 1906. — Man vgl. auch die Rechnungen von *H. Bateman*, On the probability-distribution of α-particles, Phil. mag. 20 (1910), p. 704, mit denen bei *L. Bortkiewicz*, Gesetz d kleinen Zahlen, Leipzig 1898.

244) Die Technik solcher physikal. Massenbeobachtungen findet man besprochen bei *E. Rutherford* u. *H. Geiger*, Phil. mag. 20 (1910), p. 698. *Th. Svedberg*, Ztschr. f. phys. Chemie 77 (1911), p. 145.

nügend genau) mit dem „wahrscheinlichsten" Schartypus in der entsprechenden kombinatorischen Schar S_{II} von Scharen S_I zusammenfällt. Ebenso kann man zu dem Ereignis E_{III} übergehen, das aus n_{II} Wiederholungen von E_{II} besteht und zur entsprechenden Schar S_{III} von Scharen S_{II} usw. Kurz *man kann an die physikalische Erscheinung bestimmter Art* (z. B. die Aussendung von α-Teilchen durch Radium) *mit „Experimenten und Hypothesen erster, zweiter, dritter, . . ., k^{ter} Ordnung" herantreten*[245]). In welchem logischen Verhältnis stehen die Hypothesen k^{ter} und $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung (H_K und H_{K+1}) zueinander? Bemerkenswert ist jedenfalls dieses: irgendein, vom Standpunkt der Hypothese H_K aus, ganz besonders unbefriedigender Ausfall des Experimentes E_K ist vom Standpunkt der Hypothese H_{K+1} nicht nur zulässig — die Hypothese H_{K+1} *fordert* vielmehr geradezu, dass bei den n_K Wiederholungen des Experimentes E_K, welche das Experiment E_{K+1} ausmachen, jener besondere Ausfall mit einer ganz bestimmten Häufigkeit vorkommt. Verfolgt man diese Bemerkung weiter, so stösst man auf Schwierigkeiten[246]), die in vielfacher Weise verschleiert werden können, deren befriedigende Analyse aber noch aussteht. — Solange es sich um die Zulassung der (beträchtlich wahrscheinlichen) *kleinen* Abweichungen vom „Wahrscheinlichsten" handelt, wird kaum ein Kontrast zwischen „Wahrscheinlichkeits-Hypothesen" und sonstigen naturwissenschaftlichen Hypothesen fühlbar: beide Arten von Hypothesen besitzen eben Approximationscharakter. Anders, sobald die Frage nach der *Zulässigkeit beliebig grosser* Abweichungen ernstlich erwogen wird. Hier tritt der Kontrast in Evidenz: der Physiker wird sich fragen, ob er auch noch diese *starken* Abweichungen vom „Wahrscheinlichsten" in dem Bild, das er sich von einer Erscheinung macht, zur Geltung kommen lassen will. — *Boltzmann* hat sich in einem bestimmten Fall

245) Die Weiterbildung des H-Theorems, wie sie durch den Umkehr- und Wiederkehr-Einwand angeregt wurde [Nr. 14], liefert ein Beispiel für den Übergang von einer Hypothese bestimmter Ordnung zu derjenigen der nächsthöheren Ordnung; ebenso der Übergang vom „Stosszahlansatz" zur „Hypothese der molekularen Unordnung" [vgl. Nr. 18]. — Vgl. in diesem Zusammenhang *L. Bortkiewicz,* Über den Präzisionsgrad des Divergenzkoeffizienten (Zitat Anm. 242), wo die Dispersion der Dispersion untersucht wird. Hieher gehört auch die ironische Bemerkung von *Poinsot* zu den Untersuchungen von *Poisson* „après avoir calculé la probabilité de l'erreur dans une certaine chose, il faudrait calculer la probabilité de l'erreur dans son calcul".

246) Eine Formulierung solcher Schwierigkeiten mit Hilfe des Begriffes „Hypothese erster, zweiter, . . ., k^{ter} Ordnung" findet man bei *T. Ehrenfest,* Die Anwend. d. Wahrsch.-R. auf gesetzmässige Erscheinungen. Journ. d. russ. phys. Ges. 43 (1911), p. 256 (wird auch in der Phys. Ztschr. erscheinen).

rückhaltslos dazu entschlossen[247]): er lässt Fälle spontaner Abnahme der Entropie ausdrücklich zu. *Planck* hingegen entscheidet sich bezüglich desselben Falles genau im entgegengesetzten Sinn und betont verallgemeinernd folgendes[248]): dem Physiker steht es frei, *durch eine besondere physikalische Hypothese* solche Abweichungen ausdrücklich auszuschliessen, welche schon eine Verletzung der anerkannten Eindeutigkeit des makroskopischen Ablaufes einer Erscheinung bewirken würden [vgl. Nr. **15**][249]). — In der Regel wird der Physiker eine bestimmte Entscheidung umgehen: er ist geneigt, von den *starken* Abweichungen gegen das Wahrscheinlichste „im Hinblick auf ihre enorme Unwahrscheinlichkeit" einfach abzusehen oder, noch allgemeiner, die Erörterung derartig entfernter Konsequenzen einer physikalischen Theorie überhaupt abzulehnen. — Bis vor kurzem traten diese Fragen eben nur am Horizont der physikalischen Forschung auf: in der Theorie der Beobachtungsfehler[250]) und in der Diskussion über das H-Theorem. Anders jetzt: die zunehmende Durchsetzung nahezu aller physikalischen Begriffe mit statistischen Elementen und die wachsende Bedeutung des „statistischen Experimentes" als eines physikalischen Forschungsmittels verschaffen jenen Fragen nun auch für die Physiker die Dringlichkeit, die sie schon seit geraumer Zeit für die Theoretiker

---

247) Vgl. die in Nr. **17** zitierten Äusserungen *Boltzmanns*.

248) *M. Planck*, Acht Vorlesungen über theoret. Physik (Leipzig 1909): Dritte Vorlesung. — Die „spezielle physikalische Hypothese", welche *Planck* einführt, um das spontane Auftreten einer wahrnehmbaren Entropieabnahme auszuschliessen — er nennt sie Hypothese der „elementaren Unordnung" — besteht in der Behauptung: die in einem reellen Gas stattfindenden Stosszahlen weichen **niemals** merklich vom „Stosszahlansatz" [vgl. Nr. **18**] ab. Diejenige Hypothese hingegen, welche wir in Nr. **18c** als „Hypothese der molekularen Unordnung" bezeichnen, würde solche Abweichungen zulassen.

249) Man vergleiche diesen Standpunkt von *Planck* mit demjenigen, den *D'Alembert*, Doutes et questions sur le calcul des probabilités (Mélanges de litérature, d'histoire et de philosophie. Tome V. Amsterdam 1770) bezüglich des Vorkommens sehr unwahrscheinlicher Serien bei Glücksspielen vertrat [Besprochen bei *J. v. Kries*, Prinzip d. Wahrsch.-R. Freiburg i. Br. 1886, p. 278 u. *H. Bruns*, Wahrsch.-R. u. Kollektivmasslehre, Leipzig 1906, p. 217]. Dieser selbe Standpunkt ist später noch oft geltend gemacht worden; zuletzt durch *K. Marbe*, Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre (Leipzig 1899). Die *Marbe*schen Ausführungen wurden kritisiert durch *W. Lexis*, Abhandl. z. Theorie d. Bevölk.-Statistik (Jena 1903) p. 222; *L. Bortkiewicz*, Wahrsch.-Theorie u. Erfahrung, Ztsch. f. Philos. u. philos. Kritik 121 (1902); *G. F. Lipps*, Theorie d. Kollektivgegenstände, Philos. Studien (Wundt) 17 (1901), p. 116, 575. Ebenda p. 462 Antwort *Marbes*.

250) Bei der Frage, ob Werte, die ganz aus der Reihe der anderen herausspringen, bei der Mittelwerts-Bildung berücksichtigt werden sollen.

der Bevölkerungsstatistik, biologischen Statistik usw. besitzen[251]). *Schon jetzt führt jede Untersuchung über die Struktur einer physikalischen Theorie unvermeidlich auf die Frage nach der Natur der „Wahrscheinlichkeits-Hypothesen“.*

---

251) Zusammenfassende kritische Besprechungen der hierher gehörigen Literatur: *E. Czuber*, Die Entwickl. d. Wahrsch.-Theorie u. ihrer Anwend. (Bericht deutsch. Mathem.-Verein. Leipzig 1899). *J. Kries*, Prinzip d. Wahrsch.-R., Freiburg i. Br. 1886. *A. Tschuprow,* Otscherki po Teorii Statistiki, Petersburg 1909 (in russischer Sprache).

(Abgeschlossen im Dezember 1909),
(Nachträge abgeschlossen im September 1911.)